



CONFIGURATION D'UNE STRUCTURE « HALBACH » PAR PLANS D'EXPERIENCES TREILLIS

VIVIER Stéphane, VAUQUELIN Aurélien, VILAIN Jean-Paul
Université de Technologie de Compiègne – LEC – 60205 COMPIEGNE
stephane.vivier@utc.fr

Résumé

Cet article se propose de décrire la configuration d'une structure à aimants permanents de type « Halbach », par l'utilisation particulière de la méthode des Plans d'Expériences. Plus précisément, on s'attachera à décrire les avantages du recours au plan d'expériences particulier appelé « Plan Treillis ». La recherche des valeurs optimales des principaux paramètres de la structure Halbach retenue, permettra d'illustrer l'emploi de ce plan particulier dans des démarches d'exploration, d'analyse de sensibilité et de recherche de conditions optimales. Cet exemple constitue un exemple concret d'application au domaine de l'électrotechnique.

Mots Clés. Méthode des Plans d'Expériences, Plans Treillis, Structure Halbach, Aimants permanents

PLANS D'EXPERIENCES « TREILLIS »

Méthode des Plans d'Expériences

De manière générale, la Méthode des Plans d'Expériences (MPE) cherche à déterminer et à établir les liens existant entre 2 types de variables : la *réponse* et les *facteurs*. La réponse est la grandeur physique étudiée. Les facteurs sont les grandeurs physiques modifiables par l'expérimentateur, sensées induire les variations de la réponse.

La MPE vise aussi bien à comprendre les relations liant la réponse avec les facteurs, que les facteurs entre eux. Pour cela, la solution proposée consiste dans tous les cas à établir un *modèle*, exprimant la réponse en fonction de tous les facteurs.

Pour bâtir ce *modèle*, il faut appréhender ces variations. Celles-ci sont déduites des résultats de séries d'expériences, c'est-à-dire de plusieurs configurations pour lesquelles les valeurs des facteurs sont différentes. Il s'agit ici de la notion de *plan d'expériences* (PE), correspondant à la réalisation d'une série de N expériences, qui sont toutes déterminées a priori, obligatoirement réalisables et indépendantes entre elles.

Les deux principales utilisations possibles de la Méthode des Plans d'Expériences (MPE) sont la technique du *screening* et la méthodologie des *surfaces de réponse*.

Dans le cadre du screening, parmi les facteurs recensés par l'expérimentateur, le screening permet de déterminer ceux qui ont une influence statistiquement non négligeable sur les variations de la réponse. On procède ainsi implicitement à une simplification du problème. On recherche *pourquoi* la réponse varie (en fonction de quels facteurs).

Lorsque la méthodologie des surfaces de réponses est appliquée, les variations de la réponse sont calculées en fonction des facteurs précédemment jugés influents. Cette étude est davantage quantitative, le but étant de déterminer *comment* la réponse varie.

Une dépendance fondamentale existe de fait entre le PE et le modèle.

On peut alors statuer que, suivant que l'on réalise une analyse de screening ou que l'on construise une surface de réponse, le modèle utilisé ne doit pas posséder les mêmes propriétés. Il est ainsi classique de lire que la définition du plan d'expériences utilisé doit être adaptée à l'application visée. Cet article présente l'application d'un plan particulier, faisant le lien entre ces 2 applications, en donnant la possibilité de réaliser des études de screening et de bâtir des surfaces de réponse à partir des mêmes résultats d'expériences.

Plans de screening

La technique du *screening* permet de déterminer, parmi un ensemble initial de facteurs, les éléments *influent*. Il s'agit donc d'un procédé de sélection ou de criblage (acception du mot anglo-saxon *screening*)^{1,2}.

De manière générale, toute variation de facteur induit des modifications des valeurs prises par la réponse. Cela est vrai pour pratiquement tous les facteurs, mais à des échelles différentes.

On réalise ainsi la comparaison entre les variations de la réponse suscitée par 2 sources différentes : les variations du facteur étudié, et les variations de grandeurs considérées comme n'ayant pas d'effet sur la réponse (réunies sous le vocable général de *bruit*).

Un facteur est jugé *influent* (ou *déterminant*) si son action sur la réponse étudiée est statistiquement supérieure à l'évaluation du niveau de bruit, ou par défaut, à un seuil fixé par l'expérimentateur.

De façon plus large, cette analyse permet de classer les facteurs entre eux (l'influence des facteurs est alors *relative*) mais également par rapport au bruit (l'influence des facteurs devient ici *absolue*). L'étude comparative se fait par simple comparaison des effets des facteurs entre eux. L'évaluation absolue de ces mêmes effets est réalisée par l'analyse de la variance (analysis of variance - ANOVA)³.

