UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Technologie de Compiègne

Spécialité : Génie Electromécanique

dans le cadre de l'Ecole Doctorale : Technologies de l'information et des Systèmes

par

Jaafar HALLAL

Études des vibrations d'origine électromagnétique d'une machine électrique : conception optimisée et variabilité du comportement vibratoire

Laboratoire d'Electromécanique de Compiègne, LEC - EA 1006

Thèse soutenue le 24 juin 2014 devant le jury composé de :
Mme. Christine PRELLE (Présidente)
M. Michel HECQUET (Rapporteur)
M. Jean-Philippe LECOINTE (Rapporteur)
M. Vincent LANFRANCHI (Directeur de thèse)
M. Frédéric DRUESNE (Directeur de thèse)
M. Pascal LARDEUR
M. Vincent LECONTE
M. Jean-Baptiste DUPONT

Table des matières

.

Remerciements

C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier toutes les personnes ayant soutenu et apprécié mn travail.

En premier lieu, je remercie Vincent Lanfranchi, professeur au Laboratoire d'Electromécanique de Compiègne, et Frédéric Druesne, enseignant-chercheur au Laboratoire Roberval, pour la direction de ma thèse, pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé tout au long de ces trois années. Ils ont beaucoup œuvré pour la mise en valeur de mon travail, j'ai beaucoup appri à leurs côtés et je leur adresse toute ma reconnaissance.

Je remercie Christine Prelle, professeur au Laboratoire Roberval, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier vivement Michel Hecquet, professeur à l'Ecole Centrale de Lille, et Jean-Philippe Lecointe, professeur à la faculté des Sciences Appliquées de Béthune, pour le travail qu'ils ont réalisé en tant que rapporteur. Je remercie également Pascal Lardeur, enseignant-chercheur au Laboratoire Roberval, Vincent Leconte, docteur-ingénieur chez Cedrat et Jean-Baptiste Dupont, docteur-ingénieur chez Vibratec, pour avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens à remercier les participants du projet AVELEC. En particulier, je remercie Fabrice Marion de la société Cedrat, Louis Humbert de la société Renault, Pascal Bouvet de la société Vibratec, Ainsi que DGCIS-FUI et OSEO pour le soutien financier.

Je remercie M. Guy Friedrich, directeur du Laboratoire d'Electromécanique de Compiègne pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je remercie également les membres du Laboratoire d'Electromécanique de Compiègne pour les bons moments partagés. plus particulièrement, je remercie mon collègue de bureau Azri Rasid pour le temps que nous avons passé ensemble et pour nos discussions.

Je remercie toutes les personnes de mon entourage qui m'ont soutenues durant ces trois années de ma vie.

Ma reconnaissance va à ma famille, qui a particulièrement assuré un soutien affectif, et qui ma encouragée à aller si loin dans les études. Ma mère, mon père, ma sœur et mon frère, je vous remercie pour votre soutien.

Un spécial remerciement à ma chère Zainab pour son soutien quotidien et son encouragement constant.

Resumé

Dans le contexte des moteurs électriques automobiles, les phénomènes vibratoires d'origine magnétique soulèvent une problématique relativement récente. L'objectif de cette thèse est la mise au point d'un modèle multi-physique pertinent d'une machine électrique afin de réaliser quelques études spécifiques, d'optimiser la machine et de prendre en compte la variabilité du comportement vibratoire. La modélisation numérique s'appuie notamment sur des formulations analytiques afin de bien maîtriser les différentes physiques. Des mesures expérimentales sur la machine permettent une confrontation avec le modèle numérique multi-physique et une validation des choix de modélisation. Dans ce contexte de modélisation multi-physique, un outil de couplage est développé entre les modèles 2D électromagnétique et 3D mécanique afin d'évaluer les comportements vibratoires d'origine électromagnétique de la machine. Une attention particulière a été portée à la prise en compte des forces magnétiques radiales et surtout tangentielles sur le stator de la machine électrique. Une méthode d'optimisation, basée sur le principe d'une surface de réponse dynamique, est appliquée sur le modèle électromagnétique afin d'améliorer des paramètres de conception de la machine. Les incertitudes liées à la conception sont souvent nombreuses, notamment dans le domaine vibratoire. A cet effet, la méthode MSP (Modal Stability Procedure) prenant en compte la variabilité des paramètres matériaux est proposée. La formulation MSP pour l'élément 3D hexaèdrique est développée et appliquée au stator électrique afin d'évaluer la variabilité des fréquences propres et des fonctions de réponse en fréquence.

Mots clés : machine électrique, modélisation éléments finis, modèle multi-physique, électromagnétique, vibration, optimisation, incertitudes.

Abstract

The aim of this thesis is to study the vibrational behavior of magnetic origin of an electrical machine. Its goal is to build a relevant multi-physics model of the machine. Then use this model to perform some specific studies and optimize the machine.

Although this study is based on a numerical model, it relies on analytical formulations to understand the various physical phenomena.

First of all, we build a multi-physics model, and validate this model based on experimental measurements. In this context, we have created a coupling tool that consists to couple the 2D electromagnetic and 3D mechanical models, in order to calculate the vibration behavior of the machine.

This tool, contrary to most of the work in this domain, takes into account the tangential and radial magnetic forces applied on the machine. This tool, allow us to evaluate the vibration impact of some complex physics phenomena. We consider an optimization method based on the principle of the dynamic response surface. This method, linked to the multi-physics model will be used to improve the vibration behavior of the machine.

Uncertainties in the vibration field are often overlooked. In this thesis we presented a method to compute vibration behavior taking into account the uncertainties of the materials properties. This method (Modal Stability Procedure, MSP) is based on the mechanical assumption of the modal stability. Taking advantage of this rapid method, the variability was evaluated on the Eigen frequencies and the frequency response.

Keywords : Electric machine, finite element modeling, multi-physics model, Vibro-acoustic, electromagnetic, optimization, uncertainty.

Chapitre 1

Introduction, problématique et orientation de l'étude

1.1 Problématique de recherche

Ces dernières années, nous avons vu émerger de plus en plus d'études sur des véhicules hybrides et électriques modifiant profondément le système automobile tel qu'il s'est bâti au fil du vingtième siècle. Principalement, la raréfaction des ressources pétrolières et la réduction nécessaire des émissions de gaz à effet de serre incitent à repenser le concept. De plus, le parc automobile mondial ne cesse de s'étendre, alimenté par la forte croissance des pays émergents.

Considérant ces problématiques, notamment celle de pollution, un certain nombre de normes européennes et nationales ont été créés. Une des approches proposées est le remplacement du moteur thermique, grand consommateur de pétrole, au profit du moteur électrique. Dans ce contexte, de grands constructeurs automobiles se sont lancés dans une course à l'innovation dans ce domaine, afin de fabriquer des véhicules moins polluants.

Dans le cadre du développement des véhicules à zéro émission, Renault veut proposer une gamme élargie de véhicules électriques. Le service métier « Noise Vibration & Harshness » (NVH) de l'ingénierie mécanique de Renault a actuellement une expertise satisfaisante dans la conception et la mise au point des groupes motopropulseurs thermiques. Le développement des machines électriques soulève de nouvelles problématiques liées aux excitations électromagnétiques et à l'électronique de puissance associée (domaine de fréquences totalement différent).

Renault a été à l'origine d'un projet de recherche d'envergure nationale qui se nomme AVELEC : c'est l'acronyme de "Acoustique de Véhicules ELEctriques".

Pour le véhicule électrique, les phénomènes qui génèrent les bruits de traction n'ont rien à voir avec ceux du véhicule thermique. Cette physique est assez mal connue et non maîtrisée dans l'industrie automobile. Les excitations créées par un moteur électrique sont totalement différentes de celles d'un moteur thermique : les niveaux sont beaucoup plus faibles à basses fréquences mais peuvent être similaires à hautes fréquences. Le chalenge d'AVELEC est de développer un savoir-faire équivalent pour les véhicules électriques.

Les partenaires de ce projet sont Vibratec, Adetel Equipment, Cedrat, Renault et le Laboratoire d'Électromécanique de Compiègne (LEC) de l'université de technologie de Compiègne (UTC).

- Vibratec apporte son expertise et ses moyens en mesure et calcul vibro-acoustique.
- Adetel Equipment apporte son expérience en contrôle commande et électro-

nique de puissance dans le domaine des moyens de transport électrique.
- Cedrat apporte son savoir-faire en modélisation des phénomènes magnétiques et en couplage multi-physique.
- Renault apporte sa connaissance du développement véhicule et de la vibro-acoustique, met à disposition de moyens d'essais et de calcul et, enfin, assure le conception mécanique des pièces prototypes.
- Le LEC de l'UTC apporte son expertise dans l'analyse des phénomènes acoustiques et vibratoires apparaissant lors du couplage machine-convertisseur.

Dans ce contexte, la modélisation et l'étude d'un modèle multi-physique du groupe moto-propulseur complet (GMPE) ont été réalisées pendant la thèse de Pellerey [PEL12]. Le modèle de GMPE complet est complexe, ce qui rend le modèle très lourd. L'idée est donc de créer un modèle pertinent d'une machine synchrone à rotor bobiné. Ce modèle pertinent doit assurer un compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats.

1.2 Vibration et Physio-Acoustique

Toute structure est caractérisée par des modes propres de vibration. Chaque mode, correspondant à une fréquence propre, suit une déformation particulière de la structure. Ces modes propres de la structure dépendent de sa masse, de sa rigidité et des conditions aux limites. Ils peuvent amplifier l'excitation sur des plages de fréquences déterminées.

Le son est une vibration mécanique d'un fluide, qui se propage sous forme d'ondes longitudinales grâce à la déformation élastique de ce fluide. La source de la vibration du fluide est généralement la vibration d'une structure mécanique (figure 1.1). Les êtres humains entendent théoriquement entre les fréquences 20Hz et 20kHz. Plus habituellement, cette fourchette de fréquence s'étale de 40Hz à 15kHz.

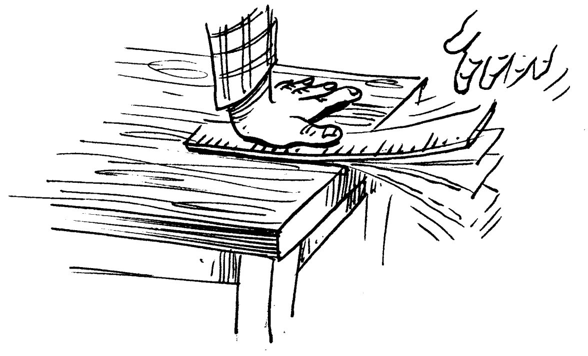


Figure 1.1 – La vibration est la source du son

Un aspect physio-acoustique intéressant est que l'oreille humaine ne réagit pas aux excitations sonores de façon constante en fonction des fréquences qui les composent à niveau de puissance acoustique équivalent (dB Sound Pressure Level, SPL). Les courbes de la figure 1.2 présentent ce phénomène physio-acoustique non linéaire. Par exemple, nous percevons un son à 100 Hz moins intense qu'un son à 1000 Hz.

L'oreille humaine est particulièrement sensible aux fréquences comprises entre 500 et 8000 Hz, ce qui correspond malheureusement aux domaines d'émergences acoustiques des machines électriques. L'oreille humaine possède donc ses propres filtres en terme d'amplitude-fréquence (figure 1.2). La maîtrise du bruit d'un moteur est donc à la fois une question de contrôle en terme d'intensité du rayonnement, le

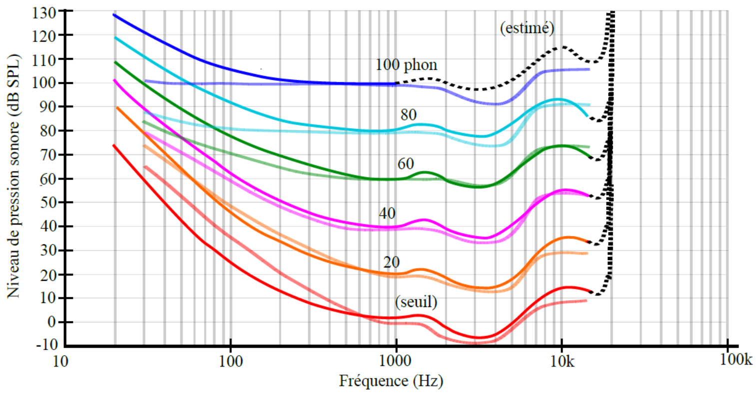


FIGURE 1.2 – Lignes isosoniques normales définissant des puissances acoustiques ressenties

contrôle des interactions entre les excitations et la réponse de la structure et, aussi, en terme de perception.

1.3 Source de bruit dans les machines électriques

Le bruit audible des machines électriques, qui participe à leur impact environnemental, au même titre que leur consommation électrique ou leur recyclabilité, est devenu un critère de poids durant leur phase de conception. D'une part, dans les applications industrielles, l'exposition au bruit a un impact direct sur la santé et, d'autre part, dans les transports, le confort acoustique est important.

Le niveau de bruit global provient de trois sources principales :

- Le bruit d'origine mécanique, issu en général de l'assemblage, des roulements et du sirènement du réducteur.
- Le bruit d'origine aérodynamique, issu des turbulences des flux d'air, liées par exemple à la ventilation dans le moteur.
- Le bruit d'origine électromagnétique, issu des déformations des pièces sensibles au champs magnétiques. Cette famille est à son tour divisée en deux sous groupes :

Le bruit magnétique : dû à la déformation des matériaux magnétiques sous l'influence des efforts magnétiques s'exerçant principalement à leurs interfaces,

Le bruit magnétostrictif : certains matériaux se déforment lorsqu'ils sont plongés dans un champ magnétique.

Dans cette thèse, nous étudions uniquement le bruit magnétique que l'on considère comme la source principale du bruit d'origine électromagnétique dans les machines électriques, dans la plage de vitesse de rotation qui nous interesse.

1.4 Bruit d'origine magnétique dans les machines électriques

Dans les machines à courant alternatif, le bruit d'origine magnétique peut dominer le niveau de bruit total à basse vitesse. Il est produit par les courants présents dans la machine et se caractérise souvent par une désagréable émergence de raies acoustiques. Cette émergence tonale est par ailleurs pénalisée par la norme limite de bruit CEI 60034-9. La compréhension du phénomène de bruit d'origine magnétique est donc primordiale en vue de concevoir des machines silencieuses, ou de diagnostiquer et résoudre des problèmes de bruit sur des machines existantes.

La prédiction du bruit d'origine magnétique relève de la modélisation multi-physique. Celle-ci nécessite à la fois un modèle électromagnétique de l'excitation de la machine et un modèle vibratoire de la structure excitée (figure 1.3). De plus, le bruit doit être simulé en régime variable afin de prendre en compte les phénomènes de résonance. Même si la problématique globale est acoustique, on se limite dans cette thèse au calcul vibratoire de la machine car les outils de modélisation acoustique à partir de vibration sont déjà assez matures. Des modèles analytiques électromagnétiques et mécaniques-vibratoires ont été développés pour appréhender la globalité mais aussi les origines de ces problématiques.

Plus en détail, la circulation des courants électriques dans les bobinages du stator conduit à la déformation des parties magnétiques de la machine. Le champ magnétique créé dans la machine électrique génère une distribution de pressions magnétiques dans l'entrefer. Cette pression est appliquée sur les pièces magnétiques de la machine pour les exciter selon des modes de déformations relativement précis. En effet, la nature des efforts magnétiques appliqués définit directement les modes de déformation de la structure excités.

Par la suite, nous nous intéressons à développer un modèle multi-physique du stator seul. L'idée est de créer un modèle multi-physique pertinent. Ce modèle doit être simple avec des résultats réalistes. Dans ce but, nous comparons les comportements vibratoires du modèle simplifié avec les comportements vibratoires d'un modèle complet de la machine et avec des mesures expérimentales.

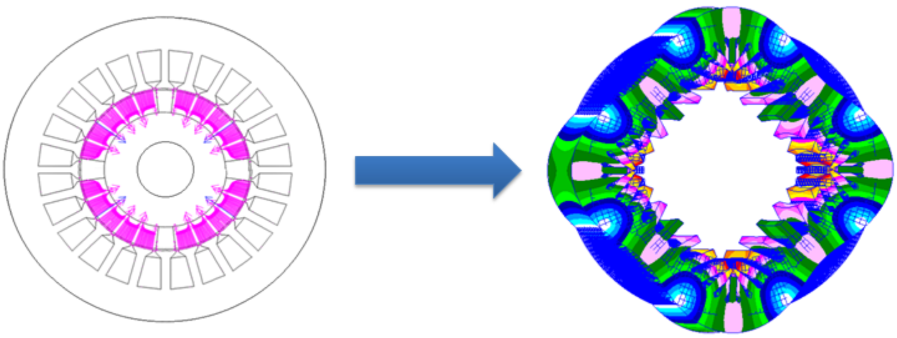


FIGURE 1.3 – Pression magnétique et réponse du modèle vibratoire du stator

1.5 État de l'art

Dans cette partie, nous présentons l'évolution des recherches précédentes concernant le bruit et les vibrations d'origine électromagnétique dans les machines électriques.

Les premiers apparitions d'articles scientifiques dans ce domaine datent de plusieurs décennies. Jordan [JOR50], Moore [MOO65] et Alger [ALG70] présentent une première approche qui consiste à calculer les efforts électromagnétiques et leurs effets vibratoires et acoustiques dans la machine électrique. Plus récemment, Timar et Gieras [YAN81, TIM89, GIE05] sont une référence dans l'étude des phénomènes acoustiques liés aux machines électriques. Dans ces études, une méthode analytique est appliquée pour calculer les forces magnétiques radiales d'entrefer à partir des caractéristiques géométriques (nombre d'encoches, nombre de pôles ...) et électrotechnique (fonction de bobinage, type d'alimentation ...) de la machine. Ces forces radiales sont ensuite appliquées sur un modèle analytique vibro-acoustique simple du stator (un cylindre ou une sphère). Ce qui permet d'obtenir une première analyse du rayonnement acoustique de la machine.

Les résultats présentés ont une représentativité limitée. Ces différents auteurs n'ont pas utilisé les méthodes numériques afin d'affiner leurs résultats et de limiter les hypothèses de modélisation.

Les méthodes numériques sont devenues un standard grâce aux codes éléments finis (EF) associés à l'augmentation de la puissance des calculateurs. Cette évolution a permis de remplacer quelques modèles analytiques de la chaine multi-physique par des modèles numériques. Avec un temps de calcul plus important, cette évolution nous permet d'avoir des résultats plus réalistes et précis, ainsi qu'une compréhension des phénomènes physiques. Cependant, selon le but recherché, il existe toujours un compromis entre la qualité des résultats et le temps de calcul. Les méthodes numériques ont été déjà développées et utilisées depuis les années 80. Nous citons quelques études numériques qui déterminent de façon indépendante le contenu harmonique des excitations magnétiques et les fréquences propres vibratoires du moteur à des modèles EF à deux dimensions [BEN93, BEL91]. Ce type de calcul est relativement peu coûteux en temps de calcul, mais reste trop lourd pour être utilisé dans un algorithme d'optimisation. Cependant, nous pouvons comparer l'excitation et le comportement vibratoire pour prévoir les zones à risques acoustiques. Comme aucun couplage excitation-vibration n'est réalisé, il est difficile alors d'obtenir les niveaux vibro-acoustique réalistes.

On cite encore quelques travaux de recherche dont le but est l'optimisation des machines électriques, dans lesquels des modèles analytiques ou semi-analytiques sont toujours utilisés [BES09a, BES09b, HAM05, VIV04, KOB97, BES07, BES10, BES09c, BES09d, BRU97, LEC04]. Ces modèles peuvent être recalés ou alimentés par des modèles numériques (EF) et des mesures afin d'améliorer la qualité des résultats [FAK14].

On trouve quelques travaux orientés dans le sens du couplage magnétique-mécanique entre des modèles EF. Cette démarche sert à comprendre de façon complète et locale les propriétés des forces magnétiques agissant sur les matériaux magnétiques [BEL99, BEL04, DEL01, HEN04, HEN10].

D'autres études couplent fortement les phénomènes élastiques et magnétiques [FON10, DEL01, BER11]. Ce type de modélisation est lourd en terme de temps de calcul. Il est intéressant pour les études liées au phénomènes de magnétostriction et le piézomagnétisme. Il n'est donc pas intéressant de réaliser ce type de modélisation dans la thèse.

Le couplage faible numérique est présenté dans des travaux récents sur des machines éclectiques modélisables en 2D ou 3D [SCH06a, VAN08, RAI10, BÖS10]. L'application d'une optimisation sur ces modèles est toujours difficile. Il est possible d'appliquer une simple étude de sensibilité pour un point de fonctionnement donné [SCH06b, SCH05]. Afin de réduire le temps de calcul, il est aussi possible de coupler faiblement un modèle magnétique EF 2D avec un modèle mécanique EF 3D[VAN08].

Dans cette thèse, nous allons utiliser cette technique de couplage faible entre un modèle magnétique EF 2D avec un modèle mécanique EF 3D. Cette modélisation a permis d'obtenir des résultats satisfaisants en terme de précision, ainsi qu'une compréhension des phénomènes physiques. De plus, elle est cohérente avec notre machine (MSRB) qui est modélisable en 2D, soit un temps de calcul acceptable.

Il existe aujourd'hui une gamme de modélisations de phénomènes vibro-acoustiques pour les machines électriques. Des modèles analytiques, rapides mais pas toujours capable de prendre en compte précisement tous les phénomènes, jusqu'aux plus complètes avec le couplage fort de modèles magnéto-élastiques 3D. Des études récentes sont appliquées sur un modèle magnétique EF 2D couplé avec un modèle mécanique EF 3D d'une machine synchrone à rotor bobiné : une études sur l'effet vibratoire de l'excentricité du rotor [PEL12a], une deuxième sur l'effet de l'angle de charge sur les harmoniques de pression magnétique [PEL10] et des autres études sur l'outil de couplage et une optimisation appliquée sur le rotor [PEL11, PEL12b].

1.6 Plan du manuscrit

Dans cette étude, un modèle électromagnétique EF 2D de la machine est couplé avec un modèle mécanique EF 3D du stator en utilisant un outil implémenté dans Matlab. La création des modèles et les choix de modélisations sont alors présentés et interprétés. L'outil de couplage et la méthode de projection sont également détaillés. Après l'introduction générale sur la problématique de la thèse, le chapitre 2 présente l'outil de couplage créé et utilisé, le modèle électromagnétique, des études approfondies sur le calcul de pression magnétique, le modèle mécanique, la méthode de calcul vibratoire et la validation du modèle.

En profitant de l'outil de couplage et afin d'améliorer les comportements vibratoires de la machine, on a réalisé dans le chapitre 3 quelques études spécifiques concernant l'effet des forces tangentielles et des harmoniques de courants rotoriques. Dans ce contexte d'améliorer les comportements vibratoires de la machine, on a cherché un algorithme d'optimisation rapide et suffisamment précis, même avec des critères harmoniques. Il sera finalement appliqué sur le modèle de la machine pour vérifier la validité de l'optimisation. Cet algorithme est utilisé pour améliorer le niveau et la qualité du couple de la machine. Il est utilisé également pour optimiser la machine sur des critères inhabituels : les harmoniques de pressions magnétiques.

Le but des différentes études sur le sujet est de mieux connaître les origines du bruit et des vibrations provenant des phénomènes électromagnétiques afin de pouvoir les contenir à des niveaux acceptables. Le niveau de bruit, pour le confort des usagers et les vibrations, pour la durée de vie, sont des critères de plus en plus présents dans les systèmes embarqués comme les transports terrestres ou maritimes.

Les études réalisées dans cette thèse sont orientées vibro-acoustique. Dans ce domaine, les incertitudes sont souvent négligées, ou grossièrement prises en compte à l'aide de coefficients de sécurité importants. Dans ce sens, nous présentons et appliquons dans le chapitre 4 une méthode de prise en compte de la variabilité dans le calcul vibratoire. Cette méthode est basée sur une hypothèse mécanique : la stabilité de déformation modale. L'impact de la variabilité des propriétés de matériau sur la variabilité du comportement vibratoire est étudiée. Cela consiste à évaluer les variables de sorties (fréquences propres et la réponse en fréquence) par rapport aux variables d'entrées (les propriétés des matériau : modules de Young, coefficient de Poisson, masse volumique).

Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

Bibliographie

[ALG70] P. L. Alger, "The Nature of induction Machines", 2nd edition, Gordon and Breach Publishers, New-York, London, Paris, 1970.

[BEL04] A. Belahcen, "Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines," Thèse de Doctorat, Helsinki U.T., 27 Aug. 2004.

[BEL91] M. Belmans, Dirk Verdyck, Willy Geysen, and Raymond D. Findlay, "Electro-Mechanical Analysis of the Audible Noise of an Inverter-Fed Squirrel-Cage Induction Motor", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 27, No. 3, pp. 539-544, March 1991.

[BEL99] A. Belahcen, A. Arkkio, P. Klinge, J. Linjama, V. Voutilainen, J. Westerlund, "Radial forces calculation in a synchronous generator for noise analysis", Chinese International Conference on Electrical Machines, CICEM'99, 29-31 August 1999, Xi'an, China. pp. 119-122.

[BEN93] M. Benbouzid, G. Reyne, S. Dérou et A. Foggia, "Finite Element Modelling of a synchronous Machine : Electromagnetic Forces and Modes Shapes", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 2014-2018, March 1993.

[BER11] L. Bernard, X. Mininger, L. Daniel, G. Krebs, F. Bouillault, and M. Gabsi, "Effect of Stress on Switched Reluctance Motors : A Magneto-Elastic Finite-Element Approach Based on Multiscale Constitutive Laws", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 47, No. 9, September 2011.

[BES07] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet and P. Brochet, "Multiobjective optimization of the induction machine with minimization of audible electromagnetic noise", In Proc. of EPJ AP, No. 39, pp. 101-107, 2007.

[BES09a] J. Le Besnerais, "Reduction Of Magnetic Noise In PWM-Supplied Induction Machines -Low-Noise Design Rules And Multi-Objective Optimisation", Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lille, 2009.

[BES09b] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, R. Romary, and P. Brochet, "Optimal Slot Opening Width for Magnetic Noise Reduction in Induction Motors", IEEE Transactions On Energy Conversion, Vol. 24, No. 4, pp. 869-874, 2009.

[BES09c] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, G. Friedrich and P. Brochet, "Characterisation of radial vibration force and vibration behaviour of pulse-width modulation-fed fractional-slot induction machine", IET, Electric Power Applications, Vol. 3, No. 3, pp. 197-208, May 2009.

[BES09d] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet and P. Brochet, "Optimal Slot Numbers for Magnetic Noise Reduction in Variable-Speed Induction Motors", IEEE Trans on Magn., Vol. 45, No. 8, pp. 3131-3136, Aug. 2009.

[BES10] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, G. Friedrich and P. Brochet, "Predection of audible magnetic noise radiated by adjustable speed induction machines", IEEE Trans. on Ind. Appl., Vol. 46, No. 4, pp. 1367-1373, August 2010.

[BRU97] J.F. Brudny, "Modelisation de la denture des machines asynchrones : phénomènes de résonances", Journal of physics III, Vol. 37, No. 7, pp. 1009-1023, 1997.

[BÖS10] M. Bösing, T. Schoenen, K. A. Kasper, and R. W. De Doncker, "Vibration Synthesis for Electrical Machines Based on Force Response Superpositon", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 46, No. 8, pp. 2986-2989, August 2010.

[DEL01] K. Delaere, W. Heylen, R. Belmans, and K. Hameyer, "Strong magneto-mechanical FE coupling using local magnetostriction forces", European physical journal applied physics, pp. 119-119, 2001.

[FAK14] M. Fakam, M. Hecquet, V. Lanfranchi, "Design and magnetic noise reduction ef the surface permanent magnet synchronous machine", Actes du congrès : Ninth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER), 2014

[FON10] K. Fonteyn, A. Belahcen, R. Kouhia, P. Rasilo, and A. Arkkio. "FEM for Directly Coupled Magneto-Mechanical Phenomena in Electrical Machines", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 46, No. 8, pp. 2923-2926, August 2010.

[GIE05] J. F. Gieras, C. Wang, J. C. Lai, "Noise of polyphase Electric Machines", CRC Press 2005, ISBN-10 : 0824723813.

[HAM05] Amine Ait-Hammouda, "Pré-dimensionnement et étude de sensibilité vibro-acoustique de machines à courant alternatif et vitesse variable", Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lille, Mai 2005.

[HEN04] F. Henrotte and K. Hameyer, "Computation of electromagnetic force densities : Maxwell stress tensor vs virtual work principle" Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 168, pp. 235-243, 2004.

[HEN10] F. Henrotte, M. Felden, M. vander Giet and K. Hameyer, "Electromagnetic force computation with Eggshell method", In proceeding of the 14th international Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, IGTE, pp. 65, September 2010.

[JOR50] H. Jordan, "GerÄauscharme Elektromotoren", W. Girardet, Essen, 1950.

[KOB97] Takashi Kobayashi, Fumio Tajimi, "Effects of Slot Combination On Acoustic Noise From Induction Motors", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No. 2, pp. 2102-2104, March 1997.

[LEC04] J.P. Lecointe, R. Romary, J.F. Brudny and T. Czapla, "Five methods of stator natural frequency determination : case of induction and switched reluctance machines", Journal of Mechanical and Signal Processing, Vol. 18, 2004.

[MOO65] Christopher John Moore, "The Measurement and Calculation of Acoustic Noise Radiated by Small Electrical Machines", Thèse de Doctorat de l'université de Londres, 1965.

[PEL10] P. Pellerey, V. Lanfranchi, and G. Friedrich, "Influence of the load angle on the magnetic pressure harmonic content of a WRSM", 36th Annual

Conference on IEEE Industrial Electronics Society IECON'2010, pp. 883-888, 2010.

[PEL11] P. Pellerey, V. Lanfranchi, and G. Friedrich, " Vibratory Simulation Tool For an Electromagnetically Excited non Skewed Electrical Motor. Case of the WRSM", ELECTRIMACS2011, 6-8th june 2011.

[PEL12] Pierre Pellerey, "Etude et optimisation du comportement vibro-acoustique des machines electriques, application au domaine automobile, thèse de doctorat", Université de technologie de Compiègne, 2012

[PEL12a] P. Pellerey, V. Lanfranchi, and G. Friedrich, "Numerical Simulation of Rotor Dynamic Eccentricity Effects on Synchronous Machine Vibrations for Full Run Up", XXth International Conference on Electrical Machines ICEM'2012, pp. 3008-3014, 2012.

[PEL12b] P. Pellerey, G. Favennac, V. Lanfranchi, and G. Friedrich, "Active reduction of electrical machines magnetic noise by the control of low frequency current harmonics", 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society IECON'2012, pp. 1654-1659, 2012.

[RAI10] S. Rainer, O. Biro, B. Weilharter, and A. Stermecki, "Weak Coupling Between Electromagnetic and Structural Models for Electrical Machines", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 46, No. 8, pp. 2807-2810, August 2010.

[SCH05] C. Schlensok, M. Herranz and K. Hameyer, "Structure dynamic simulation of an induction machine with eccentrically positioned squirrel cage rotor", In Proc of ISEP 2005, Sept. 2005.

[SCH06a] C. Schlensok, D. van Riesen, T. Küest, and G. Henneberger, "Acoustic Simulation of an Induction Machine with Squirrel-Cage Rotor", COMPEL, Vol. 25, No. 2, pp. 475-486, 2006.

[SCH06b] C. Schlensok, B. Schmülling, M. Van Der Giet, and K. Hameyer, "Electromagnetically excited audible noise - evaluation and optimisation of electrical machines by numerical simulation", Electrical Power Quality and Utilisation Journal. Vol. XII, No. 2, 2006

[TIM89] P.L Timar, A. Fazekas, J. Kiss, A. Miklos, ans S.J. Yang, "Noise and vibration of electrical machines", Elsevier Science, 1989, ISBN-10 : 0444988963.

[VAN08] M. Van Der Giet, C. Schlensok, B. Schmülling and Kay Hameyer, "Comparison of 2D and 3D Coupled Electromagnetic and Structure-Dynamic Simulation of Electrical Machines", IEEE Transcations on Magnetics, Vol. 44, No. 6, pp. 1594-1597, June 2008.

[VIV04] S. Vivier, A. Ait-Hammouda, M. Hecquet, B. Napame, P. Brochet, A. Randria, "Vibro-acoustic Optimization of Permanent Magnet Synchronous Machine Using The Experimentale Design Method", In Proc. of the Conference on Electrical Machines ICEM'04, pp. 101-114, 2004.

[YAN81] S. J. Yang, "Low Noise Electrical Motors", Clarendon Press 1981, Oxford University, Now York, ISBN-10 : 0198593325.

Chapitre 2

Modélisation multi-physique : couplage électromagnétique-vibratoire dans une machine électrique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à construire et à étudier un modèle multi-physique, électromagnétique-vibratoire, pertinent d'une machine électrique. Ce modèle doit servir à calculer le comportement vibratoire d'origine électromagnétique de la machine étudiée. Cette problématique complexe nécessitent une synthèse des phénomènes physiques très différents et des approches de modélisation très différentes. La modélisation électromagnétique est généralement une modélisation 2D dans le domaine temporel, avec une grande finesse de modélisation de l'entrefer. Le modèle de la structure mécanique doit tenir compte de l'ensemble de la structure, le plus souvent dans le domaine fréquentiel, avec un faible niveau de précision géométrique. Notre objectif est d'aboutir à un modèle reprenant les deux approches, électromagnétique et mécanique, avec des temps de calculs raisonnables et une précision satisfaisante.

Dans un premier temps, il est nécessaire de définir les données partagées entre les deux modèles. Le modèle de la structure mécanique nécessite des efforts d'excitations, c'est-à-dire les champs d'efforts au niveau de l'entrefer. Ces données n'étaient pas forcément directement disponibles en sortie de la modélisation électromagnétique pour des outils du commerce au début des travaux sur cette thématique au LEC. En effet, ceux-ci s'intéressaient principalement au couple électromagnétique moteur et aux pertes. Ce problème a toutefois été investigué dans plusieurs études [BES09, PEL12].

L'une des difficultés est de mettre en cohérence les tailles de modélisation. La modélisation électromagnétique nécessite une modélisation fine de l'entrefer, de l'ordre du dixième de millimètre et plus "grossière" sur l'ensemble de la culasse. La modélisation de la structure mécanique est une modélisation plus homogène sur l'ensemble de la structure avec des tailles de maille de l'ordre de la dizaine de millimètres.

Une autre difficulté est liée aux types de méthode de résolution : L'une se fait dans le domaine temporel en électromagnétique et l'autre dans le domaine fréquentiel, souvent par une technique de superposition modale, pour la mécanique. Ceci nécessite un outil de couplage multi-physique avec passage du domaine temporel au domaine fréquentiel avec transfert de champs entre les maillages électromagnétique et mécanique.

Dans le but de comprendre ces résultats éléments finis, nous décrivons tout d'abord les lois physiques principales à l'aide d'un modèle analytique de pressions magnétiques d'une machine synchrone. Ce modèle analytique sert à expliciter l'origine des harmoniques vibratoires de cette machine. Ensuite, nous présentons et discutons quelques méthodes de calcul des efforts magnétiques avec les hypothèses retenues. Une méthode est retenue pour réaliser le calcul des pressions magnétiques de la machine électrique. Ces calculs sont à réaliser sous un logiciel éléments finis (EF) électromagnétique que l'on présenter.

Les formulations physiques concernant le calcul vibratoire sont présentées. Nous insisterons sur la compréhension de la physique des vibrations et en particulier à la notion de réponse en fréquences sur des modes propres du stator. On peut en effet montrer que la réponse vibratoire d'une structure mécanique peut être représentée par un nombre discret de modes propres. Ces calculs sont à réaliser sous un logiciel éléments finis (EF) mécanique qui ne sera pas identique (2D, 3D, finesse du maillage, parties modélisées...) au modèle électromagnétique.

Afin d'établir le couplage entre ce deux modèles EF électromagnétique et mécanique vibratoire, un outil de couplage sera implémenté dans Matlab. Les pressions magnétiques calculées sur le modèle électromagnétique sont projetées sur le modèle mécanique. La méthode de projection et deux critères d'évaluation sont présentés. Dans cet outil, l'utilisateur peut définir et faire varier les paramètres de calcul électromagnétique et vibratoire. Le résultat final de cet outil aboutira à la courbe de réponse en fréquence de la structure mécanique soumise à la pression magnétique. La méthodologie qui vient d'être expliquer va pouvoir être appliquer à une machine réaliste qui sera une machine synchrone à rotor bobiné.

Dans le même esprit, le modèle électromagnétique de la machine sera présenté et étudié. Quelques études détaillées concernant la méthode de calcul sont également présentées. Nous étudions ensuite les pressions magnétiques radiales et tangentielles, et leurs transformations de Fourier bidimensionnelle.

Le modèle mécanique de cette machine sera présenté et étudié. les choix de modélisation de ce modèle sur une géométrie simplifiée, son maillage, l'intégration du bobinage aboutissent au modes propres de la structure mécanique. Ces choix ont été validés expérimentalement.

En utilisant l'outil de couplage, nous réalisons quelques calculs de réponse en fréquence de la structure mécanique chargée par les pressions magnétiques. Une montée en vitesse du moteur sert à tracer un spectrogramme vibratoire. Ce spectrogramme sera analysé en faisant varier quelques paramètres du modèle.

2.2 Induction et pression magnétique

Cette partie, en plus de rappeler la physique de l'induction magnétique dans une machine électrique, permet d'expliciter la génération des "harmoniques" d'excitations.

2.2.1 Généralités sur l'induction magnétique

Nous prenons un cas élémentaire du champ magnétique créé par une spire unique dans deux encoches statoriques diamétralement opposées et parcourue par un courant i constant (figure 2.1).

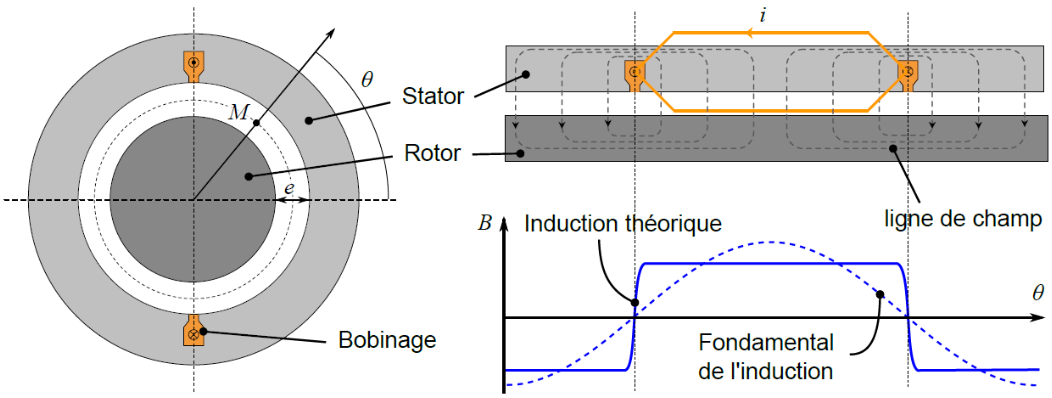


FIGURE 2.1 – Allure de l'induction magnétique crée dans l'entrefer par un bobinage statorique à pas diamétral

Selon la loi d'Ampère, la circulation $\overrightarrow{H}$ sur un contour fermé C défini par une ligne de champ sur la figure 2.1 est égale à la somme algébrique des courants enlacés :

$$\oint_C \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} = \sum i \Leftrightarrow H = \frac{i}{2e} \tag{2.1}$$

où H est le champ d'excitation magnétique et e l'épaisseur d'entrefer. La force magnéto-motrice (f.m.m.) ε produite en face de la spire a donc pour amplitude :

$$\varepsilon = He = \frac{i}{2} \tag{2.2}$$

Or, la perméance surfacique de l'entrefer est égale à :

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{e} \tag{2.3}$$

μ_0 étant la perméabilité du vide. L'amplitude de l'induction magnétique dans l'entrefer pour une spire de forme quasi rectangulaire est :

$$B = \varepsilon\Lambda = \frac{\mu_0}{2e} \tag{2.4}$$

Cette induction créée par une spire n'est pas sinusoïdale, elle comporte des harmoniques que l'on exprime en décomposant cette fonction en série de Fourier :

$$B(\theta) = \frac{2\mu_0 i}{\pi e}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}cos\left[(2m-1)\theta\right] \tag{2.5}$$

Nous considérons maintenant le champ créé au stator par un bobinage triphasé constitué de trois bobines identiques a, b et c, comprenant N spires, décalées entre elles de $\frac{2\pi}{3}$ radians et alimentées par les courants sinusoïdaux suivants :

$$\begin{cases} i_a = I\sqrt{2}cos(\omega t) \\ i_b = I\sqrt{2}cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ i_a = I\sqrt{2}cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \tag{2.6}$$

où ω est la pulsation des courants et I la valeur efficace des courants.

D'après l'équation 2.5 et en ne considérant que le fondamental, on obtient l'induction magnétique crée le long de l'entrefer pouvant s'écrire :

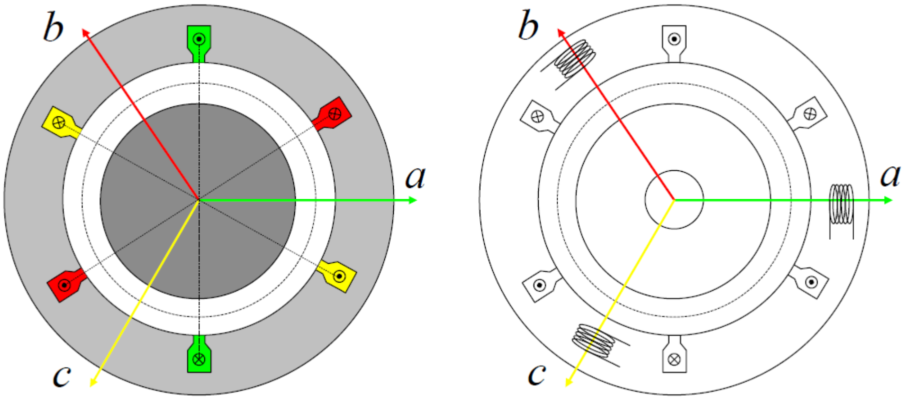


FIGURE 2.2 – Bobinage statorique triphasé à pas diamétral

$$\begin{cases} B_a = B_f cos(\omega t) cos(\theta) \\ B_b = B_f cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ B_c = B_f cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \tag{2.7}$$

où $B_f = kI\sqrt{2}$ et $k = \frac{2\mu_0 N}{\pi e}$.
En utilisant les formules trigonométriques classiques, nous obtenons :

$$\begin{cases} B_a = \frac{kI}{\sqrt{2}} \left[cos(\theta - \omega t) + cos(\theta + \omega t)\right] \\ B_b = \frac{kI}{\sqrt{2}} \left[cos(\theta - \omega t) + cos(\theta + \omega t - \frac{4\pi}{3})\right] \\ B_c = \frac{kI}{\sqrt{2}} \left[cos(\theta - \omega t) + cos(\theta + \omega t - \frac{2\pi}{3})\right] \end{cases} \tag{2.8}$$

L'équation 2.8 montre l'apparition d'un champ direct tournant à la vitesse ω et d'un champ indirect tournant à la vitesse $-\omega$, d'où une onde pulsante générée par chaque bobine.

L'induction résultante est la somme des inductions générées par chaque phase :

$$B = B_a + B_b + B_c \tag{2.9}$$

d'où

$$B = B_{max} cos(\theta - \omega t) \tag{2.10}$$

où $B_{max} = \frac{3}{2} kI\sqrt{2} = \frac{3\mu_0}{\pi e} NI\sqrt{2}$.

Le champ d'induction résultant est donc réparti de façon sinusoïdale dans l'entrefer avec une amplitude B_{max} supérieure à celle créée par une spire unique et tournant à une vitesse ω rad/s.

Ce théorème du champ tournant est appelé théorème de Ferraris. Ce théorème a été établie à la même période par Galileo Ferraris et Nikola Tesla [SAI01].

Dans le cas d'un moteur multipolaire à $2p$ pôles nous avons :

$$B = B_{max} cos(p\theta - \omega t) \tag{2.11}$$

soit une onde magnétique à p périodes le long de la circonférence et se déplaçant à la vitesse mécanique $\frac{\omega}{p}$.

2.2.2 Force magnétomotrice

Dans la section précédente, on a montré que la f.m.m. générée par une spire à pas diamétral constituée de N spires et parcourue par un courant i était quasi rectangulaire et d'amplitude $N \times i/2$ [Ampères.tours] (équation 2.2).

Nous étudions maintenant la f.m.m. générée par un bobinage réparti formé de N spires en séries. Cette répartition génère une f.m.m. en escaliers avec une forme d'onde plus proche de son fondamental (fig 2.3).

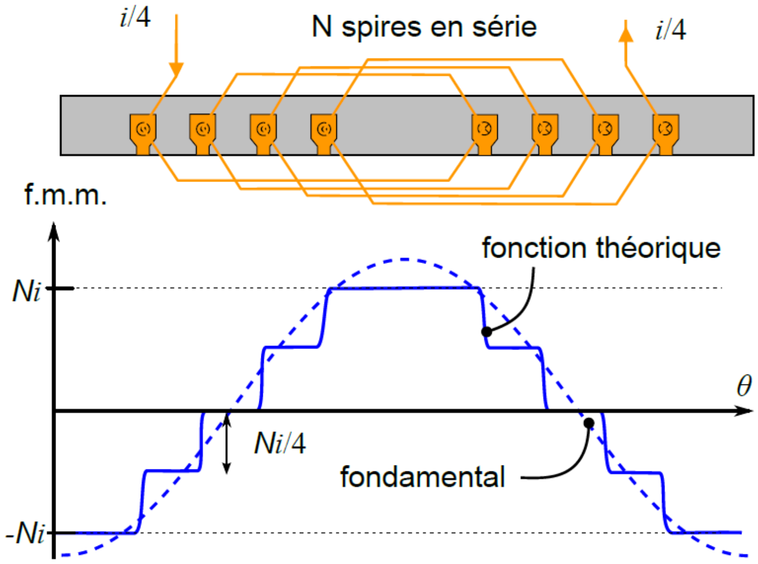


FIGURE 2.3 – Force magnétomotrice générée par un enroulement réparti sur une machine à une paire de pôle

D'après [SAI01, SEG06], la décomposition en série de Fourrier d'une f.m.m. générée par une phase parcourue par un courant i sinusoïdal et répartie selon plusieurs encoches s'exprime comme :

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{N \times I\sqrt{2} \times Z_S}{6p\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_{b(2m+1)}}{(2m+1)} cos\left[(2m+1)p\theta\right] cos(\omega t) \tag{2.12}$$

où p est le nombre de paires de pôles, Z_S est le nombre d'encoches au stator (on peut noter $N_{epp} = \frac{Z_S}{6p}$ le nombre d'encoches par pôle et par phase).

Le coefficient de bobinage pour l'harmonique d'ordre m est défini par :

$$k_{bm} = k_{dm} k_{rm} \tag{2.13}$$

avec la contribution du facteur de distribution du bobinage pour l'harmonique d'ordre m :

$$k_{dm} = \frac{sin(m\frac{\pi}{6})}{\frac{Z_S}{6p} sin(m\frac{p\pi}{Z_S})} \tag{2.14}$$

et celle du raccourcissement du bobinage pour l'harmonique spatial d'ordre m :

$$k_{rm} = sin(\frac{m\beta\pi}{2}) \tag{2.15}$$

avec β = pas de bobinages / pas diamétral ($\beta = 1$ dans le cas d'un bobinage diamétral).

Nous pouvons remarquer qu'en augmentant le nombre d'encoches par pôle et par phase N_{epp}, on peut améliorer le contenu harmonique de la f.m.m. Par contre cette amélioration tend vers une forme d'onde triangulaire et non sinusoïdale. En fait, l'augmentation du nombre de phases va permettre de rendre sinusoïdale l'induction d'entrefer.

En faisant tendre vers l'infini le nombre d'encoches au stator pour un nombre de phases donné (N_{epp}), on montre que les premiers coefficients de bobinage tendent vers les valeurs suivantes :

$$\lim_{z_S \to \infty} k_{d,m=1} = \frac{3}{\pi} \simeq 0.9549 \tag{2.16}$$

$$\lim_{z_S \to \infty} k_{d,m=5} = \frac{3}{5\pi} \simeq 0.1910 \tag{2.17}$$

$$\lim_{z_S \to \infty} k_{d,m=7} = \frac{3}{7\pi} \simeq 0.1364 \tag{2.18}$$

Nous remarquons que le fondamental $k_{d,m=1}$ ne tend pas vers 1 et que les coefficients harmoniques ne tendent pas vers 0, ce qui est normal parce qu'on calcule les coefficients de Fourier d'une fonction triangle et non sinus. Malgré tout, l'augmentation de la valeur de N_{epp} est un facteur positif pour améliorer la qualité harmonique de la f.m.m. générée. On considère maintenant une machine synchrone à rotor bobiné (MSRB), la force magnétomotrice totale, au niveau de l'entrefer ε_{tot}, est égale à la somme de la f.m.m. statorique ε_s et rotorique ε_r :

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_s + \varepsilon_r \tag{2.19}$$

En se basant sur les études [LIW46, PYR08, SAI01, SEG06, PEL12], nous présentons directement les résultats de développements. La f.m.m. générée par le stator, dans le cas d'une machine triphasée à bobinage réparti avec des courants harmoniques, peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_s(\theta, t) = \sum_{m_s^\varepsilon=1,5,7,...}^{\infty} \sum_{n_i=1,5,7,...}^{\infty} \varepsilon^S_{m_S^\varepsilon, n_i} cos(m_S^\varepsilon p\theta \pm n_i\omega t + \phi_n^i) \tag{2.20}$$

avec m_S^ε l'harmonique d'espace, n_i le rang de l'harmonique temporel du courant et ϕ_n^i la phase associée.

La f.m.m. trapézoïdale générée par le rotor, dans le cas d'une machine à rotor bobiné alimenté par un courant continu, s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_r(\theta, t) = \sum_{m_r^\varepsilon=1,5,7,...}^{\infty} \varepsilon^r_m cos(m_r^\varepsilon(p\theta - \omega t) + \phi_r) \tag{2.21}$$

avec m_r^ε l'ordre spatial de f.m.m. rotorique et ϕ_r la phase associée. Finalement la f.m.m. totale s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{tot}(\theta,t) = \sum_{m_S^\varepsilon=1,5,7,\ldots}^{\infty} \sum_{n_i=1,5,7,\ldots}^{\infty} \varepsilon^S_{m_S^\varepsilon,n_i} cos(m_s^\varepsilon p\theta \pm n_i\omega t + \phi_n^i) + \sum_{m_r^\varepsilon=1,5,7,\ldots}^{\infty} \varepsilon^r_m cos(m_r^\varepsilon(p\theta - \omega t) + \phi_r) \tag{2.22}$$

Cette formule nous montre que la forme de l'onde de la force magnétomotrice contient une grande quantité d'harmoniques. Tenter de rendre sinusoïdale cette forme d'onde est un moyen de réduire les harmoniques d'induction présents dans l'entrefer.

2.2.3 Perméance

Afin d'expliquer physiquement ce qu'est la perméance magnétique d'un circuit magnétique, on présente l'analogie d'Hopkinson. Cette analogie consiste à faire le parallèle entre les grandeurs magnétiques et électriques comme explicité au tableau 2.1.

Électrique		Magnétique	
U	tension $[V]$	ε	f.m.m. $[A.t]$
I	courant $[A]$	ϕ	flux $[Wb]$
R	résistance $[\Omega]$	R	réluctance $[H^{-1}]$
$G = \frac{1}{R}$	conductance $[\Omega^{-1}]$	$\eta = \frac{1}{R}$	perméance $[H]$

Tableau 2.1 – Analogies d'Hopkinson

Ainsi, la loi d'Ohm devient la loi d'Hopkinson : $U = RI \Leftrightarrow \varepsilon = \phi R$. On retrouve alors que l'induction magnétique $B = \frac{\phi}{S}$ est le produit de la perméance surfacique $\Lambda = \frac{\eta}{S}$ et de la force magnétomotrice ε :

$$B = \Lambda \times \varepsilon \tag{2.23}$$

En réalité, la perméance est liée à la force magnétomotrice. Cette relation est considérée linéaire.

En se référant à [PEL12, SAI01, YAN81, TIM89, LIW46] pour le calcul de perméance statorique, et à la méthode de transformation de type Scharwz-Christoffel et [ZHU02, ZAR06] pour le calcul de perméance rotorique, on obtient une perméance totale d'entrefer d'une MSRB de la forme :

$$\Lambda_{tot}(\theta,t) = \sum_{m_s^\Lambda=1,2,3,\ldots,m_r^\Lambda=0,2,4,\ldots}^{\infty} \Lambda^{s,r}_{m^\Lambda} cos\left[(m_s^\Lambda Z_s \pm m_r^\Lambda p)\theta \pm m_r^\Lambda p\Omega t + \varphi_r\right] \tag{2.24}$$

où m_s^Λ et m_r^Λ sont respectivement les ordres spatiaux des perméances statoriques et rotoriques et φ_r est la phase entre ces deux perméances.

2.2.4 Induction d'entrefer

L'induction magnétique B est le produit de la force magnétomotrice f.m.m. ε par la perméance surfacique Λ. D'après les deux parties précédentes, les inductions magnétiques statorique et rotorique peuvent s'exprimer de la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
B_{tot}(\theta,t) &= \varepsilon_{tot}(\theta,t) \times \Lambda_{tot}(\theta,t) \\
&= \varepsilon_s(\theta,t) \times \Lambda_s(\theta,t) + \varepsilon_r(\theta,t) \times \Lambda_r(\theta,t) \\
&= B_s(\theta,t) + B_r(\theta,t)
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

où B_s est l'induction créée dans l'entrefer en l'absence d'excitation d'inducteur (fonctionnement en réluctance variable), et B_r est l'induction générée par le rotor dans l'entrefer pour des bobines statoriques sans circulation de courant (fonctionnement à vide). En développant l'équation 2.25 on obtient :

$$
B_{tot}(\theta,t) = \sum_{m',m",n',n"}^{\infty} B^s_{m',n'} cos(m'\theta \pm n'\omega t + \phi') + B^s_{m",n"} cos(m"\theta \pm n"\omega t + \phi") \tag{2.26}
$$

Les harmoniques spatio-temporels dans un stator est caractérisés par :

$$
m' = p(m_s^{\varepsilon} \pm m_r^{\Lambda}) \pm m_s^{\Lambda} Z_s, \qquad n' = n_i \pm m_r^{\Lambda}, \qquad \phi' = \varphi_r
$$

et pour l'influence du rotor :

$$
m" = p(m_r^{\varepsilon} \pm m_r^{\Lambda}) \pm m_s^{\Lambda} Z_s, \qquad n" = m_r^{\varepsilon} \pm m_r^{\Lambda}, \qquad \phi" = \phi_r \pm \varphi_r
$$

Dans le contenu harmonique de l'induction d'entrefer, on retrouve la contribution de deux grandes familles d'harmoniques :

- Les harmoniques d'espace d'ordre $(m', m")$ contiennent les phénomènes liées à la distribution discrète des bobinages et des encoches. Plus généralement, la géométrie des parties magnétiques, la saturation résultant d'un phénomène local non linéaire déformant le circuit magnétique et les possibles dissymétries de construction (excentricités, ovalisations du stator, bobinage imparfait, ...) sont à l'origine des harmoniques d'espace.
- Les harmoniques temporels de rang $(n', n")$ matérialisent le fait que les courants (rotorique ou statorique) ne soient ni sinusoïdaux ni parfaitement équilibrées, ni parfaitement constants pour l'inducteur.

2.3 Calcul des efforts magnétiques

La connaissance approfondie des efforts magnétiques présents au sein du moteur est un point essentiel dans la compréhension des phénomènes vibro-acoustiques puisqu'ils en sont pour une part la source. Différentes méthodes permettent de calculer les densités de forces magnétiques et ne donnent pas nécessairement les mêmes résultats. Dans cette section nous explicitons ces différentes approches avec leurs particularités pour, au final, justifier la méthode retenue.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les densités de force exercées sur un solide soumis à un champ électromagnétique. En théorie, ces méthodes doivent donner une force résultante identique [REN97], néanmoins dans l'état de l'art, les résultats de simulations numériques obtenus sont différents selon les méthodes employées pour le calcul des forces résultantes. Parmi toutes les méthodes utilisées pour le calcul de la force globale, il y a un consensus scientifique sur la méthode qui utilise le principe des travaux virtuels [COU83].

Contrairement aux méthodes qui servent à calculer la force globale appliquée sur un solide indéformable où le choix est facile et sûr (travaux virtuels), le choix d'une méthode pour calculer la distribution de force (force locale) est bien plus difficile. En fait, il n'existe pas de méthode de référence, ce qui est accentué par le fait qu'il est impossible de mesurer la répartition de ces forces. Néanmoins, il existe plusieurs méthodes pour calculer les forces locales [REN97, BAR03] :

– les méthodes s'appuyant sur des modèles de charges équivalentes : masses magnétiques équivalentes ou courants équivalents,
– les méthodes de la dérivée de l'énergie magnétique,
– la méthode basée sur le principe des travaux virtuels locaux,
– la méthode utilisant le tenseur de Maxwell.

Toutes ces méthodes vont être appliquées dans l'entrefer qui est caractérisé par la variation de perméabilité des milieux. La figure 2.4 présente deux régions : la région en bleu est un matériau ferromagnétique de perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$, et une région représentative de l'air (ou du vide) de perméabilité μ_0. Le vecteur n est le vecteur unitaire normal sur la surface de séparation des deux régions sortant de la région ferromagnétique (en bleu). Nous sommes intéressés à la force sur la surface de séparation de ces deux régions.

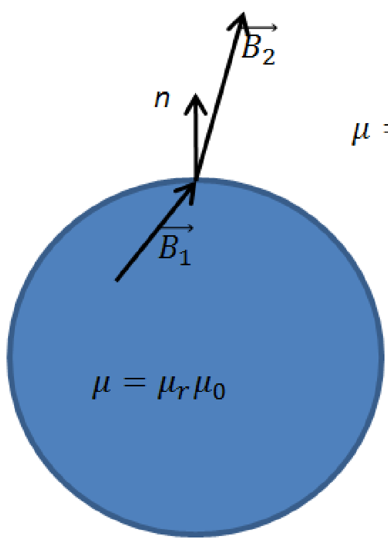


FIGURE 2.4 – Région d'un matériau ferromagnétique et une ligne de champ

2.3.1 Méthodes basées sur les sources équivalentes

L'idée des méthodes de calcul des forces locales à l'aide des sources équivalentes est de remplacer la région du matériau magnétique par des distributions volumiques et/ou surfaciques de source de champ. Le matériau magnétique de la région ferromagnétique est remplacé par un matériau amagnétique, de perméabilité μ_0. Lors de ce remplacement, le champ et l'induction magnétique produits par ces modèles équivalents restent les mêmes à l'extérieur de la région ferromagnétique, contrairement à l'intérieur où l'induction ou le champ sont modifiés.

Les sources de champ pour ces méthodes sont les courants, les masses magnétiques ou bien la combinaison des deux.

Méthode des courants équivalents

Comme il a été déjà mentionné, cette méthode consiste à remplacer la région ferromagnétique par une distribution de courants équivalents. Pour illustrer la méthode graphiquement, la figure 2.5 nous montre les courants surfaciques et volumiques équivalents. Le premier cylindre de la figure 2.5 est parcouru par des courants surfaciques, et le deuxième contient des courants volumiques. Ces deux types de courants engendrent la même répartition spatiale de champ que celle obtenue par la perméabilité réelle.

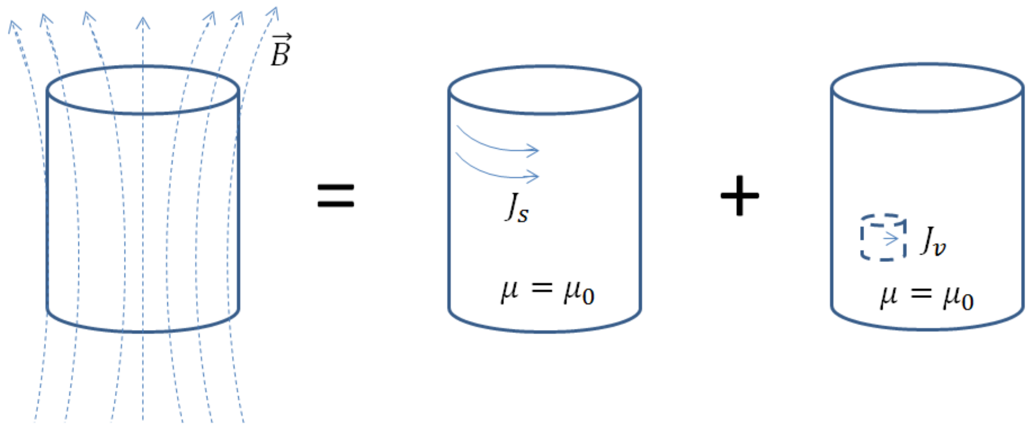


FIGURE 2.5 – Courants équivalents dans un matériau ferromagnétique

Lorsque le champ magnétique est calculé avec ces distributions de courant, l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$ obtenue dans les régions ferromagnétique et vide restent inchangée. Par contre, le champ magnétique $\overrightarrow{H_1}$ dans la région ferromagnétique se modifie.

La formulation finale de force magnétique peut s'exprimer par la suivante :

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\mu_0(\mu_r^2 - 1)H_t^2\overrightarrow{n} + (1 - \mu_r)H_t B_n \overrightarrow{t} \tag{2.27}$$

où $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{t}$ sont les vecteurs normal et tangentiel sur la surface qui sépare la région ferromagnétique et la région vide. Il est inutile de faire apparaître les indices 1 ou 2 pour H_t et B_n car ces entités se conservent lors du changement de milieu.

Méthode des masses magnétiques équivalentes

De la même manière que la modification de la répartition spatiale du champ magnétique a été assimilée à une circulation de courant, on considère des masses magnétiques équivalentes qui engendrent les même effets. Ces masses sont surfaciques et volumiques.

On remplace alors la région ferromagnétique de perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$ par une région de perméabilité μ_0 avec une distribution de masses magnétiques équivalentes (surfaciques et volumiques). Par analogie aux charges électriques en électrostatique, les masses magnétiques sont aussi appelées charges magnétiques. L'équation de Maxwell-Gauss, dans laquelle une charge électrostatique produit un champ électrique dont la divergence est non nulle, est utilisée comme modèle :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.28}$$

où $\overrightarrow{E}$ est le champ électrique, ρ est la charge électrostatique et ε_0 la permittivité diélectrique du vide.

La masse magnétique est alors associée au champ magnétique et conserve une similitude avec l'équation 2.28 :

$$\frac{\rho_m}{\mu} = div(\overrightarrow{H}) \tag{2.29}$$

Lorsque l'induction est calculée avec ces distributions de courant, le champ magnétique $\overrightarrow{H}$ obtenu dans les régions ferromagnétique et vide reste inchangé. Par contre, le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ dans la région ferromagnétique change.

L'expression finale de la force magnétique calculée par la méthode de masses équivalentes est :

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(1 - \frac{1}{\mu_r^2})B_n^2\overrightarrow{n} + (1 - \frac{1}{\mu_r})H_t B_n \overrightarrow{t} \tag{2.30}$$

Dans la partie suivante, on présentera la méthode basée sur des masses et des courants surfaciques.

Méthode des masses et des courants surfaciques

Cette méthode propose de créer des sources équivalentes surfaciques. En fait, les courants surfaciques et les masses magnétiques surfaciques permettent de prendre en compte la discontinuité respectivement de $\overrightarrow{B_t}$ et de $\overrightarrow{H_n}$. L'absence de sources volumiques impose aux sources surfaciques de générer la totalité du champ. Les masses magnétiques surfaciques et les courants surfaciques vont générer respectivement $\overrightarrow{H_n}$ et de $\overrightarrow{B_t}$ [CAR59, SAD93].

La formulation finale de la force en utilisant cette méthode est :

$$\overrightarrow{F} = (\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B_n^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_t^2)\overrightarrow{n} + H_t B_n \overrightarrow{t} \tag{2.31}$$

Les trois méthodes présentées, même si elles sont basées sur le principe de sources équivalentes, donnent des résultats différents. On présente par la suite les méthodes basées sur l'énergie magnétique.

2.3.2 Méthodes de la dérivée de l'énergie magnétique

Les méthodes de la dérivée de l'énergie mécanique sont basées sur le principe de conservation de l'énergie dans un système isolé. Autrement dit, le travail des forces extérieures est égal et opposé à la variation d'énergie de ce système. L'équation suivante présente ce principe :

$$\delta E = -\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\delta l} \tag{2.32}$$

où δE est la variation d'énergie totale, $\overrightarrow{F}$ est la force et $\overrightarrow{\delta l}$ est le déplacement. L'aspect global de cette approche risque de ne pas permettre la description des phénomènes à l'échelle locale.

Il existe plusieurs méthodes avec une approche par dérivation de l'énergie magnétique [BAR03, CAR59, SAD92]. Nous présentons dans cette partie une méthode généraliste [BAR03].

La figure 2.6 présente le système utilisé dans cette partie pour présenter la méthode de la dérivée de l'énergie magnétique. Cette figure présente un système magnétique constitué de deux noyaux ferromagnétiques fixe de longueur infinie suivant y, et d'un parallélépipède mobile du même matériau que les noyau magnétique fixe situées dans l'entrefer entre ces deux parties de noyau magnétique fixe. Ce parallélépipède peut se déplacer librement dans la direction x.