Dans l'absolu, pour tester l'influence d'un facteur sur une réponse, deux expériences suffisent. On fait varier les valeurs de ce facteur avec le maximum d'amplitude : de sa borne inférieure à sa borne supérieure (ce facteur prend 2 niveaux) ; on relève ensuite les deux valeurs correspondantes de la réponse.

Lorsque plusieurs facteurs interviennent, l'application du principe d'orthogonalité conduit à répéter l'opération précédente pour chacun des facteurs, lorsque les autres sont fixés successivement à leurs 2 valeurs possibles. Pour k facteurs, cela représente 2^k expériences à réaliser. Ce processus calculatoire correspond au *plan factoriel complet* noté 2^k .

Le principal inconvénient d'une telle méthode réside dans le nombre d'expériences nécessaires, vite dissuasif lorsque k devient important. Des alternatives moins coûteuses peuvent alors être employées, telles que l'utilisation des *plans factoriels fractionnaires* notés 2^{k-r} , c'est-à-dire des plans dont les expériences sont une fraction des plans factoriels complets correspondants. 2^{k-1} est la fraction moitié, 2^{k-2} la fraction quart du plan complet 2^k , etc.

La définition des fractions utilisées se fait grâce aux générateurs indépendants. Si les facteurs sont notés par des chiffres (1 pour le premier facteur, 2 pour le second, etc.) et leurs niveaux bas et hauts respectivement égaux à -1 et +1 (notations de Yates), la relation **123=I** définit entièrement la fraction retenue (**I** est mis pour la valeur 1). En effet, dans ce cas, seules les expériences représentées par des points dans la figure 2 vérifient cette égalité.

Ces plans permettent d'introduire la notion de *confusion d'effets*. Cette technique permet de réduire substantiellement le nombre de points par plan. Cependant, cette économie se paye : chaque effet calculé par ce type de plan est en réalité une somme d'effets simples (ceux déduits d'un plan factoriel complet). Toujours suivant l'exemple représenté par la figure 2, le générateur indépendant **123=I** implique que l'effet du facteur 1 calculé par le plan fractionnaire vaut en réalité l'effet de ce même facteur calculé par le plan complet additionné à l'effet de l'interaction entre les 2 autres facteurs 2 et 3 calculé également par le plan complet.

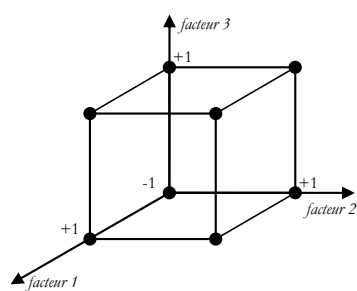


Figure 1. Représentation schématisée d'un plan factoriel complet à 3 facteurs

Les niveaux bas des facteurs sont notés par -1, les niveaux hauts par +1 ; les expériences du plan sont schématisées par les points

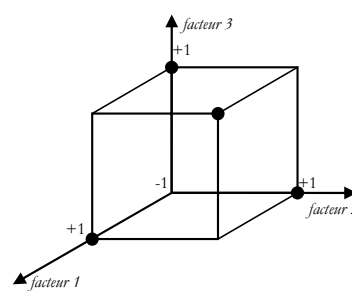


Figure 2. Représentation schématisée d'un plan factoriel fractionnaire à 3 facteurs tel que **123=I**

Plans de construction de surfaces de réponse

La *méthodologie des surfaces de réponse* constitue le second volet de la méthode des plans d'expériences.

Cette technique vise à déterminer d'une façon quantitative les variations de la fonction réponse vis-à-vis des facteurs d'influence significative^{4,5}. Elle vient ainsi s'appliquer à la suite de l'étude de screening, puisque logiquement, elle n'utilise que les facteurs précédemment jugés influents.

Historiquement, la MPE s'est appuyée sur l'usage de modèles de nature polynomiale. Dans ce cadre, le placement des points d'expériences a été pensé afin de conférer les meilleures propriétés à ces surfaces de réponse. C'est ainsi que l'erreur de modélisation se trouve au centre de ces considérations, justifiant l'utilisation courante de

plans particuliers, dédiés à la construction de surfaces de réponse. Le recours à la modélisation par relations non polynomiales est également possible.

Plans Treillis

PROBLEMATIQUE

Chaque facteur identifié est susceptible de varier dans un intervalle donné. La prise en compte simultanée des espaces de variation des k facteurs définit un domaine d'étude (DE) parallélépipédique à k dimensions.