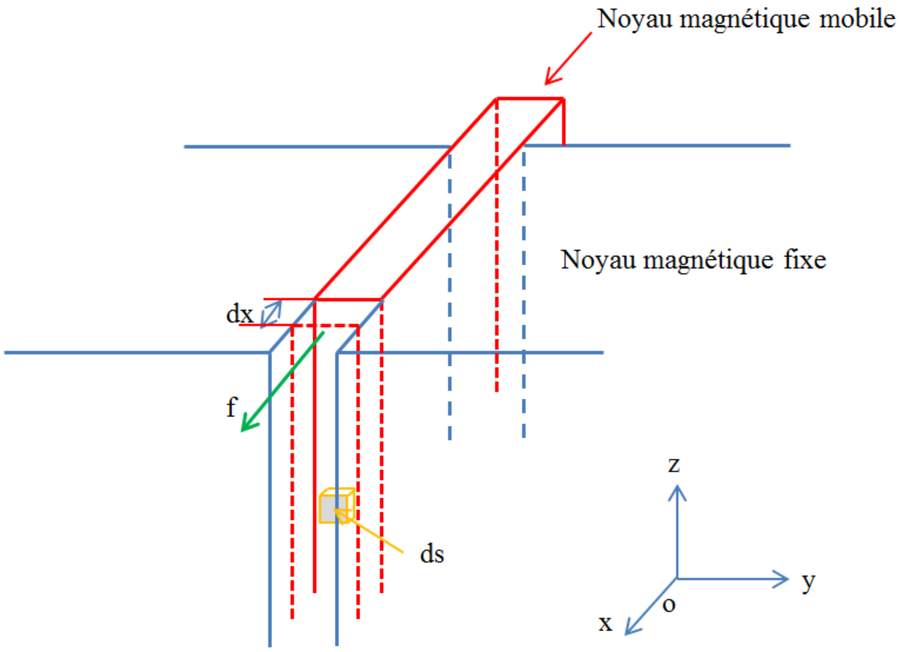


FIGURE 2.6 – Système utilisé pour le calcul de la densité surfacique de force par la méthode de la dérivée de l'énergie

La densité d'énergie magnétique $W_{magnétique}$ s'écrit :

$$W_{magnétique} = \int_{volume} \int_0^B \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dB} \tag{2.33}$$

Selon [BAR03], il a été montré que les forces d'origine magnétique induites par la formulation basée sur la dérivée de l'énergie magnétique sont obligatoirement normales aux surfaces ($\overrightarrow{F_t} = 0$) .

En partant de l'équation 2.33 et en considérant un matériau linéaire, l'énergie magnétique par unité de volume devient :

$$W_{magnétique} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} \tag{2.34}$$

En présence de champ magnétique, ce parallélépipède se déplace jusqu'à remplir entièrement l'entrefer sous l'action des forces magnétiques. Lorsqu'un faible déplacement dx se produit, l'énergie magnétique totale du système se modifie. Cependant, l'énergie magnétique n'est modifiée qu'au voisinage de l'entrefer. Nous pouvons exprimer cette variation d'énergie magnétique $\triangle W_{magnétique}$ du système lors de ce déplacement par l'opposé du travail d'une force $\overrightarrow{F}$ qui s'applique sur le parallélépipède.

$$\triangle W_{magnétique} = - \triangle W_{mécanique} = -\overrightarrow{F}.dx \tag{2.35}$$

Cependant, le volume V (cube élémentaire de surface élémentaire grisée ds) dans la figure 2.6 a vu sa perméabilité passer de μ_2 à μ_1. La variation totale d'énergie magnétique peut être écrire sous la forme suivante :

$$\triangle W_{magnétique} = \int_V \left(\frac{\mu_1 H_1^2}{2} - \frac{\mu_2 H_2^2}{2} \right) dv \tag{2.36}$$

On utilise la fonction 2.35 et on résout l'intégrale de la fonction 2.36 pour obtenir la formule finale de la force magnétique :

$$\overrightarrow{F} = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) B_n^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \left(1 - \mu_r \right) H_t^2 \right] \overrightarrow{n} \tag{2.37}$$

Cette méthode nous donne une force magnétique exclusivement normale.

2.3.3 Méthode des travaux virtuels locaux

Cette méthode est basée sur le principe des travaux virtuels. Elle peut calculer les forces globales mais aussi locales. Elle a été proposée par REN en 1992 [REN92], puis reprise par d'autres comme [GAL07, MED98, CAR12].

En général, selon le principe des travaux virtuels et en se basant sur la loi de conservation de l'énergie dans un système thermodynamique, la variation de l'énergie électrique due à une variation du flux s'équilibre avec la variation de l'énergie magnétique emmagasinée et le travail effectué par la force magnétique sur un déplacement du système [WOO68] :

$$dW_{el} = DW + Fdx \tag{2.38}$$

où W_{el} est l'énergie électrique apportée au système, W est l'énergie magnétique du système, F est la force appliquée sur le système et x est le déplacement du système.

L'énergie électrique s'écrit sous la forme :

$$\delta W_{el} = IU\delta t = I \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \delta t = I \delta \phi \tag{2.39}$$

où I est le courant, U est la tension, ϕ est le flux magnétique et t est le temps. Les équations 2.38 et 2.39 nous donnent :

$$Id\phi = dW + Fdx \tag{2.40}$$

La différentielle de l'énergie magnétique s'écrit alors sous la forme :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial u} dx + \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi \tag{2.41}$$

A partir des équations 2.40 et 2.41, nous pouvons conclure que la force magnétique globale qui s'applique sur le système est égale à la dérivation de l'énergie magnétique par rapport au déplacement x, lorsque le flux est considéré constant :

$$F = - \left[\frac{\partial W}{\partial u} \right]_{\phi = cste} \tag{2.42}$$

Notons W^* la coénergie magnétique. Nous avons alors :

$$W + W* = \phi I \tag{2.43}$$

En appliquant une approche similaire, on peut obtenir une expression de la force magnétique globale qui s'applique sur le système par la dérivation de la coénergie magnétique par rapport au déplacement u, lorsque le courant est considéré constant :

$$F = \left[\frac{\partial W*}{\partial u}\right]_{I=cste} \tag{2.44}$$

L'équation 2.44 calcule la force magnétique au niveau global. On s'intéresse maintenant à l'application du principe des travaux virtuels pour le calcul des forces aux nœuds.

Afin de calculer les forces locales sur les nœuds de la région ferromagnétique de la figure 2.4, on applique le principe des travaux virtuels au niveau des éléments du maillage éléments finis. La figure 2.7 présente le nœud où on souhaite calculer la force (n_k), les éléments entourant ce nœud et le déplacement δx. Pour calculer la force sur le nœud n_k, il faut appliquer le principe des travaux virtuels sur tous les éléments finis qui entourent ce nœud.

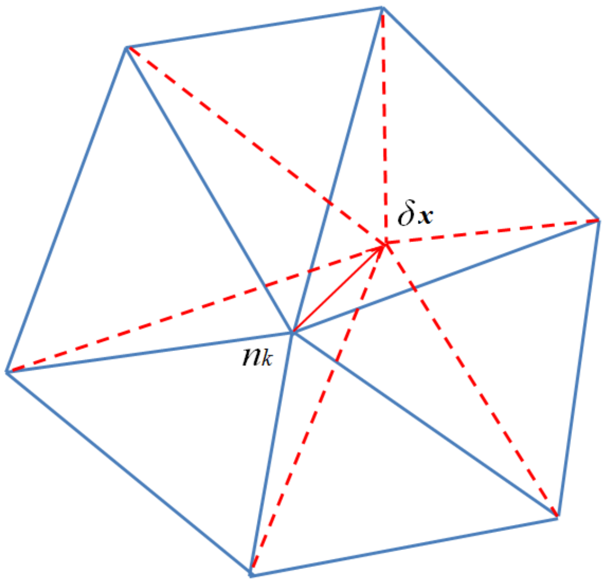


FIGURE 2.7 – Déplacement virtuel δx d'un nœud n_k de la région ferromagnétique avec la modification des éléments concernés par ce nœud

Soit En_k l'ensemble des éléments ayant pour sommet le nœud n_k, la force F_{nk} s'appliquant sur le nœud n_k s'écrit :

$$F_{nk} = \sum_{e\epsilon En_k} F_e = -\sum_{e\epsilon En_k} \left[\frac{\partial W_e}{\partial x}\right]_{\phi=cste} = \sum_{e\epsilon En_k} \left[\frac{\partial W_e^*}{\partial x}\right]_{I=cste} \tag{2.45}$$

L'énergie magnétique dans l'élément e de volume V s'exprime par la relation suivante :

$$W_e = \int_{V_e} \left(\int_0^b \overrightarrow{H}.d\overrightarrow{B}\right) dV_e \tag{2.46}$$

et la coénergie magnétique par :

$$W_e^* = \int_{V_e} \left(\int_0^h \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{H}\right) dV_e \tag{2.47}$$

La méthode des travaux virtuels localisés nécessite des développements informatique conséquents, mais elle a toutefois un fort potentiel.

2.3.4 Méthode basée sur le tenseur de Maxwell

Dans cette partie, nous présentons l'obtention de la formule des densités surfaciques de force magnétique à partir du tenseur de Maxwell [GRI99, BOS11, BAR03]. Cette méthode utilise la divergence du tenseur de Maxwell (équation 2.48) et procure une force que subit un volume élémentaire plongé dans un champ magnétique (figure 2.8).

$$\overrightarrow{F} = div(\boldsymbol{T}) \tag{2.48}$$

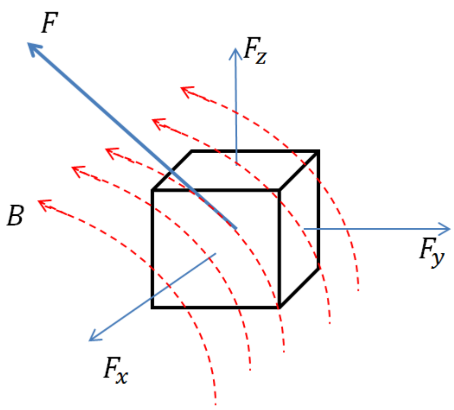


FIGURE 2.8 – Volume élémentaire plongé dans un champ magnétique

La force, subie par le volume élémentaire de la figure 2.8 suivant un axe x, s'écrit sous la forme suivante :

$$F_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \tag{2.49}$$

Afin de construire le tenseur de Maxwell, nous présentons les équations de Maxwell permettant de formaliser les relations entre les différentes entités électrotechniques.

– La première équation de Maxwell permet d'expliciter le lien entre le champ électrique source et les charges électrostatiques (équation 2.50).

$$div(\overrightarrow{D}) = \rho \tag{2.50}$$

Le flux $\overrightarrow{D}$ à travers une surface fermée est proportionnel à la charge électrique contenue.

– La deuxième équation est le lien entre le champ électrique et l'induction magnétique :

$$rot(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.51}$$

Cette deuxième équation est connue également sous le nom de loi de Faraday-Lenz : la circulation du champ électrique le long d'un contour fermé est égale et opposée à la variation de flux de l'induction magnétique par rapport au temps.

- La troisième équation de Maxwell représente la loi de conservation de flux de l'induction magnétique :

$$div(\overrightarrow{B}) = 0 \tag{2.52}$$

- La dernière équation représente la conservation de la charge électrique pour un courant électrique :

$$rot(\overrightarrow{H}) = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{2.53}$$

- Les quatre équations présentées ne sont pas suffisantes pour construire le tenseur de Maxwell. Ils introduisent une cinquième équation qui prend en compte les effets d'un champ magnétique sur un courant électrique, soit alors la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \tag{2.54}$$

Une application de l'équation 2.54 à un courant électrique permet d'écrire la loi de Laplace :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{B} \tag{2.55}$$

La loi de Laplace permet d'écrire la force qui s'exerce sur un courant $\overrightarrow{J}$ plongé dans un environnement où circule une induction $\overrightarrow{B}$. Afin de simplifier l'écriture de cette loi dans un repère orthonormé, on se limite à l'écriture de la force selon l'axe x :

$$F_x = J_y.B_z - J_z.B_y \tag{2.56}$$

L'aspect statique seul est étudié, donc le terme $\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$ de l'équation 2.53 est nul.

$$rot(\overrightarrow{H}) = \overrightarrow{J} \tag{2.57}$$

Il est possible alors d'écrire $\overrightarrow{J}$ comme une composition des dérivées partielles de $\overrightarrow{H}$. En utilisant les équations 2.56 et 2.57, on peut écrire la formulation suivante :

$$F_x = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right).\mu.H_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right).\mu.H_y \tag{2.58}$$

Une quantité nulle est ajoutée à F_x (équation 2.59). La nullité de cette quantité est induit par la troisième équation de Maxwell (équation 2.52).

$$H_x.div(\overrightarrow{B}) = \mu H_x\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \tag{2.59}$$

L'équation 2.58 peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$F_x = \mu\left(H_x\frac{\partial H_x}{\partial x} - H_y\frac{\partial H_y}{\partial x} - H_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \mu\left(H_y\frac{\partial H_x}{\partial y} - H_x\frac{\partial H_y}{\partial y}\right) + \mu\left(H_z\frac{\partial H_x}{\partial z} - H_x\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \tag{2.60}$$

Cette formulation peut être employée pour toutes les composantes F_x, F_y et F_z. Avec x, y et z les coordonnées spatiales, δ_{ij} le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si i=j, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$), les composantes du tenseur de Maxwell T s'écrivent donc :

$$T_{ij} = \mu \left(H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} H^2 \right) \tag{2.61}$$

en considérant la loi de comportement du matériau,

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\boldsymbol{B}|^2 \right) \tag{2.62}$$

Le Tenseur de Maxwell peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{T} = \mu \begin{pmatrix} H_x^2 - \frac{1}{2}H^2 & H_x H_y & H_x H_z \\ H_y H_x & H_y^2 - \frac{1}{2}H^2 & H_y H_z \\ H_z H_x & H_z H_y & H_z^2 - \frac{1}{2}H^2 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

On utilise par la suite le théorème d'Ostrogradski, il est souvent présenté avec $\overrightarrow{F}$ un vecteur, et non un tenseur (équation 2.64).

$$\int_V div(\overrightarrow{F}).dv = \int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} \tag{2.64}$$

Selon l'équation 2.48, la force par unité de volume est la divergence d'un tenseur. Pour trouver la force qui agit sur un volume, il suffit alors d'intégrer la force de l'équation 2.48 par unité de volume sur la totalité du volume :

$$\overrightarrow{F} = \int_V \overrightarrow{f_v} dv = \int_V div(\boldsymbol{T}) dv \tag{2.65}$$

A partir de la formule d'Ostrogradski (équation 2.64), l'intégration de l'équation 2.65 peut se réduire à une intégration sur une surface :

$$\int_V div(\boldsymbol{T}) dv = \int_S n\boldsymbol{T} ds \tag{2.66}$$

La notion de tenseur et son utilisation sont surtout développées en mécanique où l'étude de la répartition locale des contraintes dans un matériau se fait à l'aide du tenseur des contraintes. En s'inspirant de la méthodologie employée en mécanique, il est possible de manipuler le tenseur de Maxwell pour trouver les forces locales. Il est préférable de prendre un repère où x est la normale sortante et y orienté selon $\overrightarrow{H_t}$. En se basant sur les méthodologies en mécanique et selon [BAR03], le tenseur de Maxwell se met sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{T} = \mu \begin{pmatrix} H_n H_n - \frac{1}{2}H^2 & H_n H_t & 0 \\ H_t H_n & H_t H_t - \frac{1}{2}H^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}H^2 \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

En exprimant H^2 sous la forme $H_n^2 + H_t^2$ et en utilisant la loi de comportement pour mettre en évidence les composantes indépendantes du milieu magnétique, le tenseur de Maxwell donne la contrainte normale suivante :

$$\sigma_n = \frac{B_n^2}{2\mu} - \frac{\mu H_t^2}{2} \tag{2.68}$$

et la contrainte tangentielle :

$$\sigma_t = B_n H_t \tag{2.69}$$

Dans l'entrefer, la perméabilité est égale à μ_0, les expressions des contraintes normale et tangentielle sont :

$$\sigma_n = \frac{\mu_0}{2}\left(H_n^2 - H_t^2\right) = \frac{(B_n^2 - B_t^2)}{2\mu_0} \tag{2.70}$$

$$\sigma_t = \mu_0(H_n H_t) = \frac{B_n B_t}{\mu_0} \tag{2.71}$$

Analytiquement et en supposant que le champ magnétique parcours radialement l'entrefer, on peut négliger dans un premier temps la composante tangentielle de l'induction dans l'équation 2.70 et écrire :

$$\sigma_n(\theta, t) \backsimeq \frac{B_n(\theta, t)^2}{2\mu_0} = \frac{\left(B_s(\theta, t) + B_r(\theta, t)\right)^2}{2\mu_0} \tag{2.72}$$

Selon les calculs faits dans la thèse de Pellerey [PEL12], on peut généraliser le contenu spectral des contraintes magnétiques radiales d'entrefer (et tangentielles par extension) par l'expression suivante :

$$\sigma_{r,t}(\theta, t) = \sum_{m=0,n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{m,n}^{r,t} cos(m\theta + \Omega t + \varphi_{m,n}^{r,t}) \tag{2.73}$$

où r et t sont les composantes radiales et tangentielles de l'effort, m l'ordre spatial de l'effort par rapport à la position angulaire θ, n son rang temporel par rapport à la fréquence mécanique Ω et $\varphi_{m,n}^{r,t}$ la phase associée à chaque harmonique.

2.3.5 Discussion et choix de la méthode

Il n'existe pas de méthode de référence pour comparer les résultats et faire un choix. De plus, comme nous l'avions présenté, la mesure de forces locales d'origine magnétique est impossible. Les différentes méthodes présentées peuvent conduire à des distributions de pression magnétique différentes. Cependant, la force totale est toujours identique.

Les méthodes basées sur les sources équivalentes donnent des résultats différents entre elles, même si elles sont basées sur le même principe. En l'absence d'une méthode de référence il est donc difficile de choisir entre ces trois méthodes.

La méthode du tenseur de Maxwell est une méthode qui permet de prendre en compte à la fois les composantes radiales et tangentielles, peuvent être l'une comme l'autre importantes pour le comportement vibratoire. On remarque également que la méthode basée sur le tenseur de Maxwell et la méthode basée sur les masses et les courants surfaciques équivalentes donnent le même résultat final.

La méthode des travaux virtuels localisés présente un potentiel intéressant, mais elle nécessite des développements informatiques conséquents. La méthode des travaux est aussi la plus rigoureuse scientifiquement, mais nécessite toutefois de revoir les méthodes de résolutions implémentées dans les logiciels. Même si une demande émerge pour l'analyse des efforts, ce n'est pas encore l'usage majoritaire. Cela explique le choix par défaut de la méthode du tenseur par les logiciels commerciaux. Notre objectif n'est pas d'implémenter une méthode complexe et intrusive dans un code éléments finis, mais plutôt d'utiliser une méthode qui, à partir des composantes d'inductions magnétiques, permet de calculer efficacement les composantes radiales et tangentielles de la force magnétique.

Par ailleurs nous ne cherchons pas la méthode la plus précise, mais une approche simple pour appréhender la répartition spatiale et l'évolution temporelle de la pression magnétique dans l'entrefer. Plus qu'une prédictivité absolue, nous cherchons à appréhender les phénomènes de couplages entre les efforts et les modes propres du stator pour guider la conception amont. De ce point de vue, la méthode du tenseur de Maxwell semble la mieux adaptée.

2.4 Modélisation vibratoire de la machine électrique

Afin d'exploiter les efforts obtenus dans l'entrefer, il est nécessaire de comprendre le comportement vibratoire du stator de la machine électrique. La complexité du comportement vibratoire d'une machine électrique résulte en effet du couplage entre les efforts et la réponse de la structure.

Du point de vue vibratoire, une structure mécanique est caractérisée par ses modes propres de vibrations. La notion de mode propre peut être interprétée de différentes façons. Du point de vue mathématique, ce sont les valeurs qui diagonalisent les matrices éléments finis de masses et de raideurs. D'un point de vue physique, ce sont des ondes stationnaires de vibration (généralement de flexion) qui vont s'établir naturellement dans la structure si celle-ci est excitée aux fréquences correspondantes. Ces ondes stationnaires, ou modes propres, sont déterminée par les caractéristiques de masses et de raideurs mais également par les conditions aux limites ou les assemblages.

Nous présentons tout d'abord une illustration des modes propres sur une poutre encastrée et un système vibratoire à un seul degré de liberté (d.d.l.) pour décrire le comportement vibratoire d'un modèle simple. Ensuite, nous allons généraliser les formulations à un système représentatif à N d.d.l..

2.4.1 Illustration des modes propres sur une poutre encastrée

Les modes propres sont souvent illustrés par le cas du système masse-ressort à 1 degré de liberté. Ce cas présente l'inconvénient d'être trop basique et de ne présente qu'un mode de vibration. Nous allons tout d'abord appuyer notre illustration des modes propres sur le cas de la poutre encastrée à une de ses extrémités et excitée à son extrémité libre par un effort ondulatoire (figure 2.9).

FIGURE 2.9 – Poutre encastrée excitée à son extrémité libre par un effort ondulatoire

L'excitation à une pulsation ω va créer une onde de vibration qui va se propager dans la structure, se transmettre et se réfléchir au niveau des frontières suivant le type de condition aux limites (figure 2.10). La propagation et la réflexion des ondes de vibration dans la structure conduisent à l'apparition, à certaines fréquences, les fréquences propres, d'ondes stationnaires de vibration, les modes propres (figure 2.11).

FIGURE 2.10 – Onde générée et réfléchie sur la poutre encastrée

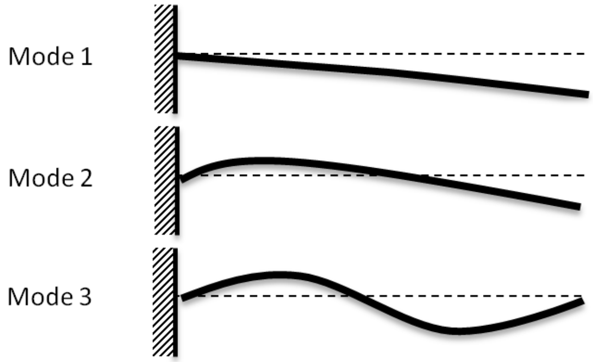


FIGURE 2.11 – Les trois premiers modes propres de la poutre

Une structure présente en théorie un nombre infini de modes propres. Dans les faits, la réponse de la structure peut s'exprimer comme la superposition de la réponse des modes les plus proches de la fréquence d'excitation. Chacun de ces modes se comportant comme un système masse ressort à 1 degré de liberté, présenté dans la partie suivante (section 2.4.2).

Ce comportement suppose toutefois que le système soit linéaire et faiblement amorti, ce qui est le cas des structures le plus couramment analysées. Par ailleurs, la réponse vibratoire apparait à la pulsation de l'excitation. Si l'excitation comporte plusieurs pulsations caractéristiques, la réponse est la somme de la réponse à ces différentes pulsations. Ceci est également le cas si l'excitation comporte un spectre continu (figure 2.12).

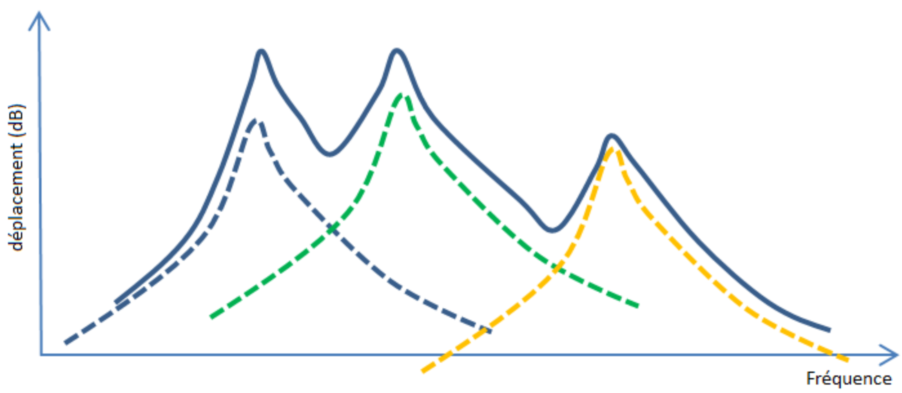


FIGURE 2.12 – Réponse vibratoire de la poutre encastrée

Dans le cas d'un assemblage, les modes propres du système sont résultant de du couplage des différents sous-systèmes. La réponse du système globale reste la superposition des modes propres globaux.

2.4.2 Cas d'un système à un degré de liberté

La figure 2.13 présente un système vibratoire typique utilisable pour présenter le comportement vibratoire d'un système à un degré de liberté.

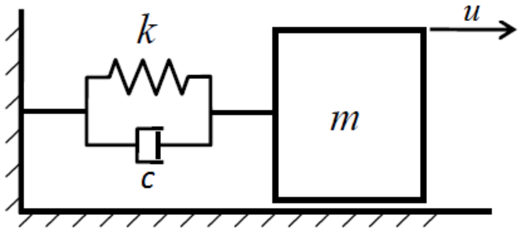


FIGURE 2.13 – Système vibratoire à un degré de liberté

Ce système a la liberté de se déplacer suivant l'axe u, il est constitué d'une masse m, d'une raideur k et d'un amortissement structural c. Il est excité par une force harmonique suivant l'axe des u tel que $F = F_0 e^{j\omega t}$. Selon la deuxième loi de Newton appliqué sur ce système, on a :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + kx = F_0 e^{j\omega t} \tag{2.74}$$

Avec $u = Ue^{(j\omega t - \varphi)}$ le déplacement, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système, $\varepsilon = \frac{c}{c_c}$ l'amortissement réduit, $c_c = 2\sqrt{km}$ l'amortissement critique, $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et en résolvant le système de l'équation 2.74, on a la fonction de transfert du système en amplitude et en phase liant le déplacement à l'effort :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \xi^2 + 2j\varepsilon\xi} \tag{2.75}$$

L'amplitude et le déphasage peuvent s'écrire sous la forme :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2) + (2\eta\xi)^2}} \tag{2.76}$$

$$tan(\varphi) = \frac{2\varepsilon\xi}{1 - \xi^2} \tag{2.77}$$

La figure 2.14 présente les courbes de l'amplitude et de la phase de la fonction de transfert mécanique en fonction de la fréquence et de la valeur de l'amortissement. L'orientation de la flèche indique une augmentation de l'amortissement.

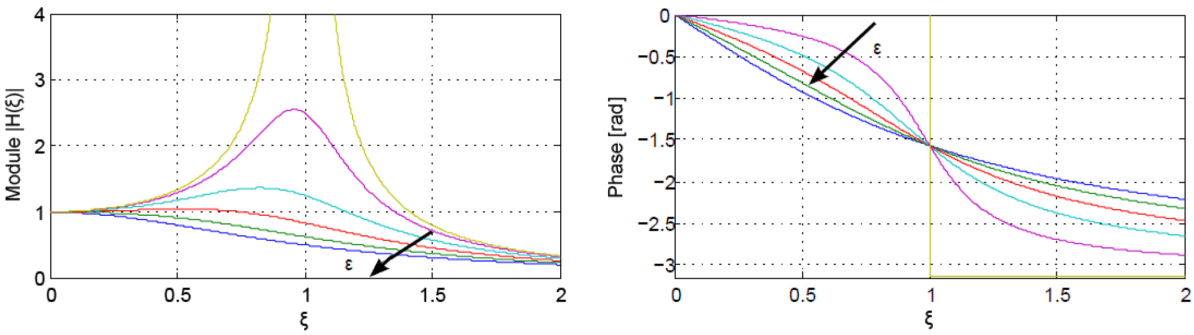


FIGURE 2.14 – Évolution du module et de la phase en fonction de la pulsation réduite et pour différentes valeurs d'amortissement

La résonance est atteinte lorsque le module est maximum, ce qui correspond à $\omega \simeq \omega_0$ lorsque l'amortissement est faible.

2.4.3 Cas d'un système à N degrés de liberté

On présente dans cette section l'analyse modale et la réponse en fréquence (FRF) d'une structure mécanique à N degrés de liberté. La structure est ici un stator simplifié, soit un cylindre creux. Le maillage de ce cylindre (figure 2.15) comporte 12600 nœuds et 10368 éléments de type solide hexaédrique à 8 nœuds (figure 2.16), soit 37800 degrés de liberté.

Les formulations pour l'analyse modale et pour la réponse en fréquence présentées dans ce paragraphe sont valables pour n'importe quelle structure mécanique oscillante.

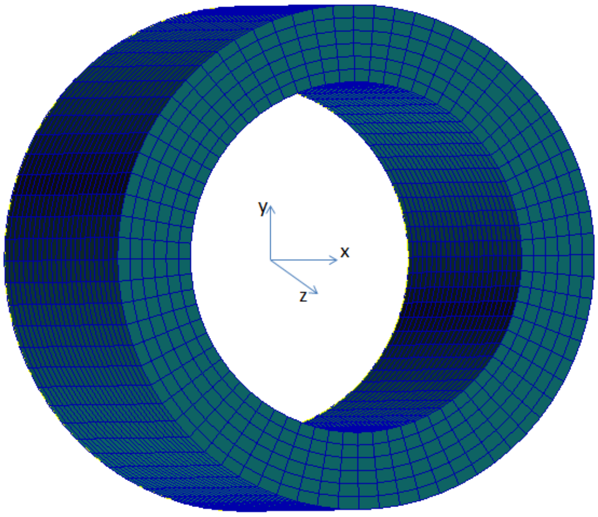


FIGURE 2.15 – Maillage d'un stator simplifié

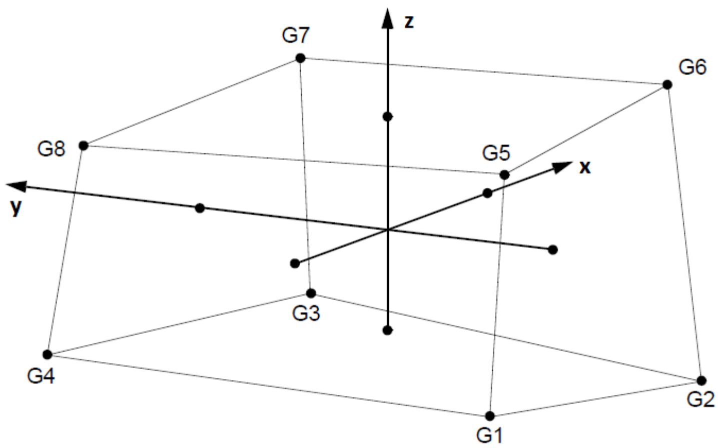


FIGURE 2.16 – Élément hexaédrique à 8 nœuds [NAS12]

Analyse modale

Un analyse modale est l'étude des propriétés dynamiques d'une structure oscillante. Elle permet de calculer les fréquences propres et les déformations modales de la structure.

Théoriquement le nombre de modes propres d'un modèle est égal au nombre de degrés de liberté de ce modèle. Les fréquences propres d'un modèle sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \tag{2.78}$$

où M et K sont respectivement les matrices élémentaires de masse et de rigidité, et u est le vecteur de déplacements.

Une solution de l'équation 2.78 peut être de la forme :

$$u_k = \phi_k e^{(j\omega t + \varphi)} \tag{2.79}$$

avec l'indice k variant de 1 à N modes propres et ϕ étant le vecteur propre.

Nous injectons la solution (équation 2.79) dans l'équation 2.78 pour obtenir l'équation matricielle suivante :

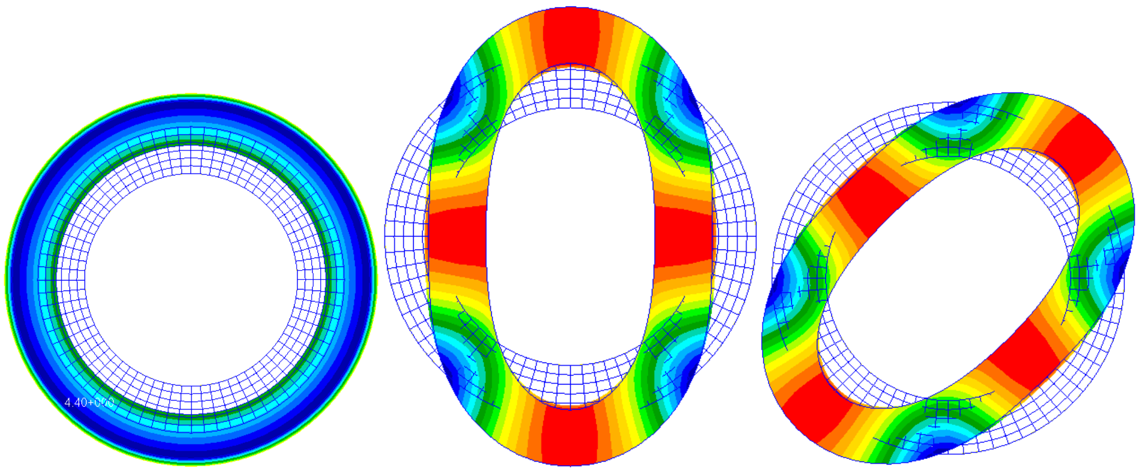
$$(M^{-1}K - \omega^2 I)\phi = 0 \tag{2.80}$$

où I est la matrice identité . Le calcul des valeurs propres s'obtient par la recherche des solutions non triviales (pas de modes propres) de l'équation 2.80, soit l'équation suivante :

$$det(M^{-1}K - \omega^2 I) = 0 \tag{2.81}$$

Cette équation admet un nombre de solutions réelles positives ω_i^2 égal au nombre N de degrés de liberté du modèle. Les vecteurs propres associés ϕ_i sont obtenus en résolvant les N systèmes de l'équation 2.80. Les termes ω_i et ϕ_i sont respectivement les pulsations propres et les modes propres du système. L'ensemble des modes propres constitue la base modale $\Phi = [\phi_1 \cdots \phi_n]$ tel que $dim(\Phi) = N^2$.