Le plan de screening est souvent réalisé au plus près des limites du DE : chaque facteur prend successivement les valeurs de ses bornes de variation. Il est clair que les variations non linéaires (quadratiques par exemple) de la réponse ne sont pas détectées lors de l'étude de screening, étant donné la disposition trop lâche des expériences dans le DE et le nombre trop faible de niveaux pris par chaque facteur.

Une solution serait de réaliser le plan de screening dans une zone particulière, intérieure au DE. Cependant dans ce cas, les conclusions portant sur l'influence des facteurs ne sont valides et exploitables que dans cette zone : il est impossible d'extrapoler. Ainsi, si l'on rejette certains facteurs à cause de leurs influences trop faibles, alors ils ne peuvent l'être que dans cette zone, car ils peuvent s'avérer influents dans d'autres parties du domaine d'étude.

De la même façon, la méthodologie des surfaces de réponse ne travaille a fortiori que sur le produit d'un plan particulier, réalisé dans une zone définie du domaine d'étude. Par conséquent, son utilisation à des fins de recherche de conditions optimales est malaisée, et surtout potentiellement limitée.

Une façon de répondre à ces problèmes est de travailler relativement finement sur l'ensemble du DE. Cette possibilité est offerte par la réalisation du plan d'expériences particulier, dénommé « Plan Treillis ».

CONSTRUCTION

Le domaine d'étude est divisé en N_{sd} sous-domaines. Le découpage du volume se réalise par la partition du domaine selon chacune de ses k dimensions.

Si N_{pi} est le nombre de divisions imposées sur le domaine pour la i^{me} dimension ($i = 1, 2, \dots, k$), le nombre total de sous-domaines est $N_{sd} = N_{p1} \times N_{p2} \times \dots \times N_{pk}$. Cette opération de partition définit de fait une grille régulière comportant $N_{pc} = (N_{p1} + 1) \times (N_{p2} + 1) \times \dots \times (N_{pk} + 1)$ points d'expérience.

Ainsi, si des plans factoriels complets étaient réalisés en chacun des N_{sd} sous-domaines, le nombre total d'expériences serait égal à N_{pc} (pc est mis pour *plan complet*). Ce plan particulier est appelé *plan grille*. N_{pc} devient vite très grande, en particulier lorsque k augmente, conduisant à des coûts expérimentaux exorbitants.

L'intérêt de la solution réside donc dans l'utilisation privilégiée de plans factoriels fractionnaires. Dans chacun des sous-domaines est calculé le même plan fractionnaire 2^{k-r} .

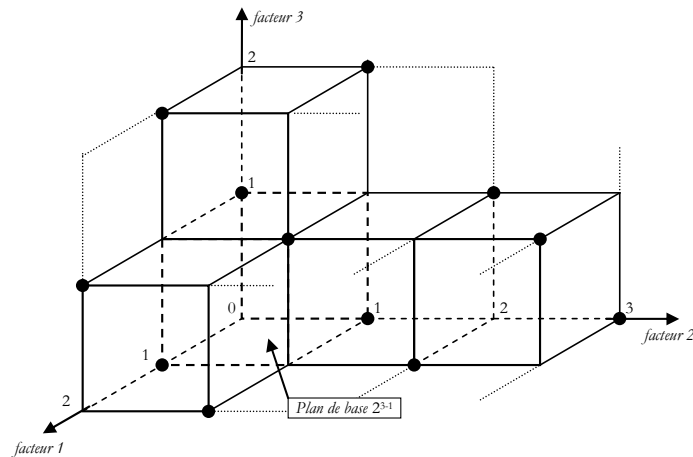


Figure 3. Plan treillis - Représentation schématique des sous-domaines (cubes) et du placement des points d'expériences
Le plan de base est un plan factoriel fractionnaire 2^{3-1}

Le plan réalisé pour les plus petites valeurs de facteurs est appelé *plan de base*. C'est à partir du placement des expériences dans ce sous-domaine que sont déduites les coordonnées des autres expériences dans les sous-domaines voisins par simples effets miroir (les générateurs indépendants changent de signe).

Le nombre total d'expériences nécessaires N_{pf} peut être estimé par $N_{pf} \approx N_{pc} / 2^r$ (pf est mis pour *plan fractionnaire*). N_{pf} est la valeur exacte lorsque $\sum N_{pi}$ est impair. La relation précédente montre l'intérêt majeur de la méthode. Le nombre d'expériences théoriquement nécessaires par utilisation de plans complets est divisé par 2^r .

Cette économie se paye bien entendu de la même manière que pour les plans factoriels fractionnaires, pour lesquels il devient impossible d'évaluer certaines interactions et d'évaluer les effets exactement.

APPLICATION A UNE STRUCTURE « HALBACH »

Structure retenue

La composition d'aimants permanents qui sera utilisée comme exemple d'application à l'outil plan treillis, est représentée par la figure suivante.

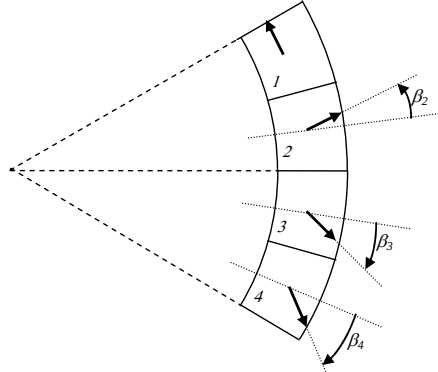


Figure 4. Facteurs du plan treillis, correspondant à l'orientation magnétique de 3 aimants permanents sur les 4 de la structure Halbach approchée étudiée

Il s'agit d'une structure « Halbach » approchée, dans la mesure où chaque secteur polaire n'est scindé qu'en 4 aimants permanents de même ouverture angulaire. On trouvera un résumé des utilisations les plus courantes des juxtapositions d'aimants permanents de type Halbach dans ⁶, ou dans ⁷ pour les actionneurs linéaires.

Pour chaque aimant n°i, l'orientation magnétique est repérée par un angle β_i référencé par rapport au rayon passant par le centre de cet aimant. Pour le premier secteur, l'orientation est orthoradiale ($\beta_1=90^\circ$). Pour chacun des autres segments, cette orientation doit être déterminée, relativement au critère suivant.

On se propose d'améliorer le couple C_{out} produit par la machine tournante constituée de cette structure Halbach. Pour des raisons de confidentialité, cette machine ne peut pas être décrite plus en détail. Il n'en reste pas moins que le problème décrit dans ce papier constitue un exemple typique d'application des plans treillis dans le cadre d'une étude réelle.

Les bornes de variation des 3 autres facteurs sont données par le tableau qui suit. Elles définissent ainsi les limites du domaine d'étude (DE).

Tableau 1. Bornes de variation des 3 facteurs

	Facteurs	Bornes inf.	Bornes sup.	Unités
1	β_2	0	70	deg
2	β_3	0	50	deg
3	β_4	-30	30	deg

Calcul du plan treillis

DEFINITION DU PLAN

Afin d'explorer le domaine d'étude précédemment défini, on décide de calculer le plan treillis nécessitant le moins d'expériences à réaliser. Dans les configurations à $k=3$ facteurs, le plan factoriel fractionnaire de base le plus économique est celui noté classiquement $2^{k-r}=2^{3-1}$; il demande donc $2^{3-1}=4$ expériences, c'est-à-dire $2^r=2^1=2$ fois moins d'expériences que le plan factoriel complet lui correspondant en terme de nombre de facteurs.

Le domaine d'étude a été décomposé en sous-domaines de la manière suivante.

Tableau 2. Données de décomposition du domaine d'étude pour le calcul du plan treillis

Dim.	Nb ss. dom.	Facteurs	Nb niv.
1	7	β_2	8
2	5	β_3	6
3	6	β_4	7

Le plan grille défini avec le même nombre de niveaux par facteur aurait nécessité 336 expériences.

Le plan treillis construit à partir du plan fractionnaire 2^{3-1} n'en demande que $336/2^r=168$. Cette économie est significative, en particulier dans cette application où le nombre de sous-domaines est important. Elle devient plus importante encore lorsque le nombre de facteurs en jeu augmente.

Les valeurs numériques du couple électromagnétique sont issues de simulations éléments finis du modèle bidimensionnel de l'actionneur rotatif à structure Halbach étudié dans cet article. Le maillage compte environ 5700

éléments triangulaires quadratiques. La réalisation complète d'une expérience (configuration de l'orientation des segments d'aimants permanents, maillage, résolution éléments finis et exploitation des résultats pour déduire le couple) est réalisée automatiquement par un superviseur d'optimisation ⁸, en un temps moyen de 30 s.

AUTO COMPLEMENTATION

Les calculs et les représentations graphiques réalisées à partir des résultats du plan treillis souffrent de l'économie d'expériences. En effet, cette réduction du nombre d'expériences rend les résultats issus du plan treillis moins précis et pertinents que ceux qui auraient été tirés d'un plan grille de même décomposition. Cependant, il s'avère que le positionnement relatif des expériences dans le domaine d'étude peut être utilisé de manière profitable pour interpoler les valeurs de la réponse aux coordonnées des expériences économisées par le plan treillis. Le principe de ces interpolations est donné par la figure suivante.