En pratique, on ne résout pas les N équations du système, on choisit une plage d'intérêt représentative de l'étude, soient m modes propres sélectionnés. Pour une structure de révolution, les modes propres sont doubles et déphasés spatialement de $360/2n$ degrés (n ordre du mode), à l'exception du mode d'ordre 0. Ce mode de respiration est un mode de traction-compression alors que les modes d'ovalisation sont des modes de flexion de la paroi (figure 2.17).



Mode d'ordre 0 Modes d'ordre 2 déphasés de 45°

FIGURE 2.17 – Modes propres de respiration et d'ovalisation d'un stator simplifié

Les modes doubles sont souvent nommés abusivement modes tournants, alors que ce sont des ondes stationnaires. Pour une même fréquence, deux modes sont obtenus, la réponse à une excitation tournante (rotor) est la somme de la réponse de ces deux modes. On a ainsi une amplitude maximale de vibration qui "tourne".

Réponse en fréquence (FRF)

Afin de calculer la réponse en fréquence (FRF), on considère une structure amortie soumise à un chargement dynamique. Les équations du mouvement s'écrivent de la manière suivante :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \tag{2.82}$$

où M, C et K sont respectivement les matrices globales de masse, d'amortissement et de raideur. *f(t)* est le vecteur des chargements et *u(t)* est le vecteur des déplacements. Les matrices M et C sont généralement exprimées de façon a être diagonales. La matrice C n'est pas calculée, on estime souvent l'amortissement modal à partir d'essais au marteau de choc. Il est généralement compris entre 1 et 6 % pour une structure métallique.

Ce système d'équations couplées du second ordre est résolu en imposant des conditions initiales. Dans les cas de chargement harmonique, on peut découpler l'amplitude et la composante temporelle de la manière suivante :

$$f(t) = f(\omega)e^{j\omega t} \tag{2.83}$$

$$u(t) = u(\omega)e^{(j\omega t - \varphi)} \tag{2.84}$$

où ω est la pulsation. En substituant les équations 2.83 et 2.84 dans le système d'équations 2.82, nous obtenons :

$$-\omega^2 Mu(\omega) + j\omega Cu(\omega) + Ku(\omega) = f(\omega) \tag{2.85}$$

La technique de superposition modale est utilisée, elle consiste en une projection de ces équations sur un espace modal. On ne prend pas en compte tous les modes de la base Φ, mais on considère une base tronquée $\hat{\Phi}$. Le but principal est de réduire la taille du problème, de plus on obtient un système d'équations découplées. Les contributions de chaque mode sont sommées pour obtenir la réponse souhaitée. Le choix du nombre m de mode retenu dépend de la plage de fréquence que l'on souhaite étudier. Il est de bonne pratique d'au moins doubler la largeur de la plage de fréquences d'intérêt.

Les déplacements physiques s'expriment en fonction des coordonnées modales :

$$u(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \phi^i q_i(\omega) = \hat{\Phi} q(\omega) \tag{2.86}$$

où m est le nombre de modes retenus, $\hat{\Phi}$ est la matrice modale tronquée à m, ϕ^i est le i-ème mode propre, $q(\omega)$ est le vecteur des coordonnées modales et $q_i(\omega)$ est la i-ème composante de ce vecteur (figure 2.18). L'expression classique de l'équation de la dynamique dans l'espace modal peut s'écrire ainsi :

$$(-\omega^2 \widetilde{m} + j\omega\widetilde{c} + \widetilde{k})q(\omega) = \hat{\Phi}^T f(\omega) \tag{2.87}$$

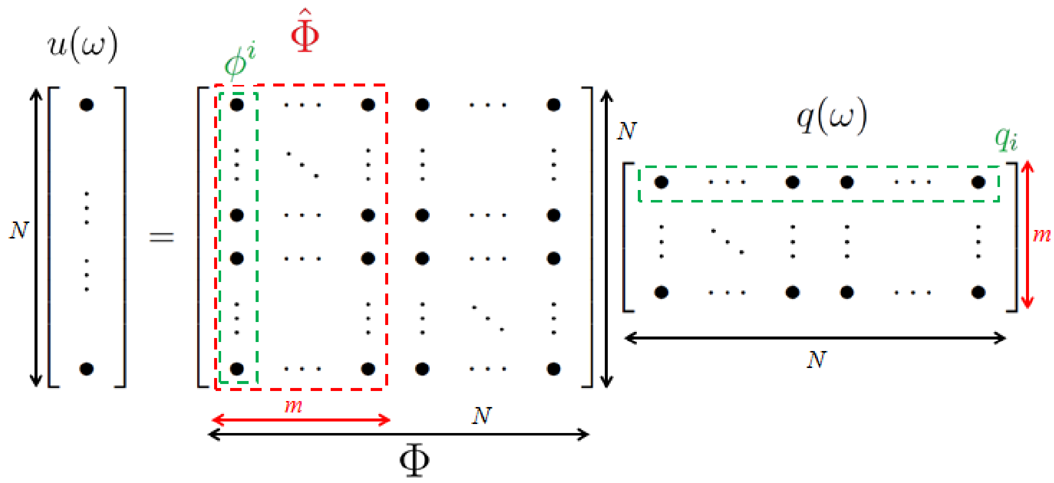


FIGURE 2.18 – Matrices représentatives de l'équation 2.86 qui montre la base modale tronquée

où $\widetilde{m} = \hat{\Phi}^T M \hat{\Phi}$ est la matrice de masse modale, $\widetilde{c} = \hat{\Phi}^T C \hat{\Phi}$ est la matrice d'amortissement modal et $\widetilde{k} = \hat{\Phi}^T K \hat{\Phi}$ est la matrice de rigidité modale. Le découplage des équations vient de la propriété d'orthogonalité entre la matrice modale $\hat{\Phi}$ et les matrices M et K, les matrices modales $\widetilde{k}$ et $\widetilde{m}$ sont donc diagonales. La matrice modale $\widetilde{c}$ est construite de la même manière.

L'équation 2.87 constitue un système d'équations découplées de résolution facile dans le domaine fréquentiel. La matrice de transfert s'écrit :

$$\mathcal{H}(\omega) = (-\omega^2 \widetilde{m} + j\omega \widetilde{c} + \widetilde{k})^{-1} \tag{2.88}$$

En résolvant le système d'équations 2.87, on obtient :

$$q(\omega) = \mathcal{H}(\omega) \hat{\Phi}^T f(\omega) \tag{2.89}$$

Enfin, l'expression des déplacements est :

$$u(\omega) = \hat{\Phi} q(\omega) = \hat{\Phi} \mathcal{H}(\omega) \hat{\Phi}^T f(\omega) \tag{2.90}$$

L'équation 2.90 sera utilisée par la suite, dans le manuscrit, pour calculer les déplacements forcés d'une structure mécanique. Le fait de prendre une base modale tronquée nous apporte un gain en temps de calcul, tout en gardant la précision souhaitée.

2.5 Couplage électromagnétique-vibratoire

Les études vibratoires des machines électriques ont commencées dans les années 50. Les modèles utilisés représentant les phénomènes physiques sont alors analytiques. Les méthodes de calcul analytiques sont longues à développer. De plus, pour rendre le modèle simple, on néglige quelques phénomènesce qui peut imprécision des résultats. Aujourd'hui, pour améliorer la prédiction des modèles, une approche numérique par éléments finis est utilisée.

Dans cette thèse on s'intéresse à la construction d'un modèle multi-physique pertinent, soit un modèle multi-physique simple avec un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats qu'il faudra trouver.

La simplification est limitée pour le modèle électromagnétique. Afin de ne pas perdre les informations fréquentielles d'inductions magnétiques, nous sommes obligés de garder un maillage suffisamment fin en cohérence avec le pas de rotation du rotor. Toutefois, cela ne nous empêche pas de profiter de la périodicité de la machine pour réduire la taille du modèle électromagnétique en modélisant un quart de cette machine.

La simplification du modèle mécanique est plus facile. On modélise uniquement le stator de la machine. Le stator est la source principale de vibration radiale dans les machines électriques. La modélisation du stator nous permet de conserver le comportement mécanique principal de la machine.

Le couplage présenté dans cette thèse est un couplage faible entre les deux modèles EF électromagnétique et mécanique (figure 2.19). Ce couplage suppose que la déformation mécanique est trop faible pour influer sur le comportement magnétique.

Dans le cadre du projet AVELEC avec les partenaires : Cedrat, Renault et Vibratec, il a été décidé de travailler avec les logiciels de simulation Flux2D [FLU12] pour la partie électromagnétique et Nastran [NAS12] pour la partie mécanique. Il restait à définir un outil de couplage, le logiciel Matlab [MAT11] est choisi pour sa souplesse de programmation et ses nombreux toolbox. Le couplage pourra être réalisé par la suite dans un autre langage afin d'être intégré aux outils existants de Cedrat.

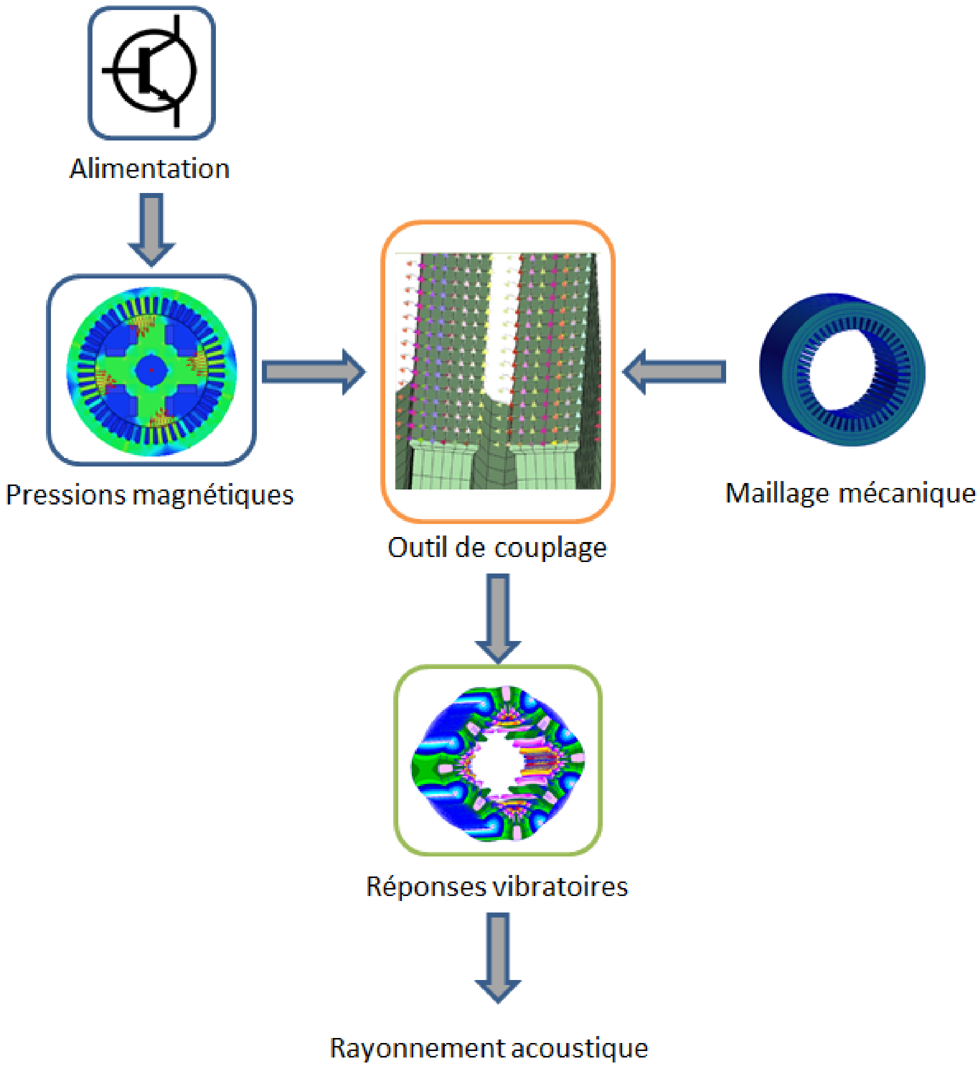


FIGURE 2.19 – Illustration du couplage multi-physique électromagnétique-vibratoire

L'outil de couplage développé dans cette thèse est présenté sur la figure 2.19. Les entrées sont un modèle EF 2D électromagnétique et un modèle EF 3D mécanique. Le modèle électromagnétique créé sous Flux2D sert à calculer les inductions magnétiques, puis les pressions magnétiques en utilisant la méthode du tenseur de Maxwell. Le modèle EF 3D mécanique est créé sous pré-processeur MSC-Patran. Les pressions magnétiques calculées par le modèle électromagnétique EF 2D sont projetées sur le modèle mécanique EF 3D, pour aboutir à un modèle mécanique chargé par les forces d'origines magnétiques. Le fichier de données de ce modèle mécanique chargé est un fichier MSC-Nastran de type *.bdf. L'analyse EF de ce modèle fournit les comportements vibratoires de la machine.

La machine étudiée est non vrillée et nous faisons l'hypothèse de négliger les effets de bord, un modèle EF 3D n'est donc pas nécessaire, le modèle 2D électromagnétique suffit alors. Le maillage mécanique 3D n'a pas la même discrétisation que le maillage électromagnétique, ce qui induit un transfert de champ entre les deux maillages lors de la projection des forces.

2.5.1 Méthode de projection des efforts

Il s'agit tout d'abord de calculer les pressions magnétiques en utilisant les équations 2.70 et 2.71. La surface où les pressions magnétiques sont appliquées est celle des dents statoriques, la pression normale est alors radiale. A un point de fonctionnement de la machine (couple et vitesse), il y aura plusieurs calculs quasi-statiques pour différentes positions du rotor. Pour chaque position, il y a en données d'entrées deux tableaux pour les deux physiques considérées (figure 2.20). Le premier contient tous les nœuds mécaniques du modèle et leurs coordonnées, l'autre contient les points de calculs électromagnétiques et la pression magnétique (radiale et tangentielle) associée à chaque point.

Maillage mécanique			
Numéro du nœud	x	y	z
1	x_1	y_1	z_1
2	x_2	y_2	z_2
...	...	...	...
n	x_n	y_3	z_3

Outil de couplage (Projection)

Maillage électromagnétique						
Numéro du nœud	x	y	Br	Bt	Pr	Pt
1	x_1	y_1	Br_1	Bt_1	Pr_1	Pt_1
2	x_2	y_2	Br_2	Bt_2	Pr_1	Pt_1
...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...		
m	x_m	y_m	Br_m	Bt_m	Pr_m	Pt_m

Maillage mécanique chargé					
Numéro du nœud	x	y	z	Fr	Ft
1	x_1	y_1	z_1	Fr_1	Ft_1
2	x_2	y_2	z_2	Fr_2	Ft_1
...	...	...	...	...	...
n	x_n	y_3	z_3	Fr_3	Ft_1

FIGURE 2.20 – Les entrées et la sortie de l'outil de couplage

Dans un premier temps, il s'agit de choisir les nœuds mécaniques où on va appliquer les forces. Ces nœuds se situent sur les surfaces des dents statoriques. Le maillage électromagnétique est 2D, la projection des pressions magnétiques sur le maillage mécanique 3D est donc identique sur chaque section de nœuds du stator. La figure 2.21 présente la méthode utilisée pour projeter les pressions magnétiques sur le maillage mécanique. Les flèches bleues représentent la pression magnétique calculée sur le modèle électromagnétique, une interpolation permet d'obtenir une fonction de pression magnétique continue. Les flèches rouges représentent la densité des forces linéiques projetées sur le modèle mécanique. La projection linéaire utilisée ici est cohérente avec les fonctions de forme de l'élément fini H8 (figure 2.16).

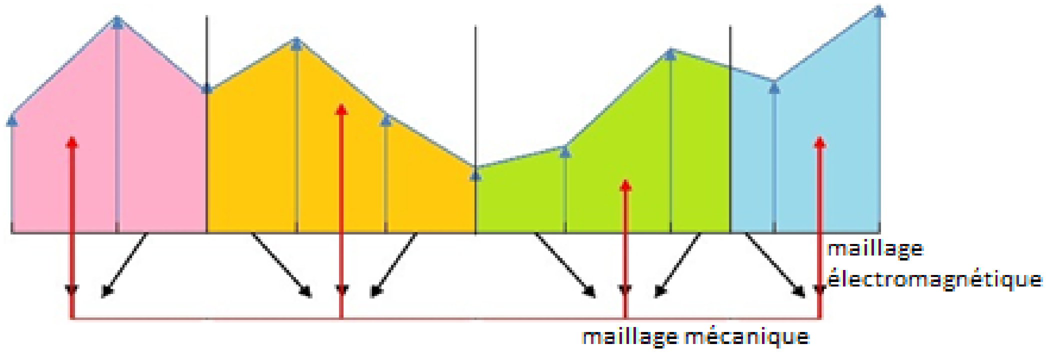


FIGURE 2.21 – Méthode utilisée pour projeter les pressions magnétiques calculées par l'analyse électromagnétique sur le maillage mécanique

Les pressions magnétiques calculées sur le modèle électromagnétique (flèches rouges) sont exprimées en N/mm². La densité de force linéique, en N/mm, sur un nœud i du maillage mécanique s'écrit sous la forme :

$$P_l^j = \sum_1^K \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} Ps.r.d\theta \tag{2.91}$$

où Ps représente la fonction de pression magnétique, θ est la position angulaire du nœud mécanique, K est le nombre de nœuds électromagnétiques entourant le nœud mécanique et r est le rayon d'alésage du stator.

La force nodale exprimée en N est :

$$f^i = P_l^j.L \tag{2.92}$$

où L est la longueur de l'élément du maillage mécanique suivant l'axe z (figure 2.22).

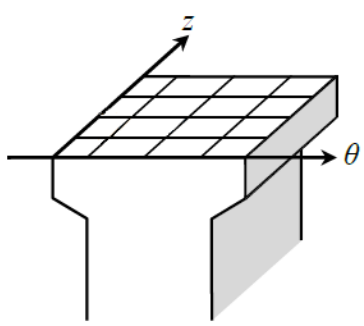


FIGURE 2.22 – Exemple de maillage d'une dent statorique

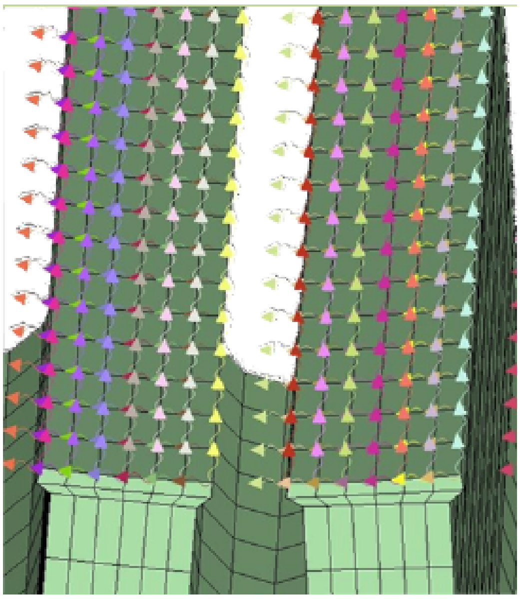


FIGURE 2.23 – Forces magnétiques appliquées sur la surface des dents statoriques du modèle mécanique

Finalement, la figure 2.23 nous montre le maillage mécanique 3D chargé par les forces magnétiques radiales et tangentielles. Ces résultats sont classées dans le troisième tableau de la figure 2.20 contenant les nœuds mécaniques avec les forces appliquées pour un point de fonctionnement. Cette procédure est répétée pour tous les pas temporels de calcul.

Afin d'évaluer l'erreur de projection on propose deux critères : un quantitatif et un qualitatif. La formule suivante exprime le critère quantitatif :

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n} f^i - \int_{surface} Ps.dS}{\int_{surface} Ps.dS} \tag{2.93}$$

Cette formule exprime l'erreur relative entre la force totale appliquée sur le stator à partir du maillage électromagnétique et la force totale projetée sur le maillage mécanique. On considère qu'une projection est acceptable si cette erreur est proche de 1%.

Le critère qualitatif consiste à comparer les deux courbes de pressions et de forces spatio-temporelles appliquées sur le stator avant et après la projection, un exemple est présenté dans la partie 2.6.4 application à la machine.

De plus, dans notre modèle à 48 encoches, l'erreur de projection peut induire essentiellement des harmoniques spatiales multiples de H48, soit à très haute fréquence et donc en dehors de la plage d'intérêt.

2.6 Application : modélisation de la machine synchrone à rotor bobiné (MSRB)

2.6.1 Présentation de la machine

La machine modélisée dans cette thèse est une machine synchrone à rotor bobiné de 48 encoches statoriques et 2 paires de pôles. La machine est triphasée avec une puissance de quelques dizaines de kWs, typique d'un moteur de traction de véhicule électrique.

2.6.2 Modèle mécanique simplifié de la machine

Le stator du moteur est modélisé par éléments finis. Les pressions magnétiques de la machine électrique sont appliquées principalement sur les dents du stator et sur le rotor. Dans l'esprit de créer un modèle simplifié prenant en compte les phénomènes prépondérants, nous choisissons d'étudier les vibrations sur le stator seul. La vibration rotorique n'est pas alors l'objet de cette étude. Ce choix est évalué en comparant les résultats obtenus sur le stator seul avec des résultats expérimentaux.

Même si la vibration rotorique n'est pas prise en compte dans cette thèse, l'interaction électromagnétique entre le rotor et le stator apparait toujours dans le modèle électromagnétique.

Le stator d'une machine électrique est constitué d'un cylindre ferromagnétique entaillé d'encoches permettant d'y loger les bobinages. Ce cylindre est constitué d'un empilement de plaques de tôles feuilletées afin de limiter les courants de Foucault. Une modélisation géométrique des tôles induit un grand nombre de degré de liberté, d'où un temps de calcul conséquent. Pour cela, un choix d'une modélisation uniforme est fait. Ce choix est validé dans le quatrième chapitre. Le stator est donc considéré comme un matériau homogène : soit un acier avec un module de Young de 200 GPa, un coefficient de Poisson de 0.3 et une masse volumique de 7500 kg/m^3.

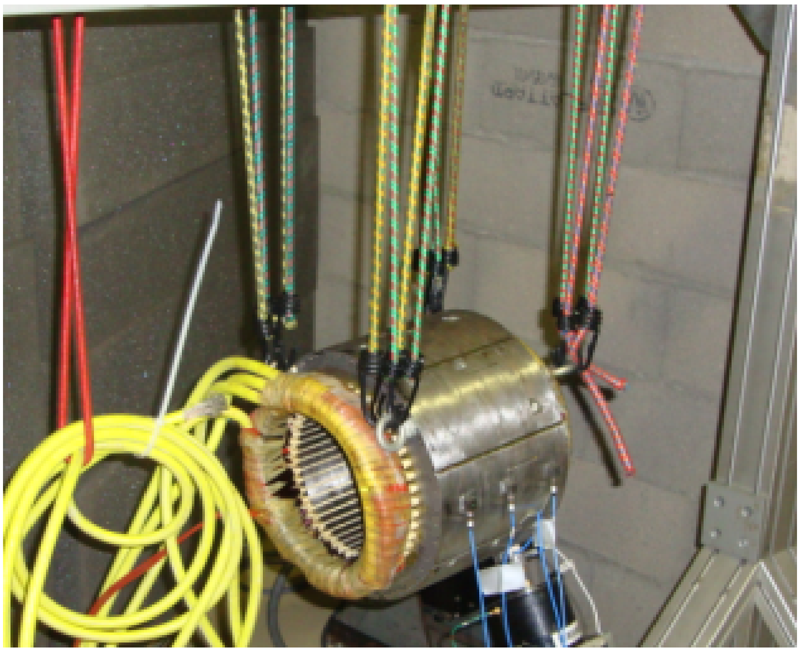


FIGURE 2.24 – Montage pour l'analyse modale expérimentale du stator

Des mesures expérimentales de fréquences propres sur le stator ont été réalisées par la société Vibratec. La figure 2.24 montre le stator avec les encoches suspendu par des tendus, soit en condition libre-libre. Les fréquences propres mesurées sont présentées dans le tableau 2.2.

Un calcul EF préliminaire de fréquences propres est fait. La figure 2.25 présente les neuf premiers modes propres du stator. Il est noté que tous les modes sont doubles pour cette structure cylindrique à l'exception du mode de respiration (mode 9). Sur cette figure on présente un mode pour une fréquence propre.

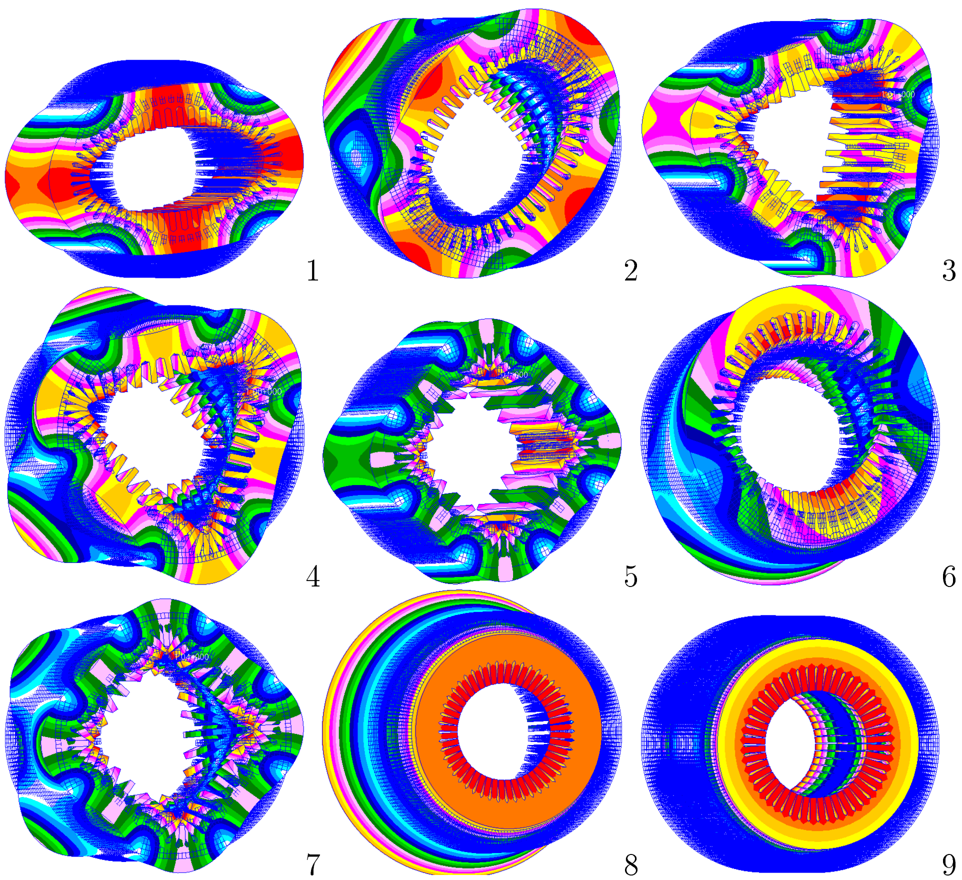


FIGURE 2.25 – Premiers modes propres EF du stator

Il s'agit maintenant de bien modéliser le stator. La modélisation des bobinages et la taille du maillage sont alors étudiées.

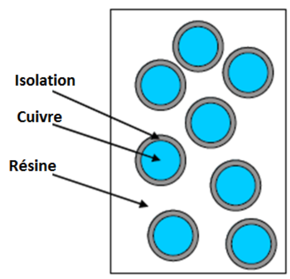


FIGURE 2.26 – Bobinages

Modélisation des encoches : L'encoche est composée de bobines de conducteurs imprégnés. Les conducteurs sont en cuivre, les isolants et les résines sont souvent des polymères (figure 2.26). On propose trois choix pour modéliser les encoches :
- Modélisation exacte : elle est très complexe et rend le modèle trop lourd.
- Modélisation uniforme moyenne : l'encoche est considéré comme un matériau uniforme avec des propriétés matériau mécaniques équivalentes en considérant le cuivre, l'air, les résines et les isolants [VAN12].
- Modélisation de masse ponctuelle : la masse totale des bobinages est ajoutée uniformément sur les faces intérieures des dents statoriques (figure 2.27).

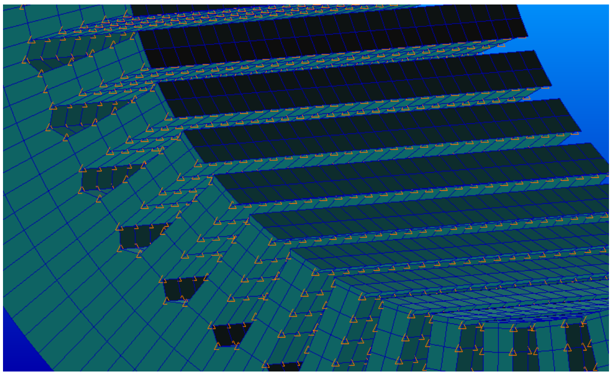


FIGURE 2.27 – Modélisation du bobinage de cuivre en masses ponctuelles dans les encoches

Le tableau 2.2 montre les premières fréquences propres mesurées expérimentaux et calculées avec deux modélisations. La première colonne présente les fréquences mesurées sur le stator de la figure 2.24. La deuxième colonne présente les fréquences calculées sur un modèle EF avec modélisation des bobinages en masses ponctuelles. La troisième colonne présente les fréquences propres calculées sur un modèle EF avec modélisation des bobinages avec un matériau équivalent. Ce tableau présente également le type de déformation modale. On considère la notation de mode (i,j) où i est le nombre de lobes vu dans le plan radial et j au niveau axial. Les déformations modales sont présentées graphiquement dans la figure 2.25.

Mode	Mesure Expérimentale	Modélisation en masses ponctuelles	Modélisation équivalente	Type de mode
1	1015	1086	1739	(2,0)
2	1298	1601	2384	(2,1)
3	2748	2840	4505	(3,0)
4	3260	3591	5476	(3,1)
5	4457	4887	7866	(4,0)
6	5145	4934	5472	flexion
7	5501	5597	8882	(4,1)
8	5930	5833	6407	(0,1)
9	5466	6045	6647	(0,0)

Tableau 2.2 – Fréquences propres (en Hz) du stator

La figure 2.28 montre un histogramme des fréquences propres présentées dans le tableau 2.2. La modélisation en considérant les bobinages en masses ponctuelles est la plus proche des mesures expérimentales. En effet, la modélisation équivalente rend le modèle très rigide au niveau des dents statoriques, ce qui augmente les fréquences propres. Il serait intéressant de faire une étude plus détaillée sur la modélisation des bobinages. En effet, des études sont actuellement menées par la société Vibratec afin de déterminer les interactions entre les fils de cuivre et les dents en fonction de la fréquence. A une certaine fréquence, les fils et les dents peuvent être découplés. Dans cette thèse, la modélisation des bobinages en des masses ponctuelles au niveau des encoches est choisie.

Par la suite, nous utilisons un amortissement critique modal, les valeurs sont mesurées expérimentalement par la société Vibratec.