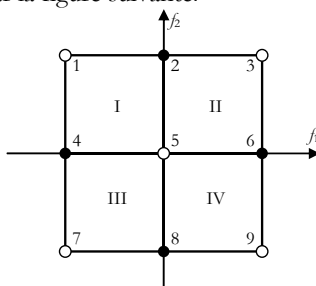


Figure 5. Principe de déduction des valeurs de réponses aux coordonnées d'expériences non calculées originellement (O), grâce aux points de réponses connues (●)

Suivant sa position dans le domaine d'étude, toute expérience non prise en compte par le plan treillis (repéré par le signe O) appartient entre 1 et 2^k sous-domaines composant ce plan treillis.

La démarche repose sur l'établissement des modèles analytiques (liant la réponse aux facteurs) en chaque sous-domaine, grâce aux résultats connus (●) issus du plan treillis. Ces modèles sont alors utilisés pour évaluer la valeur de la réponse pour chaque point d'expérience de la grille complète encore non évalué (O).

Dans l'exemple de principe ci-dessus, le point 1 appartient au sous-domaine I, le point 3 au sous-domaine II, etc. Le point 5 est partagé par les sous-domaines I, II, III et IV. Le modèle analytique du sous-domaine I est calculé à partir des résultats connus et appartenant à cet espace, c'est-à-dire les réponses aux points 2 et 4. Le modèle du sous-domaine II est basé sur les nœuds 2 et 6, etc. Enfin, le modèle du sous-domaine I permet d'interpoler la réponse aux nœuds 1 et 5 ; le modèle II donne une évaluation de la réponse aux nœuds 3 et 5. Le nœud 5 bénéficiant 4 valeurs interpolées (certainement différentes) de la réponse, la moyenne arithmétique de ces valeurs est retenue.

Cette procédure d'interpolation est très performante, dans la mesure où l'erreur moyenne d'estimation n'excède que rarement 3%. La même interpolation réalisée par la fonction « griddatan » de Matlab[®] commet une erreur moyenne de plus de 8%. Un exemple est donné par la figure 6, où l'on voit que l'auto complémentation fait apparaître un plateau pour le couple C_{tot} lorsque β_4 est compris entre -30° et -20° .

CONSTRUCTION DE SURFACES DE REPONSE

La répartition régulière des points d'expériences dans le domaine permet de déduire facilement les évolutions des réponses en fonction des facteurs et donc de construire des surfaces de réponse. La figure 7 en donne une illustration, en représentant le couple électromagnétique par surfaces d'isovaleurs en fonction des 3 facteurs. Par cette représentation, on peut déduire que C_{tot} augmente lorsque les angles β_2 , β_3 et β_4 diminuent. Plus précisément, l'optimum est trouvé en $\beta_2=10^\circ$, $\beta_3=0^\circ$ et $-30^\circ \leq \beta_4 \leq -20^\circ$. Ces 3 facteurs étant les seuls de l'étude, cette seule représentation permet de confirmer l'unicité de cette configuration optimale dans le DE : elle est donc de portée globale.

SCREENING MULTI ZONES

Le plan treillis peut être présenté comme une grille « fractionnaire », en vertu du fait qu'un plan factoriel fractionnaire à 2 niveaux par facteur est calculé en chaque sous-domaine.

De ce fait, il est tout à fait naturel d'utiliser chacun de ces plans à sa fonction première : l'étude de screening. Tous les plans fractionnaires utilisant les mêmes générateurs (aux signes près), les effets des facteurs ou des interactions sont confondus de manière identique dans tout le domaine d'étude.

L'évaluation d'un seul plan treillis peut ainsi être vue comme le calcul simultané de N_{sd} études de screening réparties de manière régulière et non redondante sur l'ensemble de l'espace d'étude. L'exploitation des résultats dirigée dans cette optique est appelé *screening multi zones*.

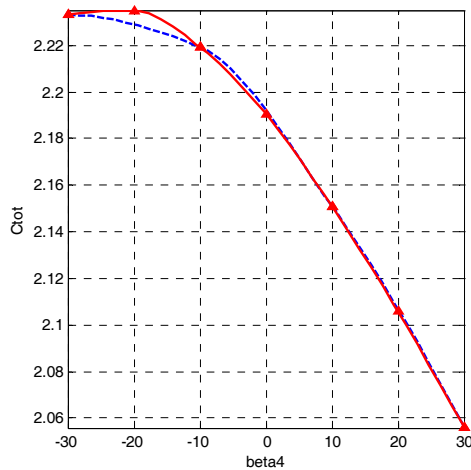


Figure 6. Exemple d'application de l'auto complémentation pour $\beta_2=10^\circ$ et $\beta_3=0^\circ$; en pointillés : courbe issue du plan original ; en trait plein : même courbe après auto complémentation

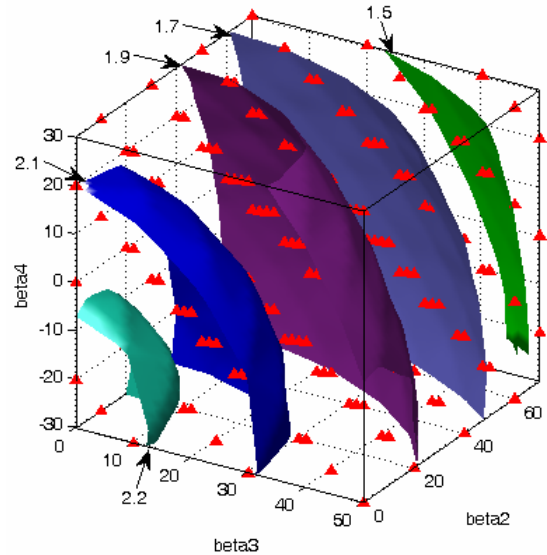


Figure 7. Surfaces d'isovaleurs de couple C_{tot} construites à partir des résultats du plan treillis original

Il devient ainsi possible d'afficher l'effet d'un facteur ou d'une interaction sur l'ensemble du DE. De même, des ANOVA peuvent être conduites en chacun des sous-domaines. On notera que cette technique permet de réaliser autant d'analyses de screening qu'il y a de sous-domaines (N_{sd}) à partir des N_{pf} résultats d'expériences du plan. Classiquement, on a $N_{sd}/N_{pf} > 1$, c'est-à-dire que l'on peut déduire de cette manière une quantité d'information supérieure à celle qui lui a donné naissance. Cela s'explique par le placement et le partage optimal des points d'expériences dans le DE.

Globalement, dans le cadre de l'exemple applicatif courant, le plan treillis permet ici de calculer $7 \times 5 \times 6 = 210$ analyses de screening, à partir des 168 expériences de ce plan. La figure suivante donne la représentation de l'effet du facteur β_4 (sur la réponse C_{tot}) suivant que l'on se déplace de sous-domaine en sous-domaine, dans la direction des β_2 et des β_3 croissants. L'effet (négatif) du facteur β_4 est d'autant plus fort que les 2 autres facteurs prennent des valeurs faibles. Egalement, β_4 a une influence plus importante sur les variations de la réponse que lorsque β_3 est grand. De plus, le fait que l'effet de ce facteur soit négatif indique qu'il est nécessaire de diminuer les valeurs de ce facteur afin d'augmenter celles de la réponse.

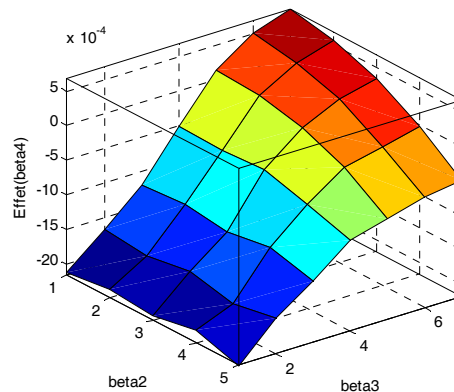


Figure 8. Variations de l'effet du facteur β_4 , dans les différents sous-domaines en fonction de β_2 et β_3 , pour $-30^\circ \leq \beta_4 \leq -20^\circ$

De manière générale, des valeurs importantes d'effet de facteur indiquent des croissances (ou décroissances) importantes de la réponse avec peu de modification des valeurs de ce facteur. Ces zones peuvent renseigner sur les directions à prendre dans le DE pour atteindre des conditions optimales le plus efficacement possible.

La technique de screening multi zones peut être utilisée de plusieurs autres manières. Elle peut, par exemple, servir à faire apparaître les facteurs les plus influents en chacun des sous-espaces. De là, les facteurs n'étant jamais cités, peuvent sous certaines conditions, être éliminés après coup de l'étude.

SEQUENTIALITE EN NOMBRE DE FACTEURS

Une autre caractéristique intéressante du plan treillis est la possibilité d'ajouter à l'étude un certain nombre de facteurs. Il est en effet courant de calculer un plan d'expériences initial avec k facteurs, puis de constater l'absence

de sources de variations de la réponse. Il devient alors intéressant de prendre en compte ces facteurs « oubliés », tout en bénéficiant des expériences déjà réalisées lorsqu'ils n'étaient pas considérés. Il est clair qu'en réalité, ces expériences ont été implicitement lancées pour des valeurs particulières de ces facteurs supplémentaires.