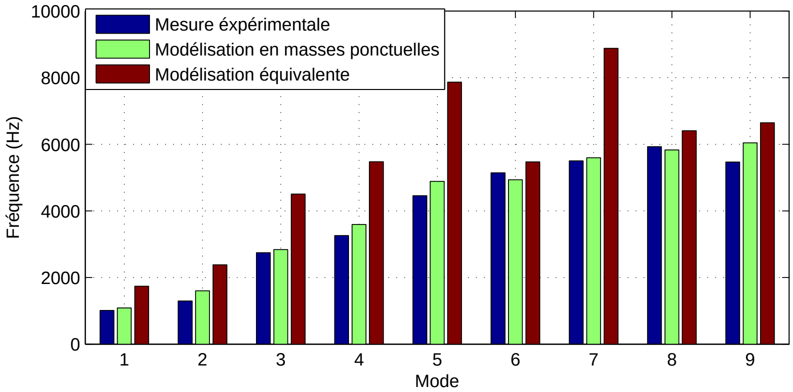
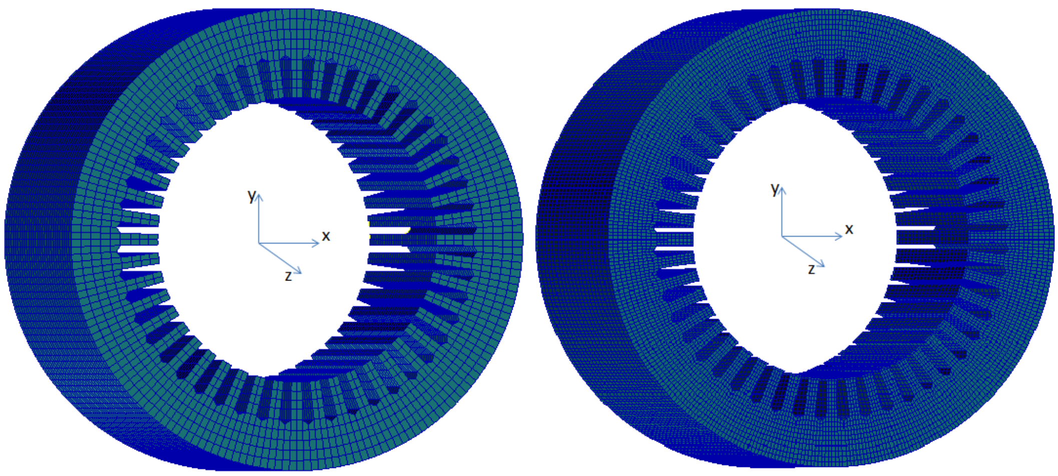


FIGURE 2.28 – Histogramme des fréquences propres du stator mesurées expérimentalement et calculées par EF avec modélisation des encoches en masses ponctuelles et en matériau équivalent

Choix du maillage : La figure 2.29 présente deux maillages 3D du stator composés d'éléments solides hexaédriques à 8 nœuds (H8). Le premier est constitué de 53568 nœuds et 40320 éléments et le deuxième comprend 139104 nœuds et 115200 éléments. Le deuxième maillage est considéré comme un maillage de référence.

En fait, le stator est constitué d'un empilement de tôles ferromagnétiques. Selon [VAN12], un maillage uniforme suivant l'axe de z est suffisant pour ce type de calcul. Le choix de cette modélisation uniforme est également validé dans le troisième chapitre.

Les fréquences propres du stator sont calculées sur les deux maillages. La comparaison entre ces fréquences montre un écart faible. De plus, en comparant la finesse de ce maillage avec d'autres modèles mécaniques dans l'état de l'art, notamment celui de Pellerey [PEL12], on peut considérer qu'il est suffisant pour notre modèle multi-physique. Le premier maillage de la figure 2.29 est donc utilisé.



53568 nœuds et 40320 éléments 139104 nœuds et 115200 éléments

FIGURE 2.29 – Maillages 3D mécanique choisi et de référence du stator

2.6.3 Modèle électromagnétique

La machine étudiée a 2 paires de pôles et 48 encoches statoriques. Elle est alors périodique, il suffit de modéliser 1/4 de la machine sous Flux2D. La figure 2.30 présente le modèle électromagnétique EF qui représente une portion de 90° de la machine. Ce maillage 2D est constitué de 7062 éléments triangles à 3 nœuds.

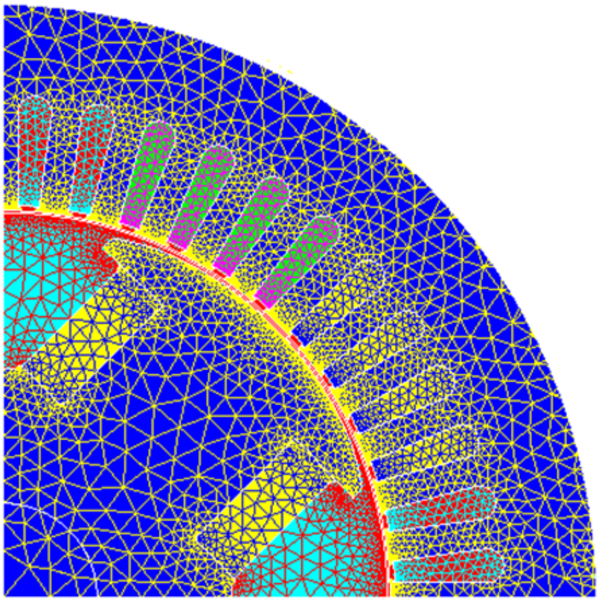


FIGURE 2.30 – Maillage 2D électromagnétique de la machine

Les équations suivantes présentent les alimentations statoriques et rotoriques :

$$\begin{cases} I_r = I_{rotor} \\ I_a = I_{max}cos(\omega t + \psi) \\ I_b = I_{max}cos(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\ I_c = I_{max}cos(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \tag{2.94}$$

où I_r est le courant rotorique, I_{max} est le courant statorique maximal, $\omega = \frac{2\pi}{f}$ est la pulsation électrique et ψ est l'angle de pilotage électrique. Celui-ci est l'angle entre le flux statorique et le flux rotorique.

Une alimentation en triphasée avec prise en compte de l'angle de pilotage électrique est alors considérée pour le stator, et une alimentation à courant continu pour le rotor. Les valeurs de courants statoriques et rotoriques, ainsi que l'angle de pilotage électrique, sont définis par le point de fonctionnement sur le diagramme couple/vitesse satisfaisant au cahier des charges de la machine. La figure 2.31 présente un exemple d'un diagramme couple/vitesse du courant statorique, les amplitudes ne sont pas présentées pour raison de confidentialité.

Afin de présenter un exemple du couplage électromagnétique-vibratoire, un point de fonctionnement a été choisi avec une vitesse de rotation de 3000 tr/min et un couple moyen de 200 N.m.

L'induction magnétique est calculée sur un chemin fictif situé dans l'entrefer de la machine. Ensuite les pressions magnétiques sont calculées en se basant sur le tenseur de Maxwell selon les équations 2.70 et 2.71.

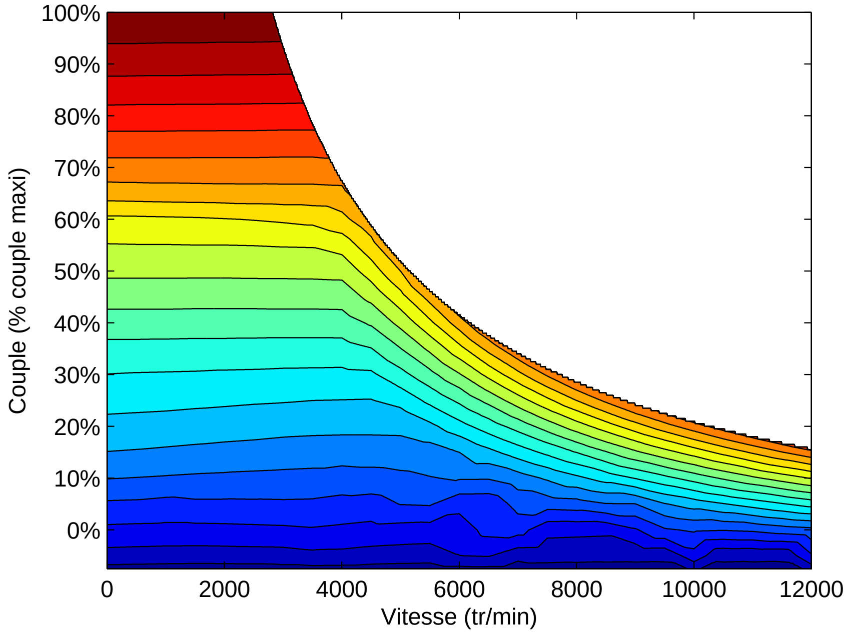


FIGURE 2.31 – Exemple d'un diagramme couple/vitesse de la machine utilisée

Positionnement du chemin de calcul de l'induction magnétique dans l'entrefer

Afin de calculer les pressions magnétiques appliquées sur les dents statoriques, nous calculons les inductions magnétiques sur la surface d'alésage des dents statoriques. La pression magnétique radiale calculée à partir de l'équation 2.70 est représentée par la courbe de la figure 2.32. Cette courbe nous montre une oscillation inattendue car l'induction magnétique tangentielle est toujours plus petite que l'induction magnétique radiale.

On propose alors de calculer les inductions magnétiques sur un chemin situé dans l'entrefer. Nous posons alors la question de la position de ce chemin. Selon le théorème de Green-Ostrogradski (équation 2.64), la position du chemin n'affecte pas la force globale calculée. Cependant, il s'agit ici d'une pression magnétique locale, cette sous-section présente une étude de position du chemin fictif.

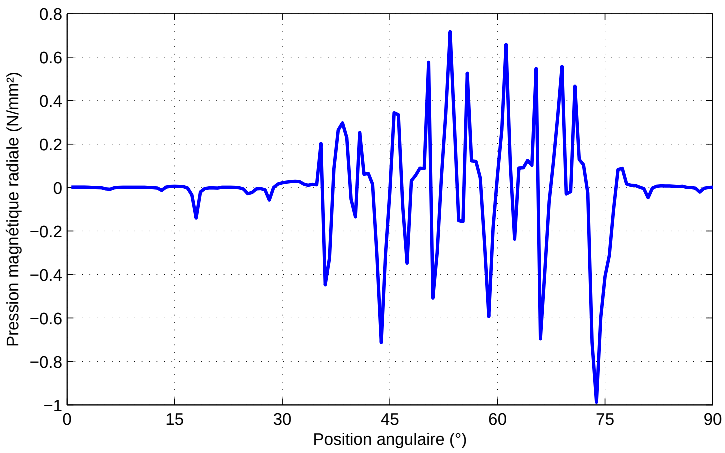


FIGURE 2.32 – Pression magnétique radiale calculée sur les dents statoriques

La figure 2.33 présente le chemin fictif utilisé pour calculer les inductions magnétiques. La figure 2.34 présente un zoom de l'entrefer de la machine, les directions de lignes de champs magnétiques varient selon la position du chemin de calcul. Elles varient fortement dans la zone sur les cotés des dents (ouvertures d'encoches).

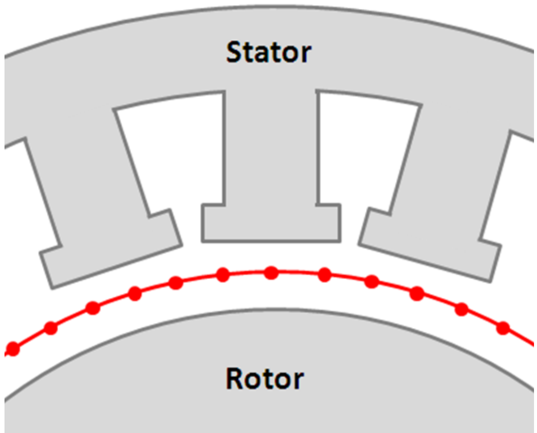


FIGURE 2.33 – Chemin fictif dans l'entrefer pour calculer les inductions magnétiques [DUP13]

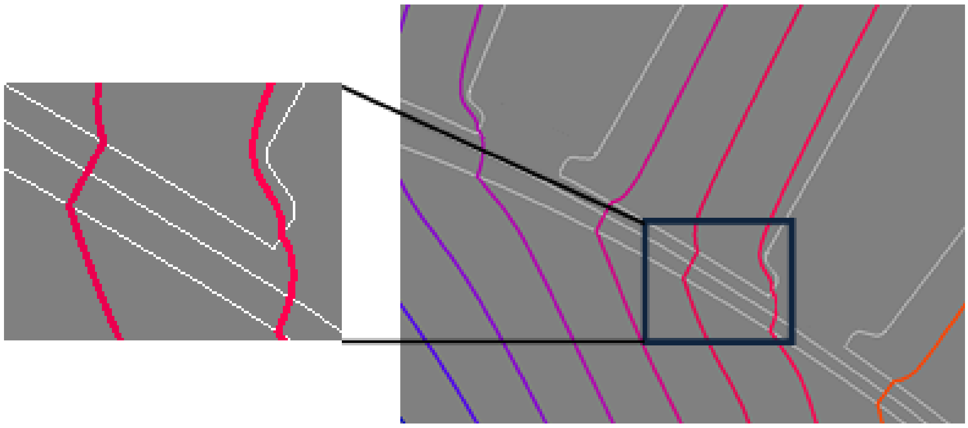


FIGURE 2.34 – Évolution des composantes des lignes de champs magnétiques selon la position du chemin de calcul dans l'entrefer

La position du chemin fictif dans l'entrefer varie selon un coefficient k de 10% (chemin proche du stator) jusqu'à 90% (chemin proche du rotor). Ensuite, nous traçons les courbes de pressions magnétiques radiales et tangentielles en fonction de la position du chemin.

Il n'existe pas de méthode de référence pour trouver une position exacte du chemin. Cependant, on peut toujours comparer le couple instantané calculé par la méthode des travaux virtuels et celui à partir des pressions magnétiques tangentielles. Il est possible également de calculer la force radiale totale appliquée sur le stator, et d'étudier la variation de cette force pour différentes positions de chemin.

La figure 2.35 présente les pressions magnétiques radiale et tangentielle en fonction de la position angulaire pour différentes positions du chemin (k). Lorsque le chemin s'approche du stator, des pics sur les courbes des pressions radiale et tangentielle apparaissent. Ces pics sont au niveau des bords des dents statoriques. Ces courbes deviennent plus lisses lorsque le chemin s'approche du rotor. Les courbes de pressions magnétiques sont identiques lorsque k>50%.

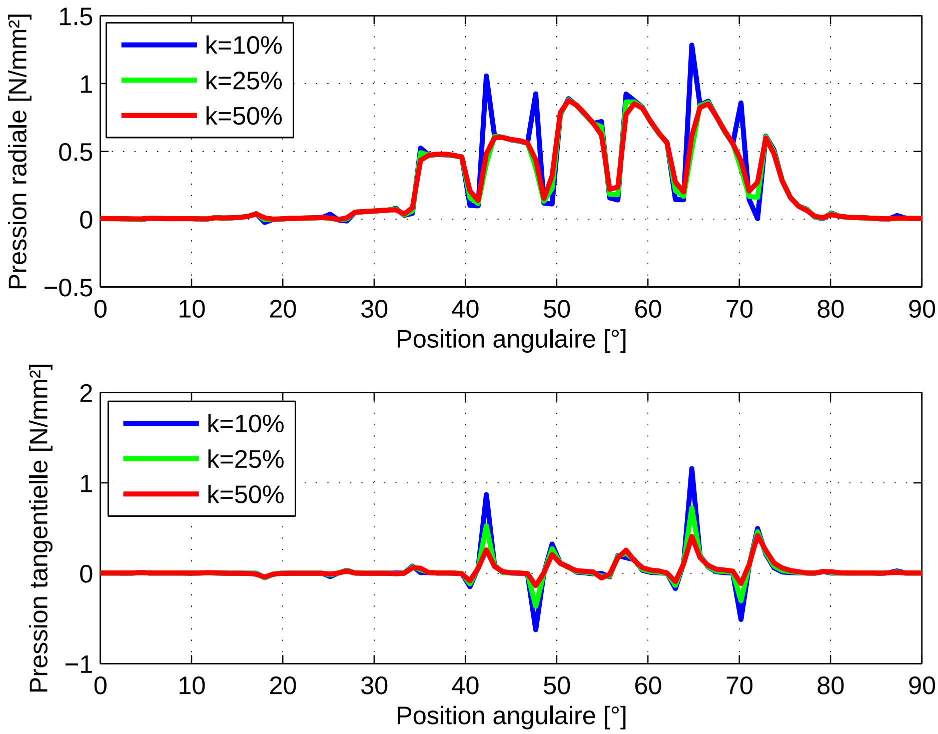


FIGURE 2.35 – Pressions magnétiques radiale et tangentielle pour différentes positions du chemin de calcul fictif dans l'entrefer

Les deux graphes de la figure 2.35 ne permettent pas conclure sur la position du chemin. Nous calculons alors, la force magnétique radiale totale appliquée sur le stator pour différentes positions du chemin. Ces forces sont classées dans le tableau 2.3. Ce tableau présente un minimum inexpliqué lorsque k=20%, et une valeur stable dans le coté rotor de l'entrefer pour $k \geq 50\%$.

Position du chemin	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
Force radiale totale [kN]	4.71	4.61	4.66	4.68	4.69	4.69	4.69	4.69	4.69
Écart relatif	+0.4%	-1.7%	-0.6%	-0.3%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 2.3 – Force radiale totale en fonction de la position du chemin fictif de calcul

Il n'y a pas de méthode de référence de calcul de pression. Par contre, il en existe une pour valider le calcul de couple. On calcule le couple instantané en fonction de la position du chemin. Les valeurs de couple calculées par la pression magnétique tangentielle (tenseur de Maxwell) sont comparées avec le couple calculé par la méthode des travaux virtuels. Le couple instantané sera calculé par la méthode du tenseur de Maxwell selon la formule suivante :

$$C = \sum f^t.R \tag{2.95}$$

où $\sum f^t$ est la somme des forces tangentielles appliquées sur le rotor et R est le rayon du rotor. Le tableau 2.4 présente les couples calculés en utilisant la méthode du tenseur de Maxwell et l'écart relatif avec le couple calculé par la méthode des travaux virtuels considérée comme une référence. Au niveau de la force tangentielle globale (couple), on peut conclure simplement que le chemin doit être proche du rotor. Ce qui est explicable par le fait que la méthode des travaux virtuels pour calculer le couple est appliquée sur le rotor.

Position du chemin	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
Couple [N.m]	149.9	146.2	148.5	151.7	153.6	153.6	153.6	153.6	153.6
Écart relatif	-2.4%	-4.9%	-3.4%	-1.3%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 2.4 – Couple instantané calculé par la méthode du tenseur de Maxwell et l'écart relatif avec le couple calculé par la méthode de travaux virtuels

Les résultats des calculs de couple et de pression radiale totale se stabilisent lorsque $k \geq 50\%$. De même, les courbes de pressions magnétiques radiale et tangentielle sont considérées identiques à partir de $k = 50\%$. En comparant le couple calculé à partir de force tangentielle avec la méthode de travaux virtuels, on a prouvé également que la force tangentielle globale est exacte dans cette région.

En conclusion, il n'existe pas une méthode simple pour valider le choix de la position du chemin. Toutefois, une stabilité des forces globales et locales est établie lorsque $k \geq 50\%$. De plus, la validation de la force tangentielle globale dans cette zone nous amène à choisir une position de chemin du côté rotor de l'entrefer.

Choix du pas de calcul

A chaque pas de calcul $\triangle t$, le rotor tourne d'un pas angulaire $\triangle \theta$ et un calcul de pression magnétique est effectué afin de construire la matrice spatio-temporelle de pression magnétique. La qualité du résultat et le temps de calcul dépendent largement du pas de calcul. Pour cela, nous présentons dans cette sous-section une étude pour trouver le meilleur compromis entre ces deux critères.

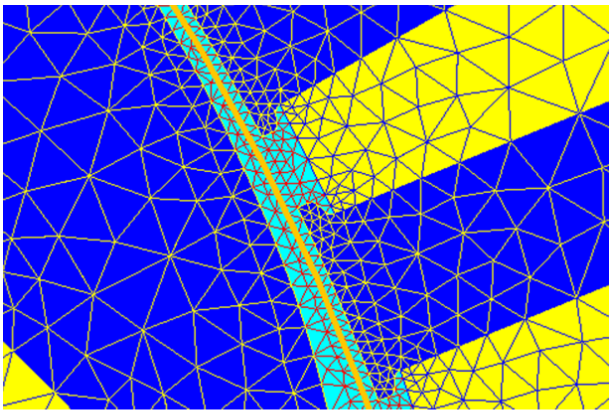


Figure 2.36 – Nœuds communs entre la région rotorique tournante et la région statorique fixe

La machine utilisée est une machine synchrone à rotor bobiné avec 2 paires de pôles, il suffit alors d'étudier les forces magnétiques sur une période électrique ce qui est équivalent à une demi période mécanique (rotation de 0° à 180° mécanique). La figure 2.36 montre un zoom sur le maillage électromagnétique du modèle au niveau de l'entrefer, la courbe en orange relie les nœuds communs entre la région rotorique tournante et la région statorique fixe.

Le rotor de la machine tourne alors de sa position initiale à 0° jusqu'à une demi période mécanique à 180° avec un pas angulaire $\triangle\theta$ (figure 2.37). Un maillage uniforme au niveau de l'entrefer est considéré, la distance angulaire d entre deux nœuds successifs dans l'entrefer est alors constante. Une étude présente trois possibilités de rapport entre $\triangle\theta$ et d et évalue l'effet de chacun :

1. $\triangle\theta$ aléatoire
2. $\triangle\theta = d$
3. $\triangle\theta = n.d$ où n est un nombre entier.

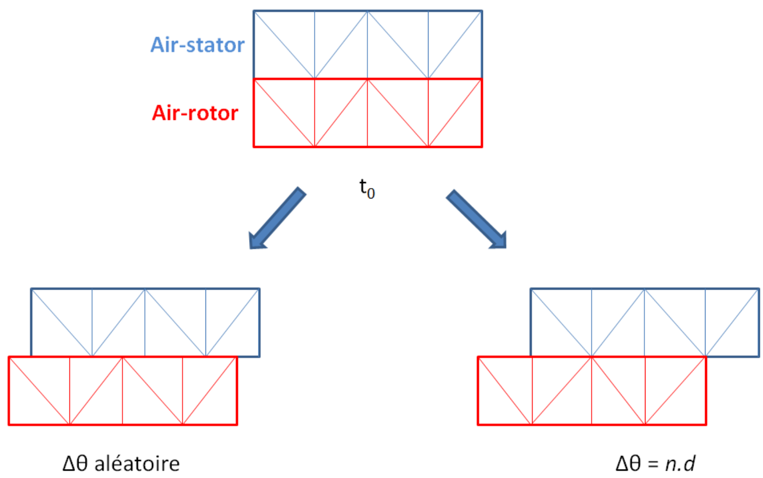


FIGURE 2.37 – Schéma illustrant le pas de calcul

La figure 2.37 montre une portion de 5 nœuds en commun dans l'entrefer de la machine. Les nœuds de la partie air-rotor et air-stator sont confondus pour les rotations du rotor d'un pas de $\triangle\theta = d$ et $\triangle\theta = n.d$, ce qui n'est pas le cas pour un pas $\triangle\theta$ aléatoire. Théoriquement, un pas $\triangle\theta$ aléatoire peut alors influer sur les résultats du calcul électromagnétique et ensuite vibratoire. La figure 2.38 montre quatre courbes de réponses en fréquence pour différents pas de calcul. Pour la courbe rouge de référence où $\triangle\theta = d$, on peut remarquer qu'un pas aléatoire peut créer du bruit numérique à haute fréquence (courbe bleue) même si ce pas est très fin (courbe cyan). On peut également voir sur la courbe bleue qu'il y a aussi une fausse émergence vers 4 kHz, dans la bande de fréquence particulièrement sensible au niveau acoustique. Cependant, un pas angulaire multiple de d, $\triangle\theta = n.d$ soit la courbe verte, produit une courbe FRF très proche, voire identique à la courbe de référence si n est un entier assez petit.

Même si un grand pas de calcul, soit n grand, peut réduire largement le temps de calcul, il réduit également la fréquence maximale du spectre de l'induction magnétiques et par la suite la fréquence maximale de la courbe FRF. Il faut donc choisir un compromis entre la finesse du pas et la fréquence maximale. Puisqu'on s'intéresse dans cette étude aux fréquences audibles, n sera choisi en conséquence. Pour un pas de calcul fixe, la fréquence maximale calculée sur la courbe de réponse en fréquence augmente avec la vitesse de rotation. Dans notre cas, on considère que 15 kHz à 3000 tr/m est largement suffisant, la courbe verte de la figure 2.38, où n=2, est alors un bon choix. Dans le cas où on s'intéresse à évaluer la réponse en fréquence pour des hautes fréquences à basse vitesse de rotation, il faut diminuer le pas de calcul.

Les courbes FRFs présentées sur la figure 2.38 montrent que le choix du pas de calcul est important pour un calcul de réponse en fréquence. En fait, un pas aléatoire, même si il est très fin, génère des pics importants à haute fréquence. Cela peut générer, ou non, selon la vitesse de rotation de la machine, des pics à basse fréquence. Un pic important, comme celui de la courbe bleue de la figure 2.38, qui n'a pas une explication physique est très gênant. Ce genre de pic peut conduire à de fausses conclusions.

Afin d'éviter ce genre de problème, on propose de considérer un maillage uniforme au niveau de l'entrefer et prendre un pas de calcul cohérent avec ce maillage.

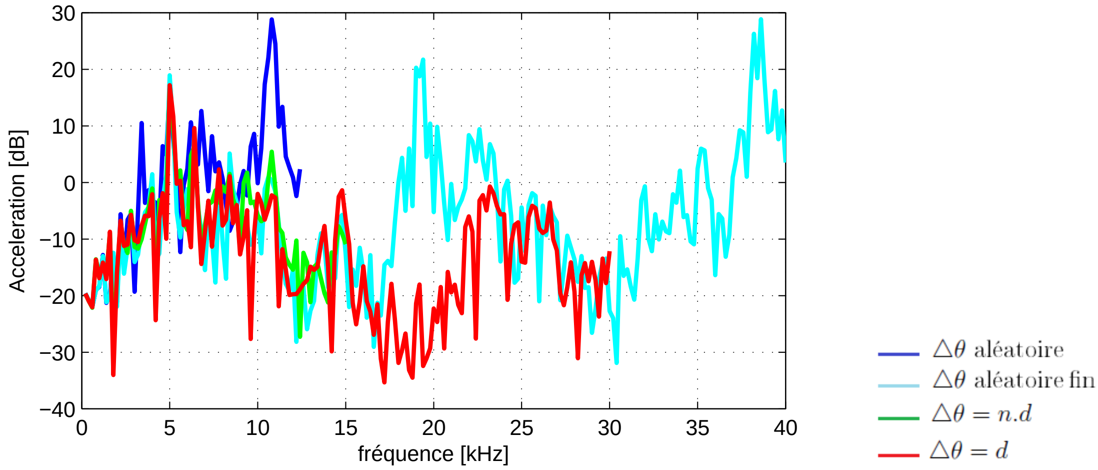


FIGURE 2.38 – Courbes de réponse en fréquence pour 4 pas de calcul différents

Pression magnétique radiale

Après avoir choisi la position du chemin de calcul et le nombre de pas de calcul, on peut calculer les pressions magnétiques spatio-temporelles. La figure 2.39 présente la pression magnétique radiale spatio-temporelle entre les angle 0° et 90°, pour une période électrique de la machine étudiée (équation 2.72). On peut localiser facilement sur la figure 2.39 spatialement 12 dents statoriques et temporellement deux passages de pôle rotorique.

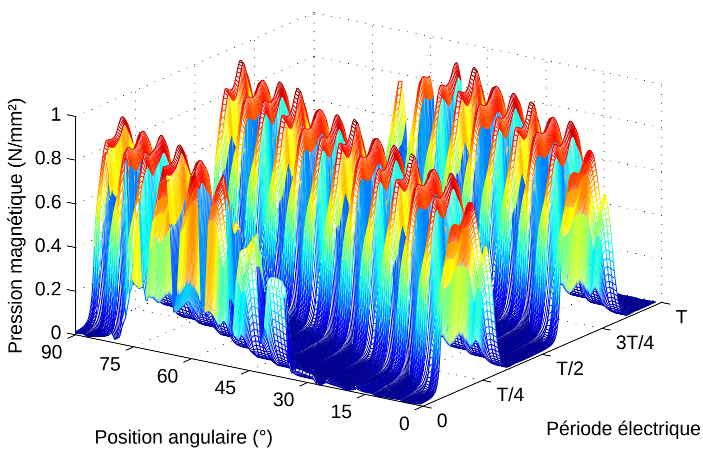


FIGURE 2.39 – Pression magnétique radiale spatio-temporelle appliquée sur le stator de la machine utilisée

L'analyse bi-dimensionnelle du contenu spectral en amplitude du signal de la figure 2.39 est présentée sur la figure 2.40, c'est à dire la grandeur $\sigma_{r,t}(\theta, t)$ de l'équation 2.73. Ce graphique présente le lien entre les périodicités spatiale et temporelle. Chaque tache de couleur représente un harmonique d'intensité croissante selon la graduation de couleur en dB de N/mm² (dB de MPa) à laquelle sont associées les valeur d'ordre spatial et temporel respectivement : m et n.

Les diagonales représentent les modulations entre indices de temps et d'espace. Nous retrouvons facilement dans ce graphique l'influence de la denture statorique avec le nombre de dents du stator ($Z_s = 48$) via l'harmonique $\{m{=}48,\ n{=}0\}$ et du nombre de pôles 2p=4 via l'harmonique $\{m{=}4,\ n{=}4\}$.

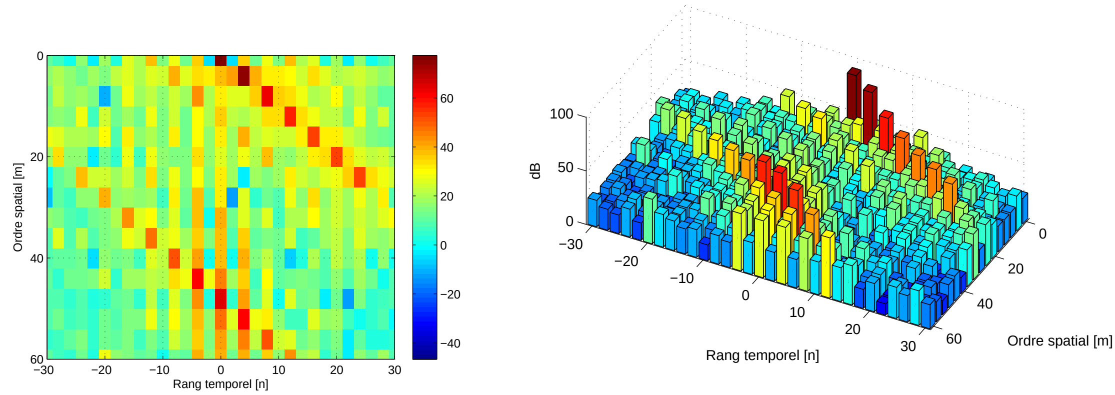


FIGURE 2.40 – Amplitude de la transformation de Fourier bi-dimentionnelle de la pression magnétique radiale appliquée sur le stator en dB (N/mm²)

Pression magnétique tangentielle

Les efforts tangentiels sont souvent négligés dans l'état de l'art [YAN81, BES09, SAI01]. Les auteurs considèrent que seules les vibrations radiales génèrent du bruit. Nous allons évaluer l'hypothèse de négliger l'effet des efforts tangentiels en détails dans le chapitre suivant. Pour l'instant, on ne néglige pas les efforts tangentiels dans le calcul vibratoire de la machine.

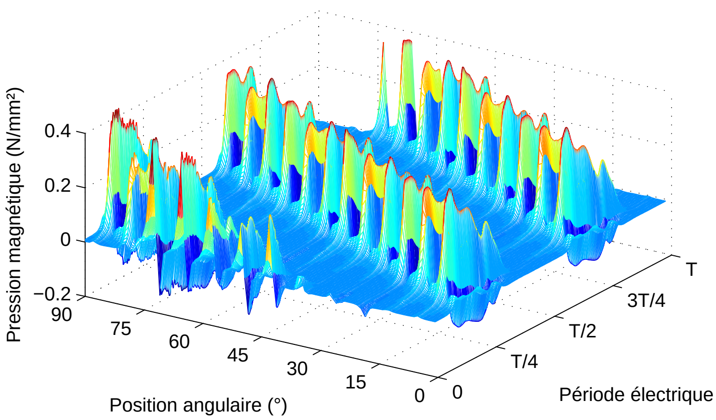


FIGURE 2.41 – Pression magnétique tangentielle spatio-temporelle appliquée sur le stator de la machine utilisée

La figure 2.41 présente le graphe spatio-temporel de la pression magnétique tangentielle appliquée sur le quart du stator pour une période électrique. Il est clair que la pression magnétique tangentielle est concentrée au niveau des bords des dents statoriques.

La transformée de Fourier de ce graphe (figure 2.41) est également présentée sur la figure 2.42. Les comportements harmoniques tangentiels sont sensiblement les mêmes que ceux des harmoniques radiales. Mais cela ne permet pas encore de conclure sur les importances relatives des pressions radiale et tangentielle. Il serait intéressant d'étudier les résultats vibratoires avec sources de pressions radiale et tangentielle dissociées.