Dans l'exemple illustratif en cours, un nouveau facteur est introduit dans l'étude, car il est probable qu'il ait une influence non négligeable sur le niveau de couple C_{tot} . Ce facteur δ correspond au décalage angulaire relatif du stator par rapport au rotor, pour une alimentation électrique donnée.

Tableau 3. Bornes de variation et nombre de niveaux du 4^{ème} facteur

Facteur	Borne inf.	Borne sup.	Unité	Nb niv.
δ	6	24	deg	13

Les résultats donnés dans les paragraphes correspondaient à $\delta=22.5^\circ$. La prise en compte de ce nouveau facteur devant prendre 13 niveaux différents, donne le jour à un nouveau plan treillis à 4 facteurs et dont le plan factoriel fractionnaire de base est un 2^{4-1} . Cela représente 2184 expériences (au lieu de 4368 pour un plan grille de même décomposition). Encore une fois, ce type de plan permet de faire l'économie de la moitié des expériences. De plus, il est possible de récupérer la totalité des 168 expériences déjà réalisées. Eventuellement, les 168 autres valeurs de réponses obtenues par auto complémentation peuvent être prises en compte afin de diminuer encore le nombre de nouvelles expériences à évaluer.

L'examen de l'ensemble des résultats, auto complémentés, permet de trouver un maximum de couple C_{tot} pour $\beta_2=20^\circ$, $\beta_3=0^\circ$, $-30^\circ \leq \beta_4 \leq -20^\circ$ et $\delta=16.5^\circ$. La figure ci-dessous permet de constater que l'effet du facteur δ est supérieur à ceux des facteurs β_2 et β_4 , car les variations de C_{tot} sont plus rapides en fonction de ce facteur ; de plus ses variations dans le domaine d'étude font apparaître clairement cette configuration optimale comme unique pour la valeur de 16.5° .

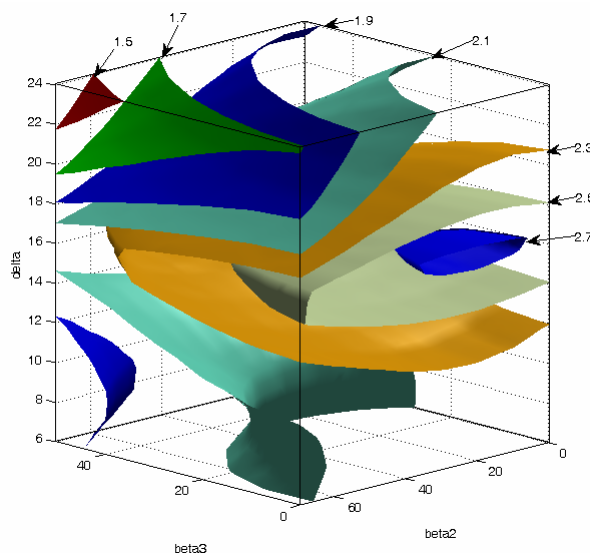


Figure 9. Surfaces d'isovaleurs de couple construites à partir des résultats auto complémentés du plan treillis à 4 facteurs ($\beta_4=-30^\circ$)

Il est important de préciser que la possibilité d'ajouter des facteurs au cours de l'étude (*séquentialité additive de facteurs*) en récupérant la totalité des résultats antérieurs, est une caractéristique offerte par un nombre très restreint de plans d'expériences : on citera les plans factoriels pour le screening (bien évidemment), les plans simples, de Koshal et de Doehlert pour la construction de surfaces de réponse ⁹.

SEQUENTIALITE EN NOMBRE DE NIVEAUX

De nombreuses situations peuvent amener l'expérimentateur à vouloir compléter sa connaissance du problème, non pas en ajoutant des facteurs (ou des réponses), mais en redéfinissant les niveaux pris par certains facteurs. Cela peut se produire lorsque les variations de la réponse étudiée ne sont pas assez finement rendues par la surface de réponse, relativement à un ou plusieurs facteurs ; dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter des niveaux à ces facteurs, entre ceux utilisés par le plan treillis précédent. Egalement, lorsque les conditions optimales sont placées en limite de DE, celui-ci peut être agrandi (lorsque cela est possible) afin d'améliorer encore la réponse ; dans ce cas, les bornes limites de variations de certains facteurs sont repoussées. Ces opérations définissent la *séquentialité en nombre de niveaux*, et peuvent être naturellement assurées par tout plan treillis.