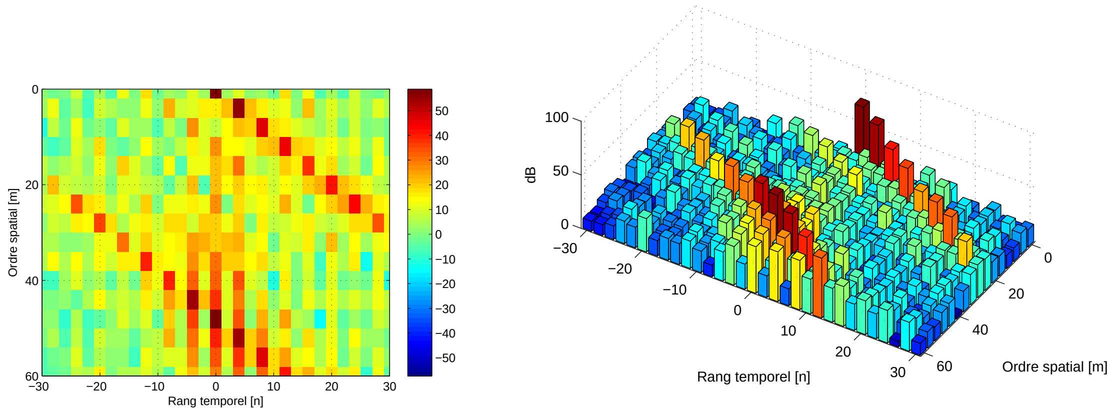


FIGURE 2.42 – Amplitude de la transformation de Fourier bi-dimentionnelle de la pression magnétique tangentielle appliquée sur un quart du stator pour une période électrique en dB (N/mm^2)

2.6.4 Projection des pressions magnétiques sur le maillage mécanique

En utilisant l'outil de projection implémenté dans Matlab déjà mentionné dans le paragraphe 2.5, les pressions magnétiques radiale et tangentielle (figures 2.39 et 2.41) sont projetées sur le maillage mécanique (figure 2.29) pour obtenir les forces magnétiques présentées sur les figure 2.43 et 2.44. Le calcul des pressions magnétiques est fait sur 1/4 de la machine. La périodicité est alors utilisée pour charger le maillage mécanique complet. Les forces appliquées sur les nœuds mécaniques de même position angulaire sont considérés identiques.

Une évaluation quantitative de cette projection en utilisant l'équation 2.93 nous donne une erreur de 1.4% et 0.6% pour les efforts radiaux et tangentiels respectivement. En tenant compte de la différence de discrétisation des deux maillages mécanique et électromagnétique, cette erreur est considérée acceptable si la répartition locale des forces est respectée.

Qualitativement, les graphes spatio-temporels des pressions magnétiques (radiale et tangentielle) calculées sur le maillage électromagnétique et ceux projetés sur le maillage mécanique sont comparés. Nous observons la même allure entre les graphes des efforts radiaux et tangentiels, ce qui valide notre outil de projection.

Un calcul vibratoire peut alors être effectué sur le modèle mécanique chargé par les efforts électromagnétiques radiaux et tangentiels.

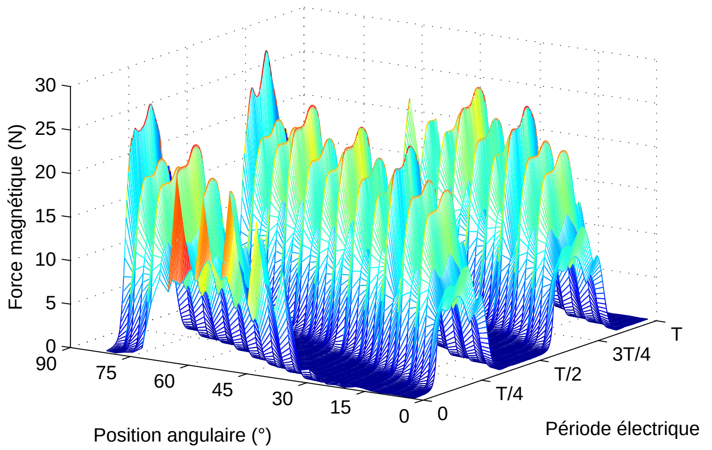


FIGURE 2.43 – Forces magnétiques radiales appliquées sur le maillage mécanique du stator de la machine utilisée

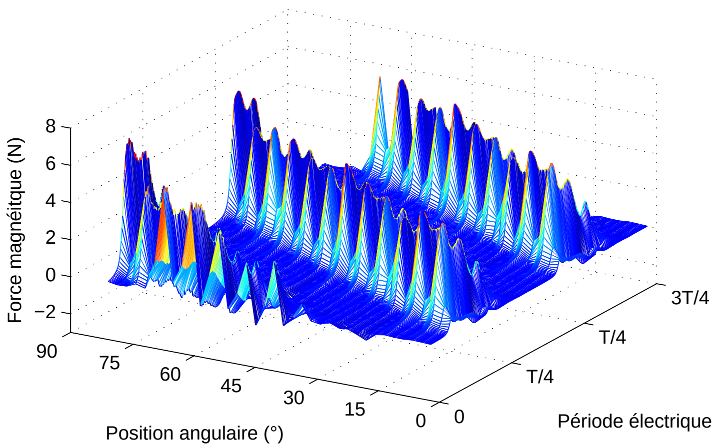


FIGURE 2.44 – Forces magnétiques tangentielles appliquées sur le maillage mécanique du stator de la machine utilisée

2.6.5 Comportements vibratoires du stator chargé

Le modèle mécanique est maintenant chargé par les forces radiales et tangentielles, en vu de l'analyse vibratoire. Il existe une infinité de points de fonctionnement (couple/vitesse) de la machine. A titre d'exemple, on détaille un seul point de fonctionnement à 3000 tr/mn déjà présenté précédemment. Ce point de fonctionnement n'est pas suffisant pour rendre compte de l'espace de fonctionnement, une montée en vitesse sera donc présentée sous la forme d'un spectrogramme.

Un spectrogramme est un outil pour présenter des signaux non-stationnaires en fonction du temps et de la fréquence. Dans notre cas, on voulait présenter les signaux vibratoires en fonction de la vitesse de rotation qui varie en fonction du temps et de la fréquence.

Calcul vibratoire pour un point de fonctionnement à 3000 tr/mn

Un calcul de réponse en fréquence est fait sur le maillage mécanique chargé par les efforts radiaux et tangentiels. Le calcul électromagnétique a été sur le chemin fictif situé au milieu de l'entrefer, avec 300 pas de calcul sur une période électrique, avec alimentation sinusoïdale pure au courant statorique et courant continu au rotor. La figure 2.45 présente la courbe de vibration radiale calculée sur un point situé sur le rayon extérieur du stator. Ce point d'observation a été choisi après quelques essais pour qu'il soit représentatif. Trois pics apparaissent sur la courbe de la figure 2.45. Le premier vers 5 kHz est de 18 dB correspond à la fréquence de résonance du mode (4,0) du stator. Le deuxième vers 6.2 kHz est de 8 dB, il correspond à la fréquence du mode (0,0) du stator. Le troisième pic à 11 kHz correspond à un mode de dents.

Le maximum d'amplitude vibratoire est obtenue lorsque la fréquence de l'harmonique correspondra avec la fréquence du mode propre possédant la même forme spatial : il y a coïncidence spatio-fréquentielle entre efforts magnétiques et comportement vibratoire de la structure.

Notre étude est orientée sur la vibro-acoustique du moteur. Pour cela, dans la suite, nous nous intéressons aux courbes de vibrations radiales. On présente également dans la figure 2.46 la courbe de vibration tangentielle. Cette vibration, même si elle n'est pas une source acoustique directe, peut provoquer des problèmes vibratoires sur la machine. Une étude de vibration tangentielle pourrait être intéressante pour des problèmes mécaniques liés à la fatigue. Dans un modèle d'un groupe motopropulseur complet, une vibration tangentielle sur le stator pourrait faire rayonner une autre pièce (carter, flasque ...) et générer des bruits solidiens.

A partir de la courbe de vibration tangentielle de la figure 2.46, on peut localiser un pic important vers 1.2 kHz. Si une pièce du groupe motopropulseur a une fréquence propre proche de 1.2 kHz alors ce pic peut être un soucis pour le comportement acoustique de cette pièce.

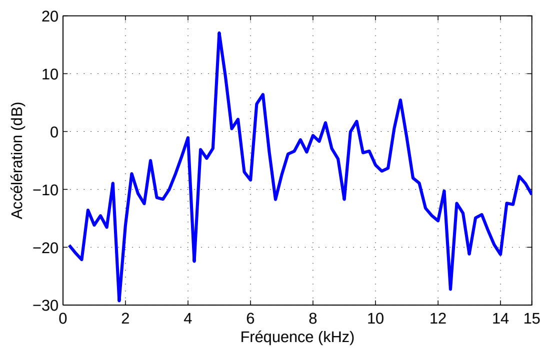


FIGURE 2.45 – Accélération radiale calculée sur un point aléatoire situé sur le rayon extérieur du stator

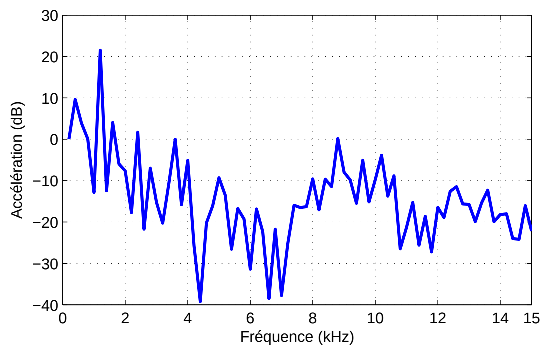


FIGURE 2.46 – Accélération tangentielle calculée sur un point aléatoire situé sur le rayon extérieur du stator

Calcul vibratoire pour une montée en vitesse

On s'intéresse maintenant à calculer le spectrogramme de vibration radiale pour plusieurs vitesses de rotation. La figure 2.47 montre deux montées en vitesse proposées par le fournisseur. La première a un couple constant jusqu'à 2500 tr/mn ensuite une puissance constante. La deuxième a un couple constant sur toute la plage de vitesse. Afin de valider notre modèle multi-physique de la machine utilisée, on compare le spectrogramme calculé par notre modèle simplifié à un spectrogramme de mesures expérimentales et à un spectrogramme calculé sur un modèle de groupe motopropulseur complet. Cette comparaison est faite sur une montée en vitesse à puissance constante (courbe bleu de la figure 2.47).

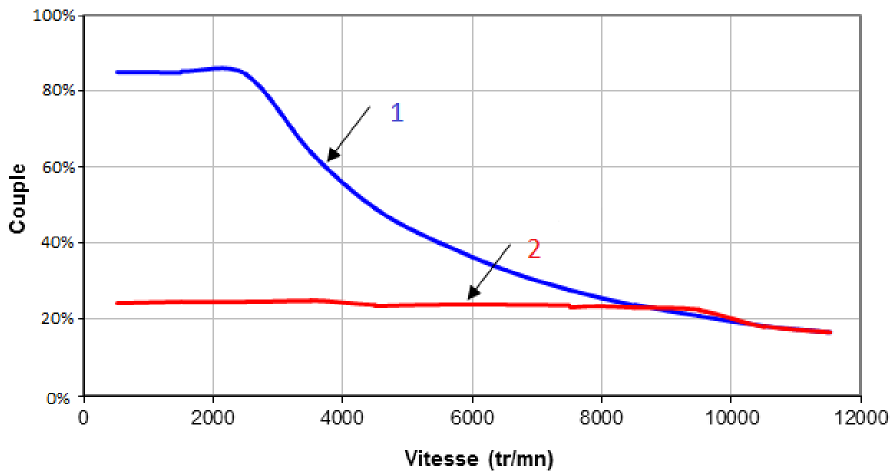


FIGURE 2.47 – Deux montées en vitesse possibles

La figure 2.48 présente trois spectrogrammes de vibrations pour une montée en vitesse. Un spectrogramme est utilisé pour présenter l'évolution du spectre vibratoire (comme par exemple sur la figure 2.45) en fonction de la vitesse du moteur (en tr/mn).

Le calcul réalisé sur notre modèle simplifié et sur le modèle du groupe motopropulseur considère un courant statorique sinusoïdal pur et courant rotorique purement continu. Cependant, le spectrogramme mesuré est obtenue avec un courant obtenu à partir de tensions continues découpées. On peut remarquer alors des raies à 5 kHz qui correspondent à la fréquence de hachage. Les modes propres principalement excités dans les trois spectrogrammes sont les modes de forme (4,0) et (0,0). Ces modes interviennent respectivement à 4200 Hz et 5200 Hz sur le spectrogramme mesuré, à 4400 Hz et 5200 Hz sur le spectrogramme calculé sur le modèle du groupe motopropulseur et à 5000 Hz et 6200 Hz sur notre spectrogramme. Ce décalage peut être expliqué par la simplification de modélisation du bobinage dans notre modèle et par l'effet des conditions aux limites. En fait, notre modèle simplifié est un stator en libre-libre. Dans le modèle du groupe motopropulseur, les liaisons entre les différentes pièces sont plus complexes. En plus, dans notre modèle simplifié le stator seul est modélisé, il est possible alors de rater les résonances mécaniques des autres pièces associées comme le rotor ou les flasques.

Dans les spectrogrammes de la figure 2.48, on observe les raies vibratoires ayant toujours des fréquences multiples de $2 \times p \times fréquence_{mécanique}$, où p est le nombre de paire de pôles. En comparant ces raies vibratoires dans les trois spectrogrammes, on observe que la raie 8 est excitée fortement à partir de 4000 tr/min, la raie 44

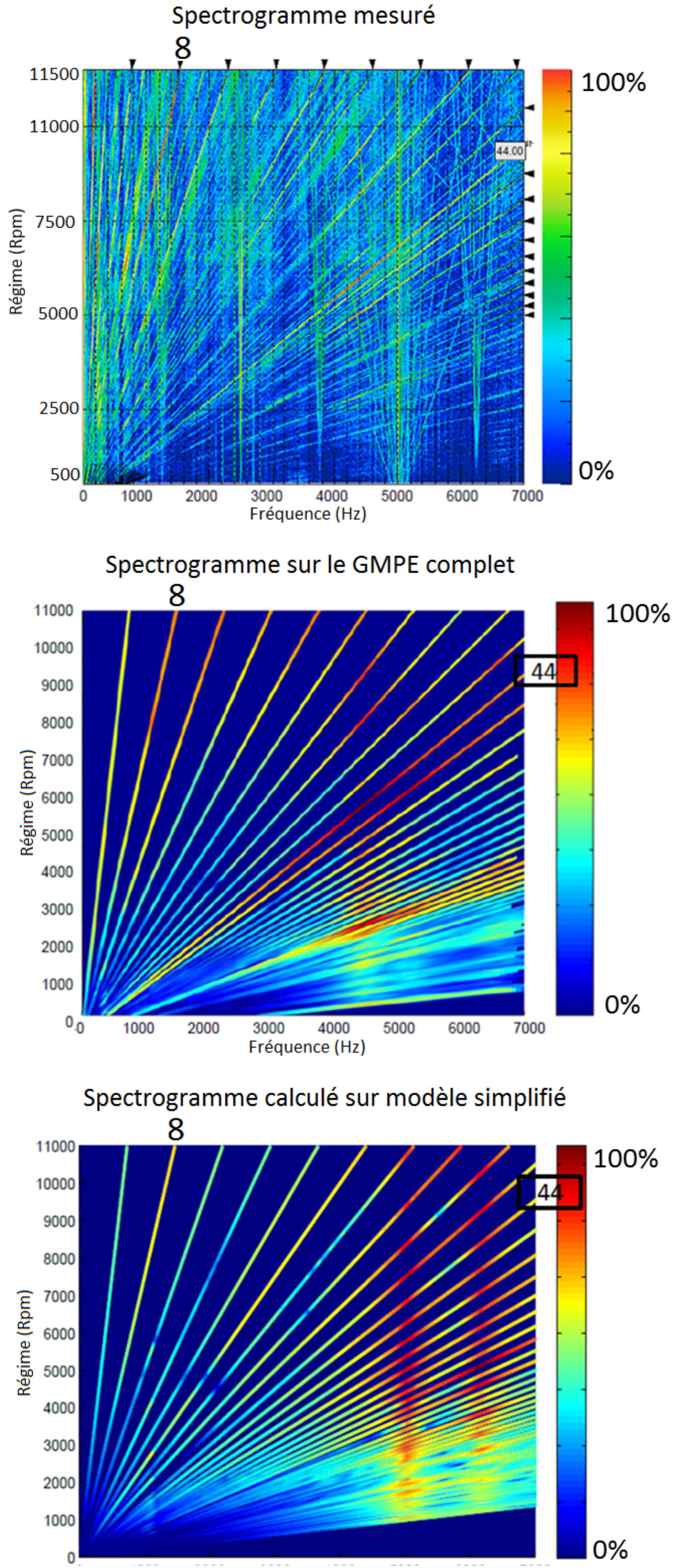


FIGURE 2.48 – Spectrogramme mesuré (haut), calculé sur le modèle du groupe motopropulseur électrique complet (milieu), et calculé sur le modèle simplifié (bas)

est excitée principalement par le mode (4,0) et la raie 48 par le mode (0,0). Cette observation est valable pour les trois spectrogrammes.

Dans cette thèse, on cherche le modèle le plus simple possible tout en s'assurant de ne pas perdre de phénomènes principaux. Notre modèle simplifié présente la même tendance générale que le modèle du groupe motopropulseur complet et les mesures expérimentales. Notre modèle est alors validé et prêt à utiliser pour réaliser des études.

Notre étude est orientée vibro-acoustique. Même si les fréquences inférieures à 7 kHz sont les plus importantes au niveau acoustique pour des raisons physio-acoustiques, il est intéressant d'observer les fréquences jusqu'à 20 kHz qui est la limite maximale de la bande audible humaine. La figure 2.49 présente le spectrogramme associé. On peut observer deux modes propres supplémentaires excitant la structure vers 8 et 11 kHz. La déformation modale de ces deux modes est localisée au niveau des dents statoriques. On peut noter que leur amplitude est plus faible que celle des modes (4,0) et (0,0). On n'observe aucun phénomène important au delà de 12 kHz.

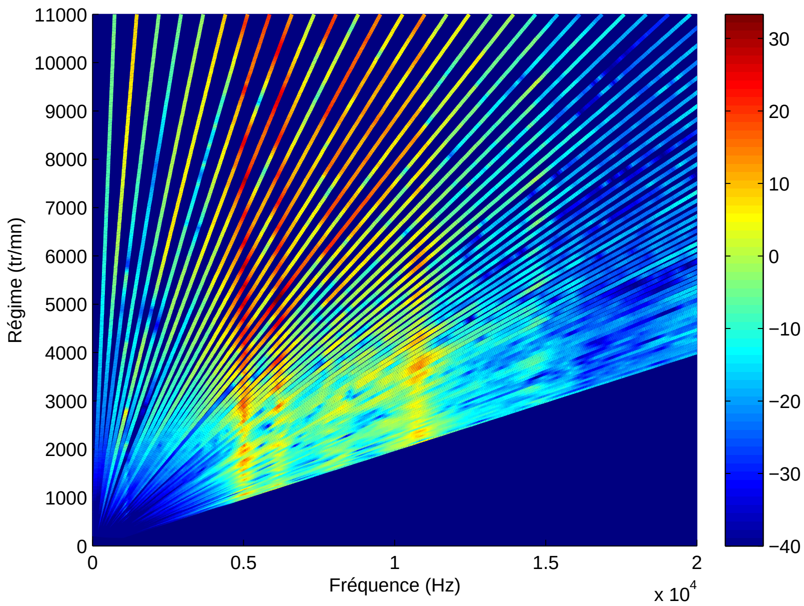


FIGURE 2.49 – Spectrogramme de vibration en dB (m/s²) calculé sur le stator chargé par les pression magnétiques radiale et tangentielle

2.7 Conclusion

Nous avons présentés dans ce chapitre les intérêts et l'utilité d'un modèle multi-physique pertinent (électromagnétique-vibratoire) d'une machine électrique. Ce modèle présente un gain important en temps de calcul par rapport à un modèle complet du groupe motopropulseur, tout en gardant des résultats acceptables. Ce modèle sert à calculer les comportements vibratoires d'origine électromagnétique d'une machine électrique. Le modèle 2D électromagnétique et le modèle 3D mécanique vibratoire de la machine sont maillés avec une discrétisation différente, ce qui nécessite un transfert de champ via l'outil de couplage implémenté dans Matlab. Cet outil sert à projeter les pressions magnétiques calculées par le maillage électromagnétique sur le maillage mécanique.

Dans ce chapitre, quelques études sur la méthode de calculs de pressions magnétique et ses limites (position du chemin de calcul, bruit numérique et pas de calcul ...) sont présentées. Une réflexion sur la modélisation mécanique est également faite, et quelques choix de modélisation (prise en compte des bobinages, convergence du maillage) sont pris et justifiés.

L'outil de couplage et le modèle multi-physique sont considérés valides grâce aux comparaisons avec un modèle éléments finis du groupe motopropulseur complet et des mesures expérimentales. Cet outil est donc valable pour d'autres modèles de machines électriques, à condition que la machine soit non vrillée. Cet outil de modélisation multi-physique de machine électrique va permettre de nouvelles études spécifiques, notamment l'application d'une méthode d'optimisation sur des critères vibratoires (donc harmoniques) malgré la lourdeur du modèle.

Bibliographie

[BAR03] Olivier Barre, “Contribution à l’étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatistique”, approche numérique et validation expérimentale, thèse de doctorat, École Centrale de Lille, 2003.

[BEN01] S. Benfratello, G. Muscolino, “Mode-superposition correction method for deterministic and stochastic analysis of structural systems”, Computers and Structures, Vol. 79, Iss : 26-28, Nov. 2001, pp. 2471-2480.

[BES09] J. Le Besnerais, “Reduction Of Magnetic Noise In PWM-Supplied Induction Machines - Low-Noise Design Rules And Multi-Objective Optimisation”, Thèse de Doctorat de l’Ecole Centrale de Lille, 2009.

[BOS11] A. Bossavit, “Virtual power principle and Maxwell’s tensor : which comes first ?”, COMPEL, Vol. 30 Iss : 6, pp. 1804-1814, 2011.

[CAR12] A. Carpentier, N. Galopin, O. Chadebec, G. Meunier, “Comparaison of global magnétic force computation with a volume integral method”, Communication orale à CEFC’2012, Oita, Japon, 11-14 novembre, 2012.

[CAR59] C. J. Carpenter, “Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts”, Proceedings of the IEE-Part C : Monographs, Vol. 27, No. 11, pp. 19-28, 1959.

[COU83] J. L. Coulomb, “A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stifness”, IEEE Trans. Magn., Vol. 19, No. 6, pp. 2514-2519, 1983.

[DUP13] J. Dupont, P. Bouvet, J. Wojtowicki, “Simulation of the Airborne and Structure-Borne Noise of Electric Powertrain : Validation of the Simulation Methodology”, SAE Technical Paper 2013-01-2015, 2013.

[FLU12] Cedrat, “Guide d’utilisation Flux 11”, Juillet 2012.

[GAL07] N. Galopin, “Modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques”, Thèse de doctorat de l’Université de Paris XI, 2007.

[GIE05] J. F. Gieras, C. Wang, J. C. Lai, “Noise Of Polyphase Machines”, CRC Press 2005, ISBN-10 : 0824723813.

[GRI99] D. J. Griffiths, “Introduction to Electrodynamics”, 3rd edition, ISBN 0-13-805326-X, 1999.

[HEN04] F. Henrotte, G. Delige, K. Hameyer, “The eggshell approach for the computation of electromagnatic forces in 2D and 3D”, COMPEL, Vol. 23, No. 4, pp. 996-1005, 2004.

[LIW46] M. Liwschitz-Garik, C. C. Whipple, “Electric Machinery, A-C Machines”, D. Va, Nortrand Company 1946, ASIN : B000PCCU6K.

[MAT11] MATLAB and Statistics Toolbox Release 2011b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, Unites States.

[MED98] L. Henrique Alves De Mendeiros, “Méthodes de calcul de forces électromagnétiques. Application au calcul des distributions de forces sur les aimants permanents”, Thèse de doctorat, Grenoble-INP, 1998.

[NAS12] MSC Nastran, “Quick Reference Guide”, 2012.

[PEL12] P. Pellerey, “Etude et optimisation du comportement vibro-acoustique des machines électriques, application au domaine automobile, thèse de doctorat”, Université de technologie de Compiègne, 2012.

[PYR08] J. Pyrthonen, T. Jokinen, V. Hrabovcova, “Design of Rotanting Electrical Machines”, Wiley 2008, ISBN : 978-0-470-69516-6.

[REN92] Z. Ren et A. Razek, “Local force computation in deformable bodies using edge elements”, IEEE Trans. Magn. Vol. 28, No. 2, pp. 1212-1215, 1992.

[REN97] Z. Ren, “Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels - Etude des formulations duales - Modélisation des systèmes électromagnétiques-mécanique couplés”, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Sud, mars 1997.

[SAD92] N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, J. P. A. Bastos, “Sure le calcul des forces magnétiques”, J. Phys III, Vol. 2, pp. 859-870, 1992.

[SAD93] N. Sadowski, “Modélisation Des Machines Electriques A Partir De La Résolution Des Equations Du Champ En Tenant Compte Du Mouvement Et Du Circuit D'alimentation”, Thèse de doctorat de l'institut national Polytechnique de Toulouse-1993.

[SAI01] J. Saint-Michel, “Bobinage des machines tournantes à courant alternatif”, Technique de l'ingénieur D3420, Fév. 2001.

[SEG06] Guy Séguier, “Electrotechnique industrielle”, Tec & Doc Lavoisier, 2006.

[TIM89] P. L. Timar, A. Fazekas, J. Kiss, A. Miklos, and S. J. Yang, “Noise and vibration of electrical machines”, Elsevier Science, 1989, ISBN-10 : 0444988963.

[VAN12] M. Van der Giet, K. Kasper, R.W. De Doncker, K. Hameyer, “Material parameters for the structural dynamic simulation of electrical machines”, Actes du congrès : XXth International Conference on Electrical Machines (ICEM), pp. 2994-3000, 2012.

[WIN88] A.N. Wingnall, A.J. Gilbert and S.J. Yang, “calculation of forces on magnetized ferrous cores using the Maxwell stress method”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, Jan. 1988.

[WOO68] H. H. Woodson et J. R. Melcher, “Electromechanical dynamics - Part II : fields, forces and motion”, John Wiley & Sons, 1968.

[YAN81] S. J. Yang, “Low Noise Electrical Motors”, Clarendon Press 1981, Oxford University, New York, ISBN-10 : 0198593325.

[ZAR06] D. Zarko, T. A. Lipo, D. Ban, “Analytical Calculation of Magnetic Field Distribution in the Slotted Air Gap of a Surface PM Motor Using Complex Relative Air Gap Permeance”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 42, No. 7, pp. 1838-1837, Juillet 2006.

[ZHU02] Z. Q. ZHU, D. Howe, C. C. Chan, “Improved Analytical Model for Predicting the Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent-Magnet

Machines", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 1, pp. 229-238, Jan. 2002.

Chapitre 3

Études spécifiques et optimisation de la machine grâce à l'outil de couplage multiphysique

3.1 Introduction

L'outil présenté dans le premier chapitre est ici utilisé pour étudier les comportements vibratoires d'origine électromagnétique d'une machine électrique. Cependant, ce nouvel outil n'est encore maitrisé au niveau des avantages et des inconvénients. Il est ainsi possible d'étudier l'impact vibratoire des chargements radiaux et tangentiels, contrairement à un calcul analytique. De plus, l'étude de l'impact de la MLI (modulation de largueur d'impulsion) sur un modèle éléments finis (EF) n'est pas évident. Dans un contexte de conception, on cherche également à optimiser notre machine. Une optimisation est généralement une étude lourde, surtout sur un modèle EF. Dans ce chapitre, on pose la question de la faisabilité de ces études sur un modèle EF avec l'outil de couplage.

Dans ce contexte, nous présentons, tout d'abord, quelques études spécifiques de la machine déjà présentée dans le chapitre précedent. Nous évaluons les effets de négliger la pression magnétique tangentielle dans le calcul vibro-acoustique. Ensuite, nous présentons et discutons un spectrogramme vibratoire de la machine en évaluant les effets vibratoires de la fréquence de découpage du courant rotorique.

Ensuite, une optimisation est faite également sur la machine étudiée. Un état de l'art des méthodes d'optimisation est présenté, pour ensuite choisir une méthode adaptée à notre modèle multi-physique. Une méthode d'optimisation rapide et fiable est choisie et présentée. Cette méthode utilise une surface de réponse adaptative.

Nous allons utiliser le modèle multiphysique numérique simplifié présenté dans cette thèse. Cependant, pour réaliser une optimisation il reste toujours l'inconvenient du temps de calcul. De nombreux calculs EF électromagnétiques sont nécessaires pour faire une optimisation. Finalement, des applications de cette méthode d'optimisation liée à l'outil de couplage sont présentées.

3.2 Etudes spécifiques

3.2.1 Effet des pressions magnétiques tangentielles sur la vibration radiale de la machine

La plupart des publications dans le domaine électromagnétique-vibratoire négligent les effets des pressions tangentielles sur la vibration radiale de la machine [GIE06]. Les études analytiques [ISL10, LEB10] et numériques [LO00, BOE08] se concentrent sur les forces radiales comme source acoustique dans les machines électriques. Dans [GAR99], les auteurs affirment que les forces tangentielles ont des effets non négligeables, mais ils n'évoquent que des grandes machines de diamètre 0.75-0.95m. On peut se poser la question de la validité de ces conclusions pour des machines de plus petit diamètre comme la notre. Dans cette partie, nous évaluons les effets des efforts tangentiels.

Effets des forces tangentielles dans un calcul statique

Nous considérons le modèle du stator de la figure 3.1. Une pré-étude statique est alors réalisée sur ce modèle afin de regarder l'influence d'un chargement tangentiel sur le déplacement radial. Comme ce calcul est statique, nous sommes obligés d'imposer des conditions aux limites. Nous choisissons alors d'imposer des conditions aux limites sur deux lignes situées sur la face extérieure du stator (marques en bleu). Ces deux lignes sont considérées encastrées.

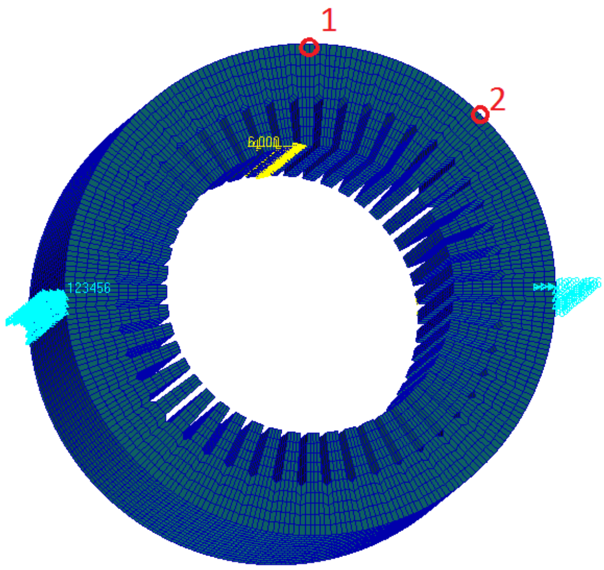


FIGURE 3.1 – Modèle statorique pour l'étude de l'effet de la pression tangentielle sur l'accélération radiale du stator

Afin d'évaluer les effets des forces radiales et tangentielles sur le déplacement de la surface extérieure du stator, on applique un chargement de force sur une ligne située au milieu d'une dent statorique (flèches jaunes) et on mesure les déplacements radiaux sur deux points décalés de 45° situés sur la surface extérieure du stator.

Afin d'appliquer des chargements réalistes, on considère une force moyenne, radiale ou tangentielle, sur une dent. Un chargement radial réaliste donne un déplacement radial de $1 \times 10^{-3} mm$ sur le point 1 et de $1.94 \times 10^{-4} mm$ sur le point 2. Cependant, un chargement tangentiel réaliste, comme sur la figure 3.2, donne un déplacement radial de $5.4 \times 10^{-9} mm$ sur le point 1 et de $1.9 \times 10^{-4} mm$ sur le point 2. On remarque que l'amplitude du déplacement d'un point (le point 2) situé sur la surface extérieure du stator est presque le même pour un chargement radial ou tangentiel réaliste sur une dent décalée de 45° du point d'observation.

Cette simple étude statique nous conduit à ne pas négliger la pression magnétique tangentielle dans les calculs vibratoires mais n'est pas suffisante car les excitations réelles sont dynamiques.

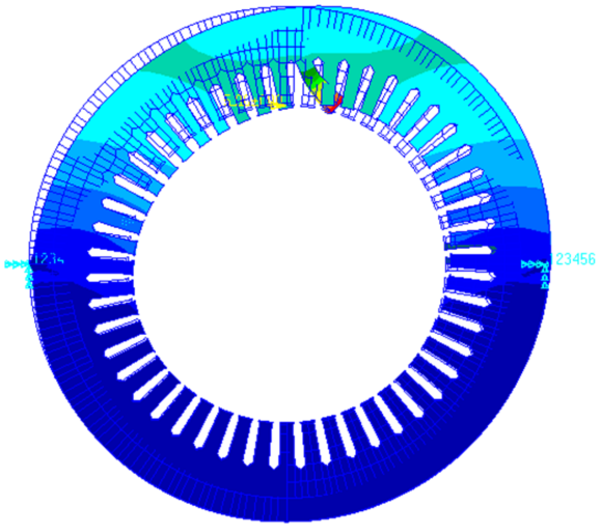


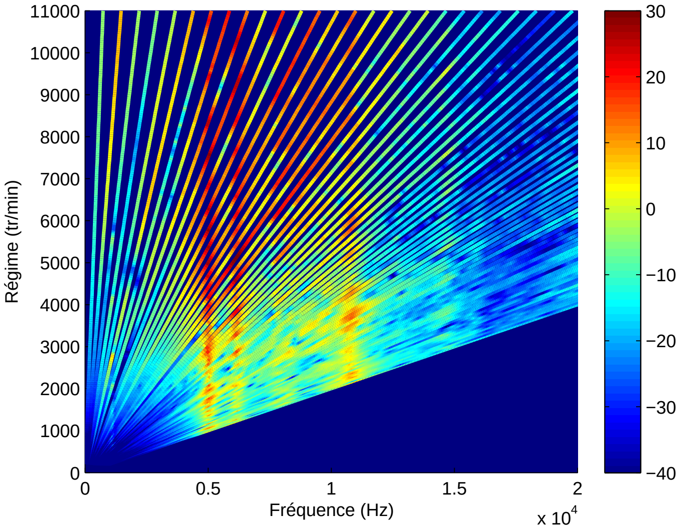
FIGURE 3.2 – Calcul statique sur le modèle du stator avec un chargement tangentiel réaliste sur une dent statorique

Effets de forces tangentielles dans un calcul dynamique

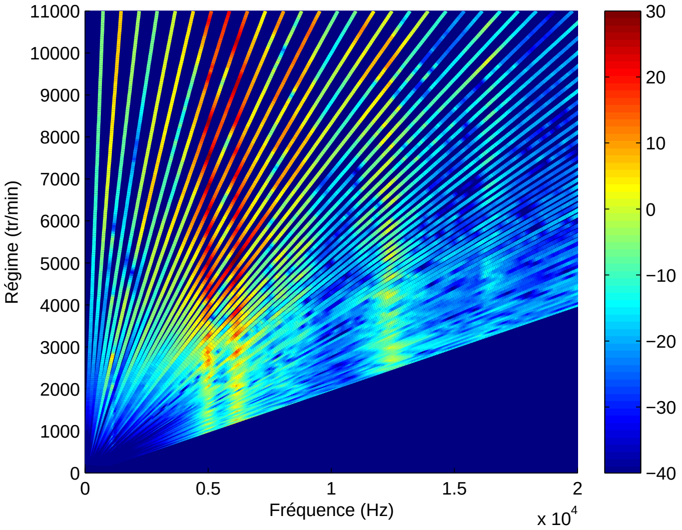
Afin de bien comprendre, dans des conditions réalistes, l'effet des chargements tangentiels, nous réalisons des calculs dynamiques sur le modèle du stator avec chargement radial seul, puis tangentiel seul, et enfin en considérant les deux. La figure 3.3 nous montre les spectrogrammes calculés sur le stator pour un chargement complet, radial et tangentiel. Les raies à basses fréquences (moins de 4 kHz) sont excitées par le chargement radial et apparaissent dans le spectrogramme de chargement complet. C'est particuliérement remarquable pour les harmoniques 8 et 24 qui sont fortement excitées par le chargement radial. A haute fréquence, après 16 kHz, le spectrogramme de chargement tangentiel montre des amplitudes négligeables. On peut remarquer également que dans le spectrogramme avec chargement tangentiel, les amplitudes importantes sont obtenues lors de phase de résonance. Autrement dit, on ne trouve pas dans le spectrogramme avec chargement tangentiel de raies vibratoires importantes sans phénomène de résonance.

Le mode de la forme (4,0) à 5 kHz apparait dans les trois spectrogrammes, même s'il est plus faible pour le chargement tangentiel. Cependant, le mode de la forme (0,0) à 6.2 kHz n'est pas excitable par un chargement tangentiel. Cela peut s'expliquer par la forme de chaque mode. En fait, le mode de la forme (4,0) est facilement excité par les forces radiales, ce phénomène est moins important lorqu'il est excité par les forces tangentielles. Et le mode respiration de la forme (0,0) n'est pas excitable par les forces tangentielles.

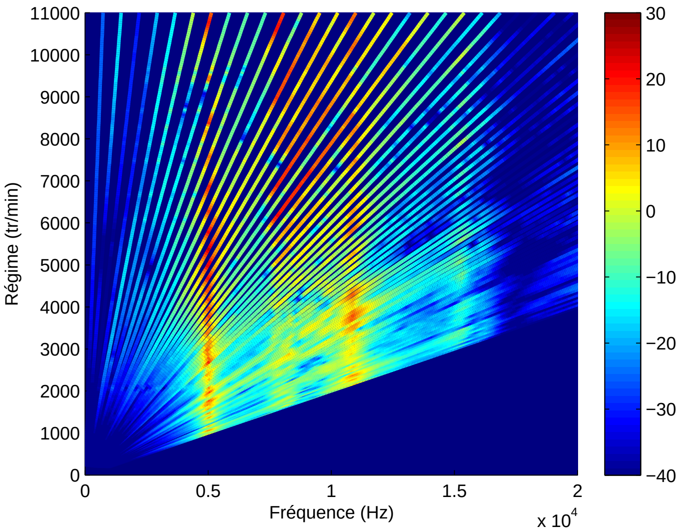
En conclusion, on peut classer les modes propres en des modes d'origine radiales pures (mode (0,0) à 6.2 kHz), tangentielles pures (mode à 11 kHz) ou bien radiales et tangentielles à la fois (mode (4,0) à 5 kHz).



Chargement radial et tangentiel



Chargement radial



Chargement tangentiel

FIGURE 3.3 – Spectrogrammes de vibration en dB (m/s^2) du stator avec chargement complet, radial et tangentiel

L'étude des modes propres faite dans le chapitre précedent était limité à 7 kHz. Le spectrogramme de chargement tangentiel de la figure 3.3 montre des phénomènes de résonance à des fréquences supérieures à 7 kHz. En théorie, un chargement tangentiel peut exciter facilement un mode de dents à ces fréquences. En calculant les modes propres à ces fréquences supérieures, on ne trouve, à partir de 8 kHz, que des modes de dentures. Par exemple, la figure 3.4 montre le mode propre à 11 kHz, c'est un mode de denture de la forme (4,1) car seules les dents bougent, ce qui nous conforte dans cette hypothèse.

Toutefois, il existe des modes excités par chargement radial, ou tangentiel, mais n'apparaissent pas dans le spectrogramme de chargement complet, comme le mode radial à 12.5 kHz. Il est possible qu'un phénomène de compensation se soit produit lors d'un chargement complet.

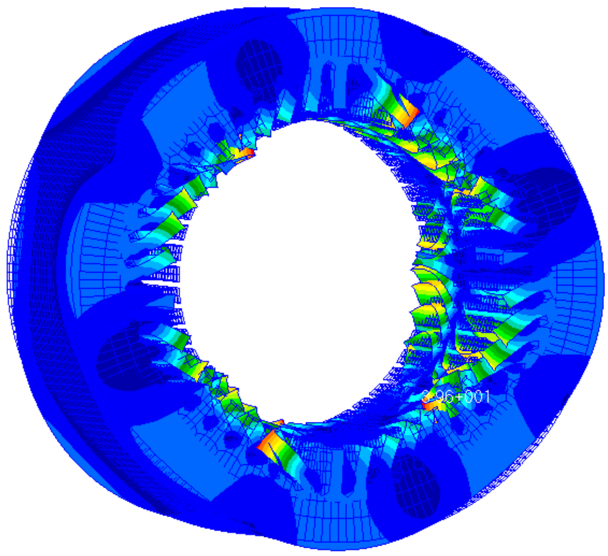


FIGURE 3.4 – Mode propre du stator à 11 kHz

3.2.2 Harmoniques vibratoires d'origine électronique

Les courants alimentant notre machine électrique (figure 3.5) sont obtenus à partir de tensions continues découpées, la plupart du temps selon une technique de MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion). Par conséquent, ces courants, qui sont une image filtrée des tensions utilisées, possèdent en partie les mêmes composantes harmoniques.

Il existe différentes méthodes de réalisation de signaux MLI. La MLI calculée est généralement réservée aux fortes puissances. Dans les autres cas, une modulation intersective ou vectorielle est utilisée. L'objectif de définir précisément un fondamental d'amplitude et fréquence voulues étant le même, on peut légitimement se demander quelles sont les différences essentielles entre ces méthodes. La réalisation de l'implantation sera différente : on peut privilégier l'analogique pour la MLI intersective et plutôt numérique pour la MLI vectorielle. La MLI intersective agit au niveau des 3 phases alors que la vectorielle agit sur les composantes d'un vecteur tension. C'est particulièrement pratique pour l'automaticien qui réalise sa régulation à partir de modèle en composantes directe et quadrature.

Plusieurs études analytiques ont été faites sur les alimentations statoriques d'une machine asynchrone [BUL04, LEB13]. On se pose la question de la faisabilité d'une étude qui prend en compte les harmoniques de hachage dans un modèle éléments finis.

Comme beaucoup d'études ont déjà été réalisées sur les harmoniques issue de l'onduleur (coté stator), on propose alors d'étudier les harmoniques de hachage dans le courant rotorique. Nous présentons l'effet du découpage des tensions d'alimentation sur la signature vibratoire, et ensuite nous fournissons quelques règles de conception.

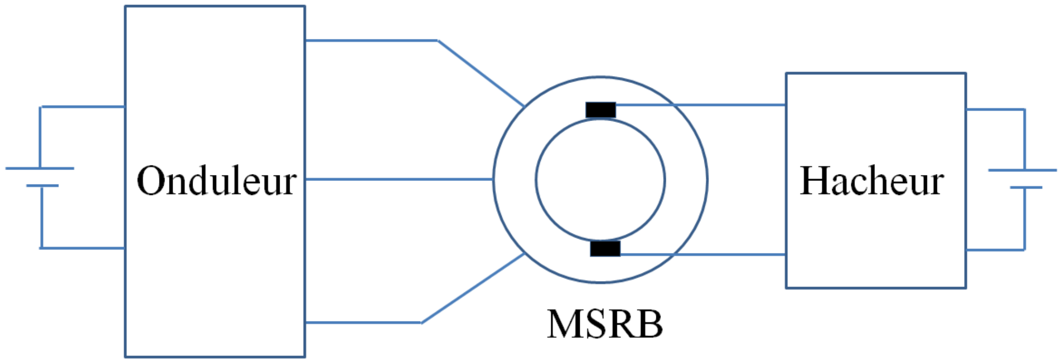


FIGURE 3.5 – Schéma d'alimentation d'une machine synchrone à rotor bobiné

Harmonique de hachage rotor

Dans notre cas, la machine est à rotor bobiné, l'excitation rotorique est donc produite à partir d'un courant continu obtenu grâce au hachage d'une tension constante. Le hachage peut être vu comme une MLI possédant une modulante continument variable par modification du rapport cyclique.

Nous allons détailler ce processus de passage de tension en courant par un hacheur. Le contenu harmonique de la tension sera composé de raies de hachage de fréquence f_h :

$$f_h = kf_h \tag{3.1}$$

avec f_h la fréquence de hachage (fréquence de la porteuse) et k un entier.

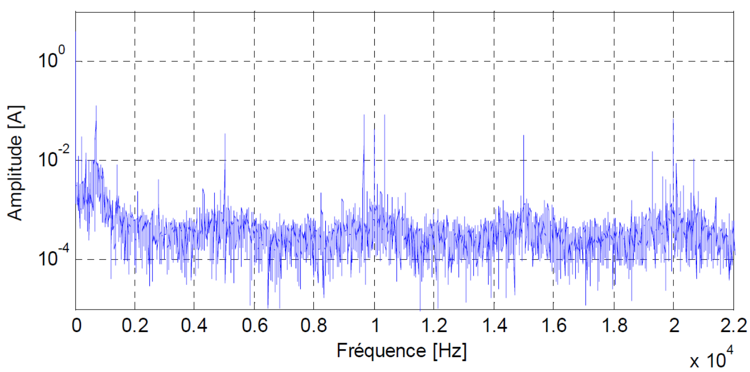


FIGURE 3.6 – Spectre de courant rotorique issu d'un hachage

Le spectre de courant est identique, au filtrage haute fréquence (passe bas) près, au spectre de sa tension associée. On présente donc à la figure 3.6 un spectre du courant rotorique mesuré illustrant les explications précédentes. On remarque la fréquence de hachage à 5 kHz et ses multiples. De plus, on peut retrouver des raies issues des harmoniques présentes au stator par le jeu des réactions magnétiques induit-inducteur, comme les modulations autour de 10 kHz et 20 kHz.

On observe ensuite grâce au spectrogramme de courant présenté à la figure 3.7 que la fréquence des harmoniques de hachage est fixe avec le régime. On retrouve encore une fois les éventails d'harmoniques dus au découpage de la tension statorique à cause des réactions magnétiques induit-inducteur.

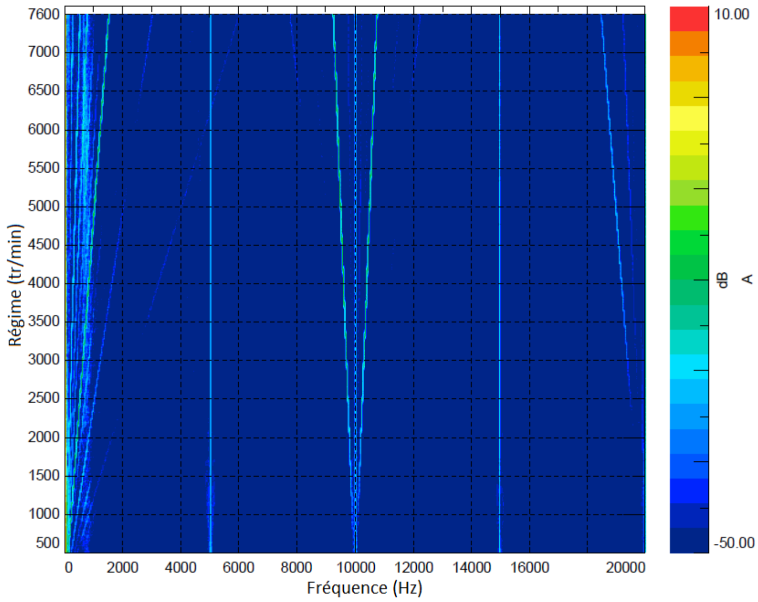


FIGURE 3.7 – Spectrogramme de courant rotorique issu d'un hachage

Afin de déterminer comment vont se comporter les harmoniques de hachage de courant dans le domaine vibratoire, on réalise un développement analytique en déterminant une expression simplifiée de l'induction d'entrefer d'origine rotorique pour finalement se ramener à une expression porteuse d'informations sur les fréquences des efforts magnétiques d'entrefer.

On suppose un développement au premier harmonique des grandeurs magnétiques tout en ajoutant un harmonique de courant de hachage. Ainsi, en utilisant l'expression de l'induction rotorique, on peut écrire l'induction magnétique radiale simplifiée crée par le rotor B_r suivant l'équation suivante :

$$B_r = B_0 cos(p\theta - \omega t) + B_h cos\left[p\theta - (\omega \pm \omega_h)t\right] \qquad (3.2)$$

avec ω_h la pulsation de hachage, p le nombre de paire de pôles, B_0 l'amplitude de l'induction crée par un courant constant rotorique dans l'entrefer et B_h l'amplitude de l'induction crée par le courant de hachage dans l'entrefer.

L'induction rotorique dans l'entrefer évolue en fonction du temps par rotation du rotor à la vitesse $\omega_{méca}$. Cela se traduit par une pulsation $p\omega_{méca} = \omega$, soit la pulsation de synchronisme dans l'induction rotorique. En calculant le carré de l'induction (toujours proportionnelle à une grandeur près à la pression magnétique d'entrefer) et en supprimant les termes constants, on obtient :

$$B_r^2 = \frac{B_0^2}{2} cos(2p\theta - 2\omega t) + \frac{B_h^2}{2} cos\left[2p\theta - 2(\omega \pm \omega_h)t\right] + B_0 B_h \left\{cos\left[2p\theta - (2\omega \pm \omega_h)t\right] + cos(\pm\omega_h t)\right\} \qquad (3.3)$$

Comme a priori $B_0B_h > \frac{B_h^2}{2}$, les termes harmoniques intéressants dans cette étude se situent donc dans le dernier terme de l'équation précédente. On retrouve après simplification les harmoniques spatio-temporels de pression magnétique ω' :

$$\begin{cases} \omega' = 2\omega \pm \omega_h = 2p\omega_{meca} \pm \omega_h & m = 2p \\ \omega' = \omega_h & m = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Les fréquences de hachage rotorique, qui se retrouveront dans les spectres vibratoires, sont donc : la fréquence de hachage (avec un ordre spatial 0 associé), ainsi que sa modulation à $2p$ fois la fréquence de rotation mécanique (avec un ordre spatial 4 associé).

On pourra aussi retrouver, de façon beaucoup plus faible (deuxième terme de l'équation 3.3) en B_h^2, des harmoniques vibratoires dues au hachages sous forme de modulation entre la pulsation de synchronisme et la pulsation des harmoniques de hachages ($\omega \pm \omega_h$).

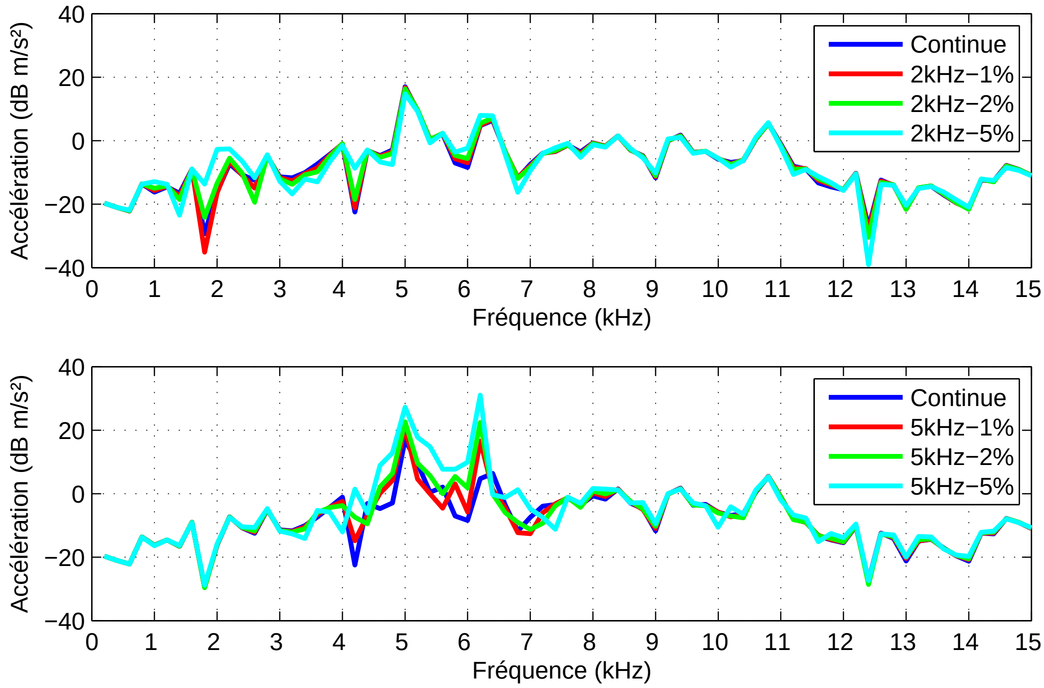


FIGURE 3.8 – Spectres de réponse en fréquence du modèle étudié selon le type de courant rotorique

Pour vérifier l'effet de ces harmoniques numériquement, on injecte un harmonique de 2 kHz puis 5 kHz dans le courant rotorique. L'amplitude de l'harmonique injectée varie entre 1% et 5%. La figure 3.8 présente les courbes d'accélération du stator selon le type de courant rotorique. On remarque que l'harmonique de courant à 5 kHz excite significativement les modes (4,0) et (0,0) qui sont vers 5 et 6 kHz. L'écart peut atteindre 15 dB pour 5% d'amplitude de l'harmonique à 5 kHz. Concernant l'harmonique de courant à 2 kHz, on trouve que l'écart vibratoire est faible voire négligeable.

Si on a le choix de la fréquence de hachage, il est recommandé de choisir une fréquence de hachage qui ne soit pas proche d'une fréquence propre d'un mode de la forme $2p$ ou 0.

3.3 Optimisation de la machine sur les critères de couple et de pression magnétique

L'amélioration d'un design par optimisation est bien souvent un objectif majeur. Cependant, même avec les simplifications faites en modélisation, le modèle multi-physique numérique reste lourd pour appliquer un algorithme d'optimisation. De plus, le comportement vibro-acoustique ne dépend pas d'un critère simple mais d'une multitude d'harmoniques. On se pose la question de la méthode d'optimisation (quel critère choisir) sous ces conditions.

On présente une introduction sur l'optimisation pour les machines électriques, ensuite on propose d'utiliser une méthode d'optimisation basée sur une surface de réponse dynamique. Une application est faite, en optimisant la machine sur des critères de couple (qualité et niveau) et sur des critères inhabituels comme les harmoniques de pression magnétique.

3.3.1 Généralité sur l'optimisation

La conception des machines électriques exige à la fois un modèle qui, satisfait au mieux les besoins fonctionnels, et en même temps, répond à des critères économique et mécanique.

Plusieurs problèmes de conception peuvent être pris en compte en optimisant une machine électrique :

- minimiser le couple réluctant,
- minimiser les pertes de joules,
- maximiser le couple moyen,
- etc.

Ce critère (à maximiser ou minimiser) est une grandeur scalaire significative de l'objectif à atteindre. Il peut être une grandeur fondamentale du dispositif étudié (un couple, une force ...) ou une combinaison de plusieurs calculs sur des grandeurs variant à la fois dans l'espace et le temps, comme par exemple l'induction magnétique dans l'entrefer en fonction de la position du rotor et de l'alimentation électrique.

L'optimisation consiste à trouver la meilleure performance d'un dispositif dans laquelle interviennent :

- les paramètres structurels : nombre de dents, types des encoches ...
- les paramètres dimensionnels : dimension de l'entrefer, ouverture d'encoches ...
- les paramètres physiques : propriétés de matériaux, type de courant ...

En considérant la complexité des phénomènes qui apparaissent seuls ou conjugués (saturation magnétique, courant de Foucault, les couplages multi-physiques, ...), la recherche de la meilleure performance devient un problème difficile. En plus, il faut toujours prendre en compte le respect de quelques contraintes portant sur la faisabilité due aux tolérances de fabrication : dimension minimale de l'entrefer, l'ouverture d'encoche ...

Pour cela, cette optimisation nécessite l'utilisation de procédure puissante combinant simulation numérique et outil d'optimisation.

En général, on peut définir un problème d'optimisation comme présenté par la suite :

Minimiser :

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3.5}$$

$$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$$

En respectant :

$$G_i(x) = 0$$

$$H_j(x) \leq 0 \tag{3.6}$$

$$x_k^{min} \leq x_k \leq x_k^{max}$$

Où :
- *f(x)* est le critère à minimiser (la fonction objectif)
- le vecteur x est constitué de n variables qui représentent les paramètres du problème
- *G(x)* représente les contraintes d'égalité
- *H(x)* représente les contraintes d'inégalité
- les valeurs x_k^{min} et x_k^{max} représentent les contraintes du domaine

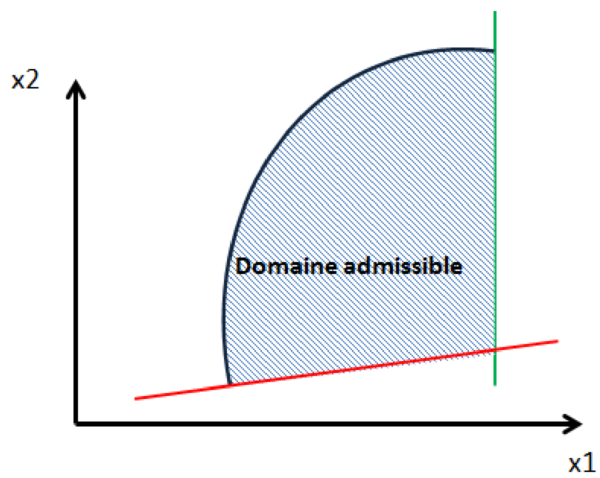


FIGURE 3.9 – Exemple d'un domaine admissible pour un problème d'optimisation à deux paramètres

Selon les contraintes imposées sur les paramètres de conception, on peut définir le domaine admissible de ces variables comme nous montre la figure 3.9.

Une fonction objectif peut avoir plusieurs minima locaux. Le plus petit de ces minima est le minimum global (figure 3.10).

Dans les cas où le problème d'optimisation consiste à trouver le maximum d'une fonction objectif, il suffit de minimiser l'inverse de la fonction objectif à maximiser (équation 3.7).

$$q(x) = -f(x) \tag{3.7}$$

Pour faciliter la comparaison de variables de conception, il est recommandé de les normaliser dans un nouvel intervalle.

$$x_j = \frac{x_{j,r} - x_{j,r}^{min}}{x_{j,r}^{max} - x_{j,r}^{min}} \tag{3.8}$$

où x_j est la nouvelle variable, $x_{j,r}$ est la variable réelle, $x_{j,r}^{min}$ et $x_{j,r}^{max}$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure.

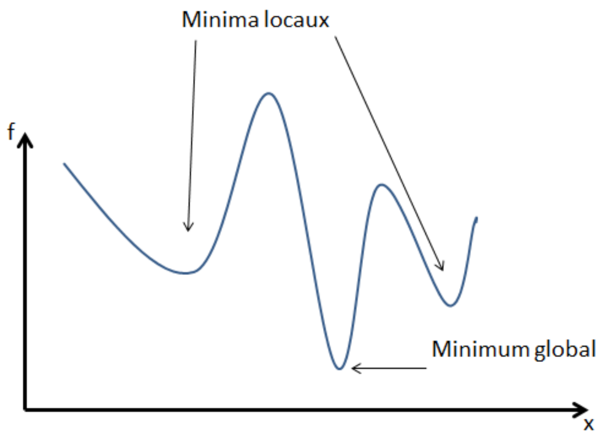


FIGURE 3.10 – Minima locaux et minimum global d'un exemple d'une fonction objective

3.3.2 Optimisation multi-objectif

Les problèmes d'optimisation peuvent être soumis à plusieurs fonctions objectifs en même temps. Il s'agit d'un problème multi-objectif :

Minimiser :

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), ...f_q(x)\} \tag{3.9}$$

$$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$$

En respectant :

$$G_i(x) = 0$$

$$H_j(x) \leq 0 \tag{3.10}$$

$$x_k^{min} \leq x_k \leq x_k^{max}$$

Dans ce type de problème, il n'existe pas de solution unique. L'importance de chaque fonction objectif n'est pas évidente a priori, pour cela on applique le concept de non infériorité ou optimalité de Pareto. Une solution est dite non inférieure si une amélioration d'un objectif entraine nécessairement une dégradation d'un autre.

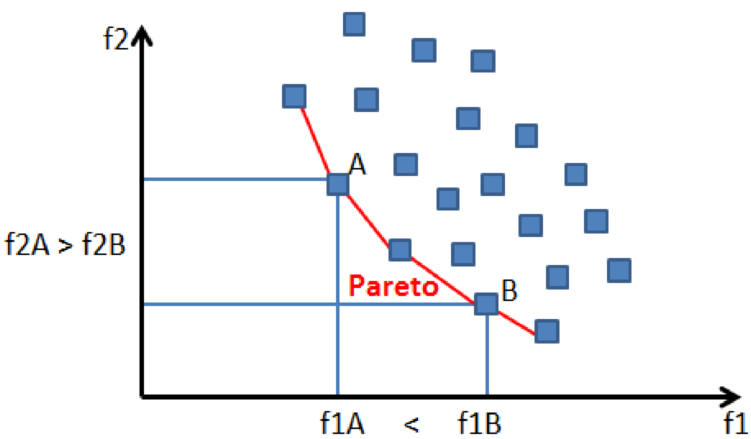


FIGURE 3.11 – Frontière de Pareto

La figure 3.11 présente la frontière de Pareto, les points qui se trouvent sur la courbe en rouge sont toutes des solutions au sens de Pareto, car toute amélioration d'un objectif se fait au détriment d'un autre.

On cite la méthode de sommation pondérée, cette méthode consiste à transformer un problème multi-objectif en plusieurs problèmes objectif. La résolution est faite par une méthode d'optimisation standard. Une autre méthode, celle du but à atteindre (Goal Attainment Method) [GEM74], demande des informations supplémentaires sur les résultats souhaitables de chaque fonction objectif.

3.3.3 Méthodes d'optimisation avec ou sans contraintes

Optimisation sans contrainte

Un problème d'optimisation est dit non contraint s'il ne contient pas de fonctions contraintes. Il existe deux familles principales pour résoudre ce problème.

Méthodes d'optimisation déterministes : Généralement les méthodes d'optimisation déterministes conduisent à la même solution finale en partant d'un contexte initial donné, elles nécessitent relativement peu d'évaluations de la fonction objectif, mais elles peuvent se bloquer sur un optimum local. Elles peuvent être unidimensionnelles ou multidimensionnelles selon la dimension de la fonction objectif à optimiser.

1. Les méthodes déterministes unidimensionnelles sont utilisées dans l'optimisation de fonctions à un seul paramètre. Elles sont basées sur le principe de réduction successive de l'intervalle de recherche sur la fonction objectif pour trouver l'optimum. Parmi ces méthodes, on cite la méthode de Dichotomie [CUL94], la méthode du nombre d'Or [CUL94, PRE92] et la méthode de Brent [BRE73, PRE92].
2. Pour les problèmes d'optimisation à plusieurs paramètres, on utilise les méthodes déterministes multidimensionnelles. Elles sont classées selon l'information sur la fonction qu'elles utilisent (ordre 0 si elles n'utilisent que la valeur de la fonction, ordre 1 si elles nécessitent en plus le gradient de la fonction).

- Les méthodes d'ordre 0 sont peu précises et convergent très lentement vers l'optimum [KOW68]. Par contre, il n'est pas nécessaire de calculer le gradient, ce qui présente un avantage, surtout lorsque la fonction objectif n'est pas différentiable, ou lorsque le calcul de son gradient est complexe ou présente un coût important. Les méthodes d'ordre 1 sont applicables lorsque la fonction objectif est continument différentiable, elles sont plus rapides (le gradient donne une information sur la direction de recherche de solution).
- Les méthodes déterministes multidimensionnelles peuvent être divisées en deux groupes : les méthodes analytiques (ou descentes) et les méthodes heuristiques (ou géométriques). Les méthodes analytiques utilisent le gradient pour connaître la direction de recherche. La plupart de ces méthodes sont d'ordre 1 et exécutent successivement des recherches linéaires en faisant appel à une méthode unidimensionnelle [PRE92]. On cite la méthode de la plus grande pente [CUL94], la méthode de Powel [POW65], les méthodes quazi-Newton [CUL94, FLE87, PRE92] et la méthode du gradient conjugué [CUL94]. Les méthodes heuristiques explorent le domaine par essais successifs en recherchant les directions les plus favorables. La plupart de ces méthodes sont d'ordre 0. On cite la méthode de variations locales de Hook et Jeeves [CHE99], la mé-

thode de Rosenbrock [RAO96], la méthode du Simplex [NEL65] et la méthode de Rosenbrock [RAO96].

Méthodes d'optimisation stochastiques : Les méthodes d'optimisation stochastique s'appuient sur des bases probabilistes et aléatoires. Elles peuvent alors conduire à des résultats différents en partant du même contexte initial.

Ces méthodes ne nécessitent pas un point de départ (mais une population de départ définie aléatoirement), ni des informations sur le gradient. Elles possèdent une grande capacité pour trouver l'optimum global. Parmi les méthodes stochastiques, nous citons la recherche Tabu [GLO89, GLO90, HU92], le recuit simulé [KIR83] et les méthodes évolutionnistes comme l'algorithmes génétiques [HOL75, MIC94], les stratégies d'évolution [KAS95, PRE90, REC94], la programmation évolutionniste [FOG94] et la programmation génétique [KOZ92]. Il est possible d'utiliser un algorithme stochastique pour localiser l'optimum global et ensuite utiliser un algorithme déterministe pour affiner la recherche [MOH97].