Seuls les plans grilles et de Koshal présentent également cette caractéristique.

A la vue de la figure 7 (configuration à 3 facteurs), il a été vu que le maximum de couple est trouvé pour la limite basse du facteur β_3 (0°). On se propose alors d'étendre le domaine d'étude en faisant prendre à β_3 les niveaux

supplémentaires -40° , -30° , -20° et -10° . Cette opération revient schématiquement à flanquer le plan treillis initial d'un nouveau plan treillis pour lequel les 2 autres facteurs β_2 et β_4 gardent leurs limites de variations ainsi que leurs niveaux. La figure suivante donne le résultat de cette extension de domaine.

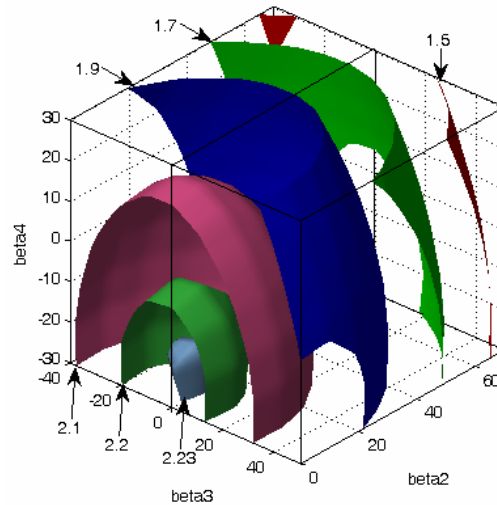


Figure 9. Surfaces d'isovaleurs de couple C_m construites à partir des résultats du plan treillis étendu
Pour $\beta_3 > 0^\circ$, on retrouve la figure 7 ; l'extension du plan est visible pour $\beta_3 < 0^\circ$

CONCLUSION

Cet article s'est attaché à présenter l'utilisation du plan d'expériences treillis comme outil principal à la compréhension des liens entre variables d'entrée (facteurs) et de sortie (réponses). Il a été vu qu'un unique plan de ce type était en mesure de délivrer des informations pertinentes tant au niveau de l'analyse de screening que pour l'établissement de surfaces de réponses. Ainsi, l'utilisateur n'a donc pas à choisir entre les différents types de plans d'expériences. Il lui est de plus possible d'ajouter des facteurs et de préciser les variations de la réponse en augmentant le nombre de niveaux pris par certains facteurs.

L'outil plan treillis se révèle donc flexible et d'application générale. Il se caractérise également par les économies importantes en nombre d'expériences qu'il permet de réaliser. L'utilisation de plans fractionnaires 2^{k-r} comme briques élémentaires permet de diviser le nombre d'expériences par 2^r , par rapport au plan grille de mêmes caractéristiques. Cette économie est d'autant plus importante que r est grand, c'est-à-dire que le nombre de facteurs k de l'étude est élevé ⁵.

Enfin, on rappellera que l'avantage principal des études par plan treillis est la portée du domaine de pertinence des résultats : le plan est réalisé sur la totalité de l'espace d'étude. Les conditions optimales trouvées dans le domaine d'étude peuvent être considérées comme globales, sous réserve que la décomposition en sous-domaine ait été suffisante.

REFERENCES

- [1] GOUPY J., La méthode des plans d'expériences – Optimisation du choix des essais & de l'interprétation des résultats, Ed. Dunod, 1996
- [2] SCHIMMERLING P., SISSON J-C., ZAIDI A., Pratique des plans d'expériences, Ed. Lavoisier Tec & Doc, 1998
- [3] VIVIER S., Stratégies d'Optimisation par la Méthode des Plans d'Expériences et Application aux dispositifs électrotechniques modélisés par Eléments Finis, Thèse Université Lille 1, 2002
- [4] GOUPY J., Plans d'expériences pour surfaces de réponse, Ed. Dunod, 1999
- [5] BOX G.E.P., DRAPER N.R., Empirical model-building and response surfaces, Ed. John Wiley & Sons, 1987
- [6] ZHU Z.Q., HOWE D., Halbach permanent magnet machines and applications: a review, IEE Proc. Electr. Power Appl., Vol. 148, N°4, July 2001
- [7] MOON G.L., SUNG Q.L., DAE-GAB G., Analysis of Halbach magnet array and its application to linear motor, Pergamon, Mechatronics 14, 2004
- [8] VIVIER S., GILLON F., HECQUET M., BROCHET P., A Design Optimisation Manager, COMPUMAG 2001, Proceedings Vol. II
- [9] DROESBEKE J-J., FINE J., SAPORTA G., Plans d'expériences – Applications à l'entreprise, Ed. Technip, 1997