Optimisation sous Contrainte

Un problème d'optimisation est dit contrainte s'il contient au moins une fonction de contraint dans sa description (figure 3.9). Il existe deux familles principales pour résoudre ce problème : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Méthodes directes : Les méthodes directes travaillent directement sur le problème contraint original (équation 3.5, 3.6) en résolvant les équations de Kuhn-Tucker associées. Les équations de Kuhn-Tucker sont à la base de plusieurs méthodes directes. Parmi ces méthodes, on cite la méthode de programmation quadratique récursive [FLE87].

Méthodes indirectes : Les méthodes indirectes utilisent une transformation qui intègre les contraintes dans la fonction objectif. Ensuite, elles appliquent un algorithme classique d'optimisation sans contrainte pour résoudre le problème créé.

Parmi les méthodes de transformations les plus utilisées, on cite les méthodes de pénalités intérieures [CAR61] et extérieures [FIA68], la méthode du lagrangien augmenté [HES69, POW69, ROC73], la méthode des variables mixtes et la méthode des asymptotes mobiles [MAH95].

Les méthodes de transformations (indirectes) sont les plus utilisées dans l'optimisation de problèmes contraints. Elles sont simples, avec une efficacité acceptable lorsqu'elles sont couplées avec des algorithmes évolutionnistes. Dans notre modèle, avec des contraintes sur le niveau et la qualité de couple, il est intéressante d'utiliser une méthode de transformation afin d'intégrer ces contraintes dans la fonction objectif.

3.3.4 Les méthodes des plans d'expériences numériques

Le temps de calcul d'une simulation numérique est important, surtout pour des problèmes industriels (quelques heures, voire quelques jours ...), d'autant plus lorsqu'il s'agit d'une optimisation de ce modèle. L'application d'une méthode d'optimisation nécessite plusieurs simulations numériques, des dizaines lorsqu'il est possible d'utiliser un algorithme d'optimisation déterministe performant et jusqu'à des milliers lorsque qu'on applique un algorithme évolutionniste. Ceci induit donc un coût global énorme pour un problème d'optimisation. Dans ce contexte, les plans d'expérience sont adoptés. La méthode de plan d'expériences peut être enrichi à l'aide de la construction d'une surface de réponse à partir du modèle initial (fonction objectif). Cette surface de réponse a pour but de réduire le temps de calcul du problème d'optimisation.

L'idée des plans d'expérience (Design of Experiments) a été initiée par Fisher [FIS35], Box [BOX78] et Taguchi [TAG87]. Ce concept a été utilisé à des études expérimentales, puis numériques, et que l'on appelle alors la méthode des plans d'expériences numérique [BRA94, GIL98, SCH98].

Cette méthode peut être adaptée aux problèmes d'optimisation ayant un coût unitaire de l'expérience élevé (ce qui est le cas avec notre modèle éléments finis) et avec des résultats soumis à des effets aléatoires.

Dans son concept initial (expérimental), la méthode des plans d'expériences intègre la variabilité. Elle propose de répéter plusieurs fois la même expérience afin d'obtenir la moyenne et l'écart type. Dans sa transposition numérique, il est inutile de prendre en compte cette variabilité, car un calcul avec la même combinaison de variable donne toujours le même résultat.

Le modèle multi-physique de la machine à optimiser est numérique. Pour cela on a considéré la méthode des plans d'expérience numérique. Il existe différents types de cette méthode selon le pilotage.

Pilotage direct

La figure 3.12 présente une approche simple de la méthode à pilotage direct. Elle consiste à appliquer l'algorithme d'optimisation choisi directement sur l'outil de simulation EF. Cette approche est simple du point de vue de l'implémentation, par contre elle conduit à un temps de calcul important et à des erreurs numériques.

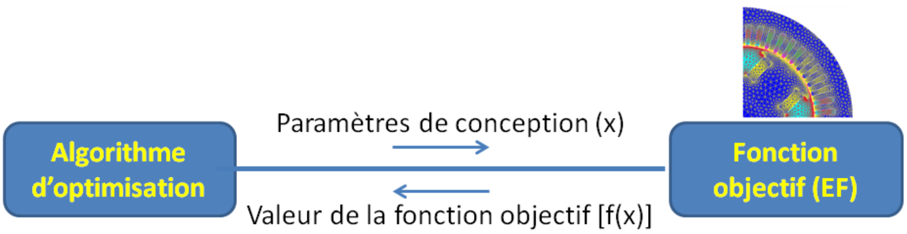


Figure 3.12 – Plan d'expérience numérique avec pilotage direct par l'algorithme d'optimisation

Il faut bien prendre en compte les effets des modifications des valeurs des paramètres géométriques, car les discontinuités de discrétisation introduisent du bruit numérique qui perturbe fortement l'algorithme d'optimisation, surtout si le pas de variation des paramètres géométriques est petit [RAT91]. Or, l'avancement avec des petits pas de changement des paramètres géométriques est important lorsqu'on approche de l'optimum.

Afin d'améliorer le pilotage direct de l'outil de simulation, il est recommandé d'améliorer l'outil de simulation en éliminant le bruit numérique par un maillage élastique [KAD93], l'analyse de sensibilité [GIT89], le développement de Taylor [PET97, NGU99], ou bien changer la stratégie d'optimisation. Il est possible également de remailler le modèle à chaque itération, ce qui implique un changement des paramètres géométriques.

Pilotage indirect (surface de réponse)

Une surface de réponse est une approximation obtenue, à partir d'un plan d'expérience, de la réponse de la fonction objectif. Cette approximation s'obtient à partir d'un nombre d'expériences bien choisi pour allier la précision et la rapidité, avec application d'un algorithme d'interpolation. Une surface de réponse sommaire donne une idée générale sur le comportement du dispositif, elle est peu coûteuse et utile pour déterminer les paramètres influents lors d'une opération de débroussaillage. Puis on garde uniquement les paramètres influents pour construire une surface de réponse plus élaborée qui sera utilisable pour localiser l'optimum.

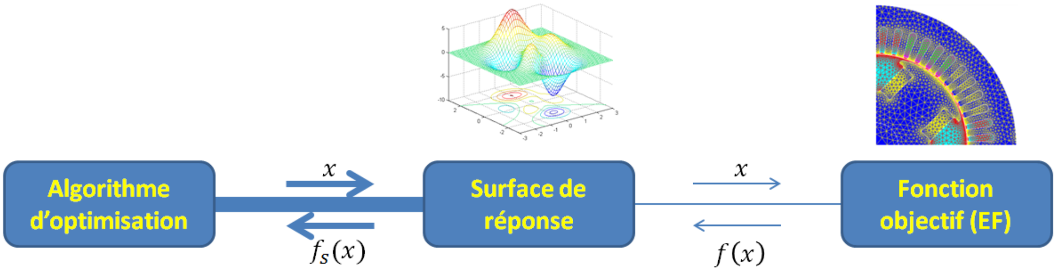


FIGURE 3.13 – Plan d'expérience numérique avec pilotage indirect (surface de réponse)

Les principales étapes de la méthode des plans d'expériences avec pilotage indirect sont :
- Débroussaillage : Effectuer un calcul de sensibilité (Screening) afin de déterminer les paramètres les plus influents et réduire leur nombre.
- Surface de réponse : Construire une surface de réponse donnant une approximation numérique de la réponse en fonction des paramètres les plus influents.
- Exploitation de la surface : Exploiter cette surface de réponse, soit par prédiction (interpolation de la réponse pour une nouvelle combinaison de paramètres), soit par optimisation (recherche d'une combinaison de paramètres qui optimise un certain critère)

Les deux premières étapes nécessitent la réalisation des calculs avec des combinaisons de paramètres. Par contre, la troisième étape consiste à exploiter la surface de réponse sans aucun calcul (sauf pour contrôler le résultat final), elle est donc très peu coûteuse comparée aux deux premières étapes.

En général, la phase de construction de la surface de réponse est considérée comme la plus chère. Ensuite, l'exploitation de cette surface de réponse est considérée comme gratuite. Il est donc possible d'appliquer un algorithme d'optimisation précis (comme les algorithmes génétiques) pour rechercher l'optimum global. Les flèches épaisses entre l'algorithme d'optimisation et la surface de réponse de la figure 3.13 se réfèrent au nombre important d'opérations sur cette surface par rapport au nombre d'opérations sur le modèle EF.

Cette méthode d'optimisation est utilisée dans le logiciel Got-it [GOT12], celui-ci est présenté plus en détail dans la section 3.3.7. Ce logiciel d'optimisation est interfacé au modèle éléments finis électromagnétique du logiciel Flux de Cedrat. Ce logiciel nous donne le choix entre l'algorithme génétique et SQP (sequential quadratic programming) pour l'appliquer sur la surface de réponse.

Au cours de l'optimisation sur la surface de réponse, il est toujours possible d'appliquer directement l'algorithme d'optimisation sur la fonction objectif. En se basant sur la démarche de construction adaptative d'une surface de réponse, on peut affiner l'approximation (surface de réponse) si l'écart entre l'approximation et la simulation directe est important.

On peut distinguer plusieurs types de surface de réponse :

Les surfaces polynomiales de degré 1 sans interaction :

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{3.11}$$

où $f(x)$ est l'équation de l'approximation, x_i sont les paramètres de conceptions et a_i leur poids. La méthode des plans d'expériences propose de déterminer les $n+1$ coefficients au moyen des plans factoriels fractionnaires [SCH98].

Ce type d'approximation est utile dans la phase de débroussaillage lorsque le nombre de facteurs est important.

Les surfaces polynomiales de degré 1 avec interaction :

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i xj \tag{3.12}$$

Dans cette formulation on a $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients à déterminer. La méthode des plans d'expériences propose de les déterminer par des plans factoriels fractionnaires à deux niveaux [SCH98].

Les surfaces polynomiales de degré 2 :

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i xj + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \tag{3.13}$$

Il y a $1 + \frac{n(n+3)}{2}$ coefficients à déterminer.

Les surfaces de réponse du premier degré sont simples et intéressantes pour identifier les paramètres les plus influents (screening). Par contre, elles ne sont pas efficaces pour construire les surfaces de réponses. Les surfaces polynomiales du deuxième degré sont intéressantes pour les surfaces de réponses, surtout si le problème est mono-objectif (comme le notre). Pour des problèmes multi-objectif, il est possible d'utiliser des surfaces de réponse polynomiales de degré supérieur à 2 [SCH98], ou des surfaces de réponse par combinaison de fonctions radiales proposé par Alotto [ALO97] ou des approximations par éléments diffus [NAY91, HER99, COS02]. La discrétisation importante dans toutes les directions du domaine conduit à une approximation de meilleure qualité, par contre elle augmente le nombre d'évaluations du plan factoriel.

En utilisant un algorithme adaptatif, demandant l'ajout de nouveaux points d'évaluation seulement dans certaines régions du domaine, on limite le nombre d'évaluations nécessaires. On trouve des algorithmes de surface de réponse adaptative dans [ALO97, HAM99, COS02]. Il est intéressant dans notre problème d'utiliser une surface de réponse adaptative avec appliquation d'un algorithme d'optimisation coûteux (SQP, AG ...). Lorsque l'algorithme considère qu'il est proche d'un optimum, il compare la réponse fournie par la surface de réponse et par le modèle EF. Si l'erreur est importante, il raffine la surface de réponse autour de ce point en réalisant quelques calculs EF. Cette procédure peut être répétée plusieurs fois jusqu'à trouver l'optimum.

3.3.5 Algorithme SQP

Les méthodes SQP (sequential quadratic programming) sont des méthodes déterministes à base de descente itérative vers la solution optimale.

Avantages :
- L'algorithme converge rapidement vers le minimum (local ou global, cela dépend du point de départ).
- Les résultats peuvent être précis assez facilement.

Inconvénients :
- Il faut préciser un point de départ pour cet algorithme. En plus, celui-ci doit être relativement proche du minimum global pour éviter de tomber sur un minimum local. Il faut donc avoir une idée sur la zone où le minimum se trouve avant de commencer le processus d'optimisation, ce qui n'est pas toujours évident.
- La fonction objectif à optimiser doit être continue et différentiable.

3.3.6 Algorithme Génétique

La méthode de résolution des problèmes d'optimisation par algorithme génétique est basée sur le principe de la sélection naturelle comme l'évolution biologique. Il modifie de manière répétitive une population de solutions individuelles. A chaque pas, l'algorithme va sélectionner de façon en partie aléatoire, à partir de la population actuelle, des points pour produire les points "enfants" pour la prochaine génération. Au fur et à mesure des générations, la population va tendre vers une solution optimale.

Avantages :
- L'avantage essentiel de cet algorithme est la non nécessité de préciser un point initial. La population intiale, va être générée automatiquement.
- Après un nombre suffisant d'itérations, on est sûr de trouver un minimum global.
- Il ne nécessite pas de calcul de gradient de la fonction objectif.

L'inconvénient principal de cet algorithme est le temps de calcul. Cela peut être réduit par le fait qu'on applique cet algorithme sur une surface de réponse. Vu les avantages de l'algorithme génétique, dans la suite, on utilise le plan d'expériences numériques avec pilotage indirect comme méthode d'optimisation, en appliquant l'algorithme génétique sur la surface de réponse.

3.3.7 Application des méthodes d'optimisation pour la conception de la machine

La lourdeur du modèle EF multi-physique est difficilement compatible avec des optimiseurs classiques, mais nous avons pu voir que les méthodes utilisant des surfaces de réponse peuvent permettre un gain de temps de calcul appréciable. Cependant, nous n'avons aucune certitude sur son efficacité avec des critères intégrant les harmoniques.

Dans le cadre du projet AVELEC, le partenaire Cedrat a pu mettre à disposition un nouvel outil d'optimisation appelé Got-it [GOT12]. Ce logiciel couple le modèle EF électromagnétique avec la méthode d'optimisation choisie, y compris les méthodes complexes comme les plans d'expériences indirects (avec surface de réponse) décrits ci-dessus.

Concernant le modèle EF électromagnétique, on utilise toujours le modèle présenté dans le deuxième chapitre, représentant 1/4 de la machine et constitué de 7062 éléments triangles à 3 nœuds. Ce modèle EF est couplé avec un modèle EF mécanique, en dehors de la boucle d'optimisation, pour observer les comportements vibratoires de la machine optimisée. Les critères d'optimisation spécifiques de la partie électromagnétique seront choisit parmi les harmoniques de pression magnétique.

La figure 3.14 nous montre le schéma d'optimisation utilisé dans ce chapitre.

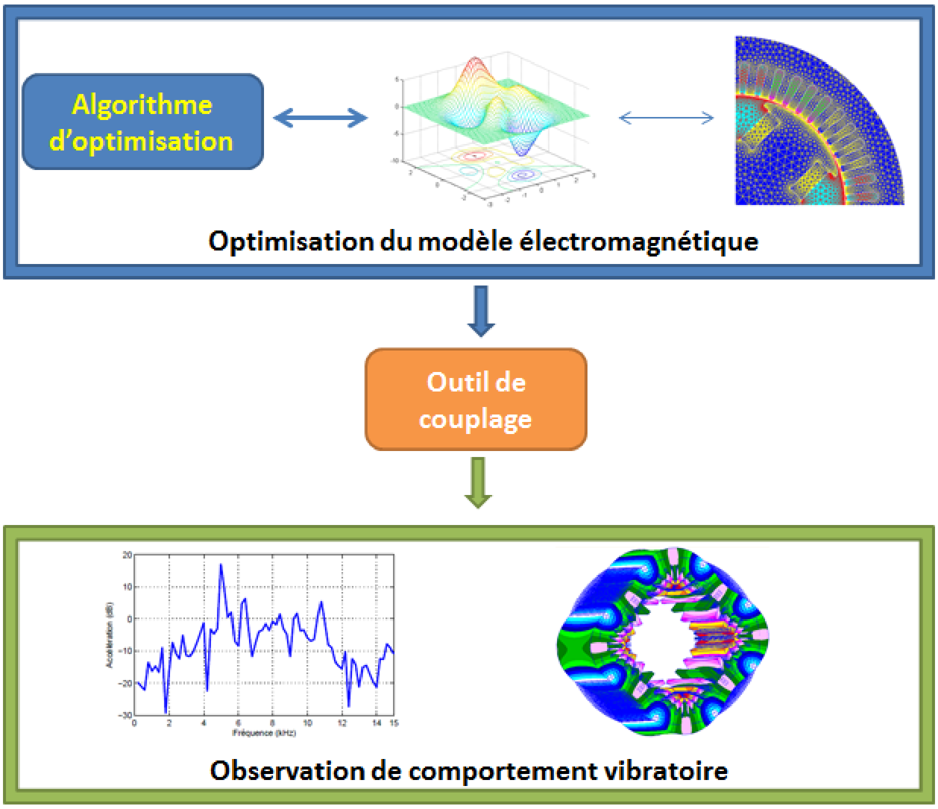


Figure 3.14 – Optimisation du modèle électromagnétique et observation sur le modèle mécanique

3.3.8 Optimisation sur critères classiques : niveau et qualité du couple de la machine

Dans un premier temps, le but est de tester la méthode d'optimisation sur des critères habituels (temporels) :

- le plus classique, qui est le couple moyen.
- un critère variable en fonction du temps : la pulsation du couple.

Nous définissons le niveau de couple par le couple moyen de la machine, et la qualité du couple par la valeur de pic à pic de la courbe de couple en fonction du temps (pulsation du couple). Les paramètres à optimiser dans une machine électrique peuvent être de type géométrique, alimentation électrique ou encore les propriétés de matériaux. On s'intéresse ici à optimiser les paramètres géométriques de conception. Le point de fonctionnement choisi pour cette optimisation est 3000 tr/mn. Nous définissons les courants statoriques et rotoriques, ainsi que l'angle de pilotage à partir du diagramme couple/vitesse de la machine (figure 2.31). La figure 3.15 montre la courbe de couple en fonction du temps pour une période électrique en pourcentage du couple moyen.

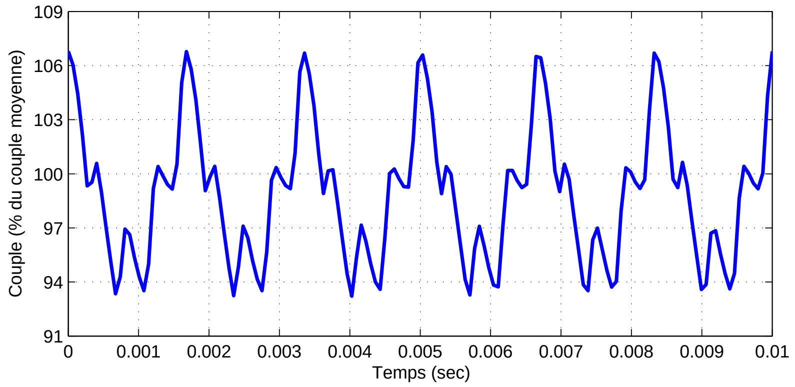


FIGURE 3.15 – Couple initial de la machine pour une période électrique pour le point de fonctionnement à 3000 tr/mn

Choix des paramètres géométriques de conception

Il existe de nombreux paramètres géométriques possibles à optimiser dans une machine électrique. Nous trions les paramètres, par élimination successive, en considèrant ceux qui sont influents sur la fonction objectif. Les paramètres géométriques choisis (figure 3.16) sont la distance modifiant la courbure de l'arc polaire du rotor (AP), l'ouverture des encoches (OE), le rayon du bec d'encoche (RB) et trois autres paramètres géométriques Pi (i=1,2,3) non détaillés pour raison de confidentialité. Ces derniers sont relatifs à des aspects pratiques de la construction du stator et du rotor, comme les tiges filetés de fixation.

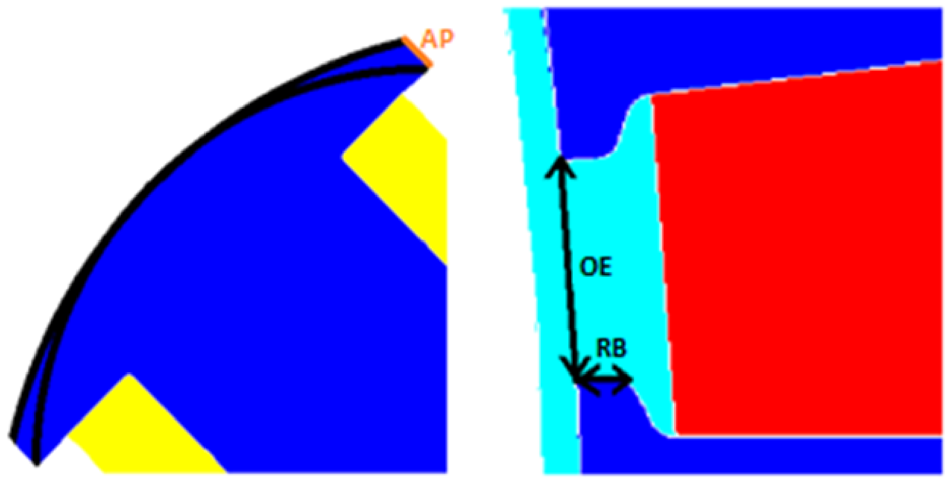


FIGURE 3.16 – Paramètres de conception utilisées dans l'optimisation

La figure 3.17 nous montre les résultats d'une étude de sensibilité sur le niveau de couple pour plusieurs paramètres géométriques choisis. Cette étude a montrée que AP, OE et RB sont les paramètres les plus influents. Une autre étude de sensibilité de paramètres géométriques sur la qualité du couple est présentée dans la figure 3.18. Cette étude nous montre également que AP, OE et RB sont les paramètres les plus influents sur la qualité du couple. Nous pouvons remarquer en particulier que le paramètre AP est le plus influent pour les deux critères et que le paramètre OE a une influence négative sur le critère de niveau de couple et positive sur la pulsation du couple. Autrement dit, si on varie le paramètre OE (indépendamment des autres paramètres) pour gagner en niveau de couple, il est possible de perdre en qualité. Le tableau 3.1 montre les coefficients d'influences normalisés pour chaque paramètre de conception selon les critères d'optimisation, chaque doit être ligne lue indépendamment les unes des autres. Afin de gagner en temps de calcul, on élimine les paramètres qui ont un coefficient d'influence normalisé inférieur à 5% dans le tableau 3.1. Les paramètres à optimisées sont alors AP et OE. En respectant les contraintes de conception et de fabrication, les marges de variation choisies sont ±30% pour AP, ±20% pour OE.

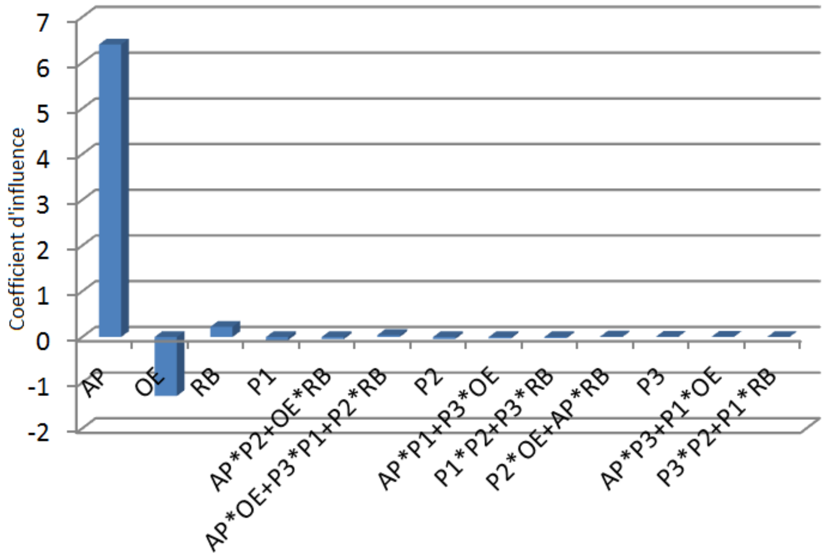


Figure 3.17 – Étude de sensibilité des paramètres de conception sur le niveau du couple

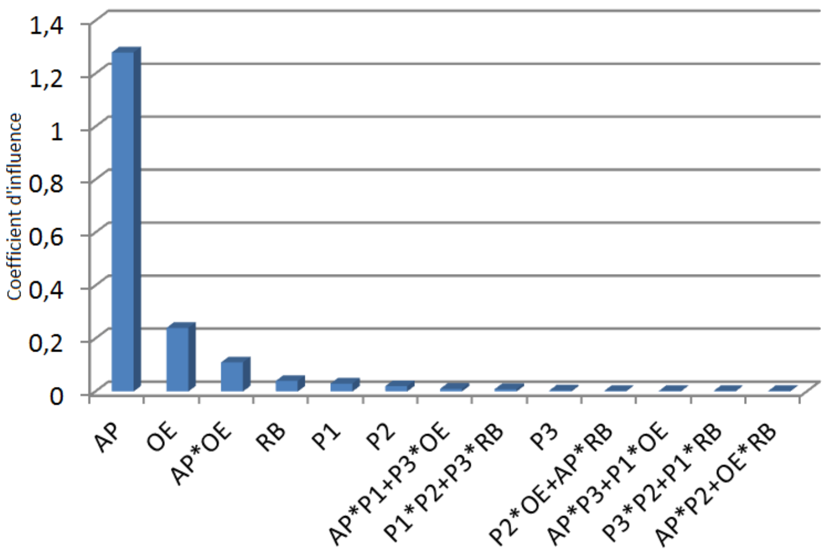


Figure 3.18 – Étude de sensibilité des paramètres de conception sur la pulsation du couple

	AP	OE	RB
Couple Moyen (niveau)	1	0.2	0.03
Crête à crête (qualité)	1	0.18	0

Tableau 3.1 – Coefficients d'influence normalisés des paramètres de conception sur les critères d'optimisation

Résultats de l'optimisation sur les critères de couple

Nous appliquons la méthode d'optimisation choisie pour trouver les valeurs optimisées des paramètres géométriques de cette machine sur les deux critères de couple. Nous considérons le niveau ou la pulsation de couple comme la fonction objectif. Le but est alors d'augmenter le couple en conservant la même qualité, ou, de réduire la pulsation du couple en gardant le même niveau.

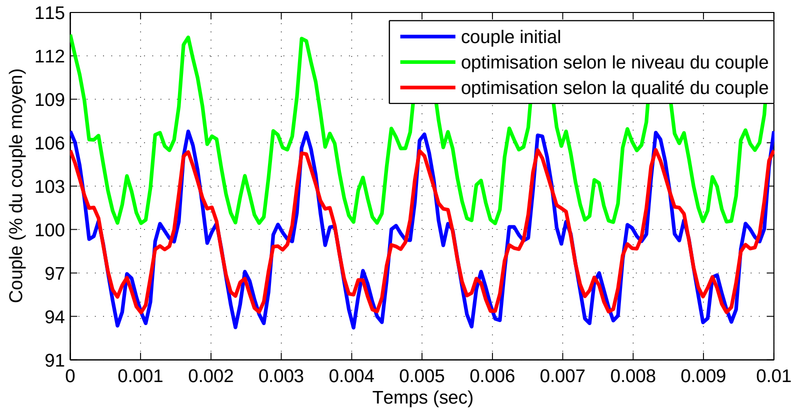


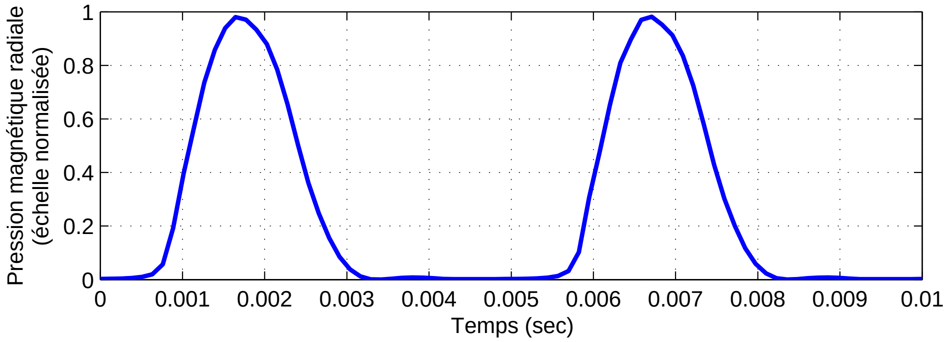
FIGURE 3.19 – Courbes de couples optimisées selon le niveau et la qualité du couple

Concernant le niveau de couple, l'optimisation faite nous montre qu'on peut gagner 3.5% de la valeur moyenne du couple, en augmentant AP à son maximum et en diminuant OE à son minimum. On peut en déduire que, pour ce type d'optimisation, il faut bien choisir les valeurs minimales et maximales des contraintes sur les paramètres de conception. Pour la qualité de couple, nous pouvons diminuer la valeur de pic à pic (pulsation du couple) de 16.8% en diminuant AP de 15% et OE à son minimum. La figure 3.19 présente les courbes de couple optimisées.

3.3.9 Optimisation sur critère harmonique de pression magnétique

Il s'agit dans cette partie d'optimiser la machine électrique sur des critères inhabituels. Les critères choisis sont les harmoniques de la courbe de pression magnétique radiale. Le point de fonctionnement est 3000 tr/mn. La figure 3.20 présente la courbe de pression magnétique en fonction du temps et les harmoniques de la décomposition en série de Fourier de cette courbe. La pression magnétique est calculée sur un point situé au centre de la surface coté entrefer d'une dent statorique.

Nous avons choisi les harmoniques 4, 12 et 48 de la figure 3.20 comme des fonctions objectifs dans cette partie. Le choix de ces harmoniques est fait pour différentes raisons. La première est la plus importante, la troisième représente le nombre de dents statoriques et la deuxième a une valeur et une fréquence intermédiaires.



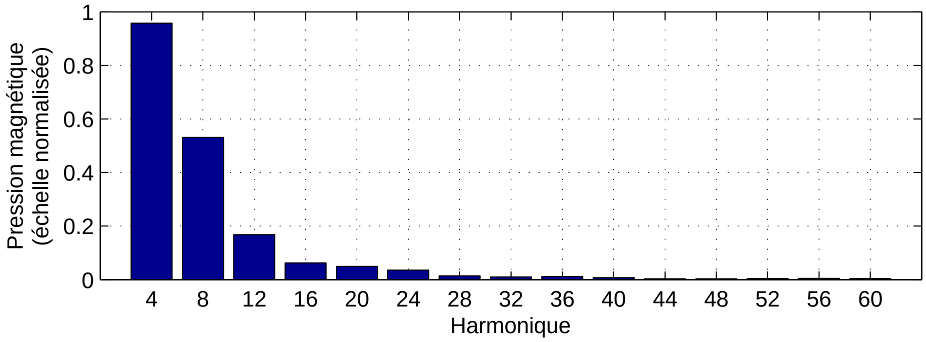


FIGURE 3.20 – Courbe de pression magnétique calculée sur un nœud situé au centre de la surface coté entrefer d'une dent statorique et les harmoniques de la décomposition en série de Fourier de cette courbe

Optimisation sans perte en couple

Nous souhaitons minimiser les harmoniques 4, 12 et 48 séparément, tout en gardant le même niveau de couple. Une étude de sensibilité est faite pour les harmoniques choisis. Le tableau 3.2 montre les coefficients d'influence normalisés pour chaque paramètre de conception selon l'harmonique choisi, chaque ligne doit être lue indépendamment les unes des autres. Nous prenons en compte dans uniquement que les paramètres ayant un influence normalisée de plus de 5%.

	AP	OE	RB
Harmonique 4	1	0.1	0.02
Harmonique 12	1	0.42	0.15
Harmonique 48	1	0.06	0

Tableau 3.2 – Coefficients d'influence normalisés des paramètres de conception selon l'harmonique choisi

On considère trois designs optimisés de la machine selon l'harmonique principalement optimisé (4, 12 ou 48). Le tableau 3.3 nous montre le numéro de design, l'harmonique à minimiser et la réduction de cette harmonique, les paramètres influents, leur valeur optimisée et le gain en qualité de couple. Les résultats du tableau 3.3 montrent que la minimisation des harmoniques 4, 12 et 48 améliore aussi la qualité du couple.

Design	Harmonique à minimiser	Réduction de l'harmonique à minimiser	Paramètres influents	Valeur optimisée	Gain en qualité du couple
D1	H4	9.4%	PA	-15%	16.8%
			OE	-20%	
D2	H12	18.3%	PA	-17%	17.1%
			OE	-20%	
			RB	+5%	
D3	H48	30.9%	PA	-18%	20%
			OE	-20%	

Tableau 3.3 – Résultat de l'optimisation des harmoniques de pression magnétique sans perte en niveau de couple

Plutôt que de s'attarder sur les gains en harmoniques de pressions, il est plus lisible de visualiser directement les résultats sur la vibration, c'est-à-dire la courbe de réponse en fréquence. Il est important de dire que la minimisation d'un harmonique peut conduire à une réduction des autres harmoniques par des proportions différentes.

En utilisant l'outil de couplage présenté dans le premier chapitre, on va donc étudier la réponse en fréquence des modèles optimisés. La figure 3.21 nous montre la courbe de réponse en fréquence du modèle initial de la machine et les courbes de réponse en fréquence de modèles optimisés.

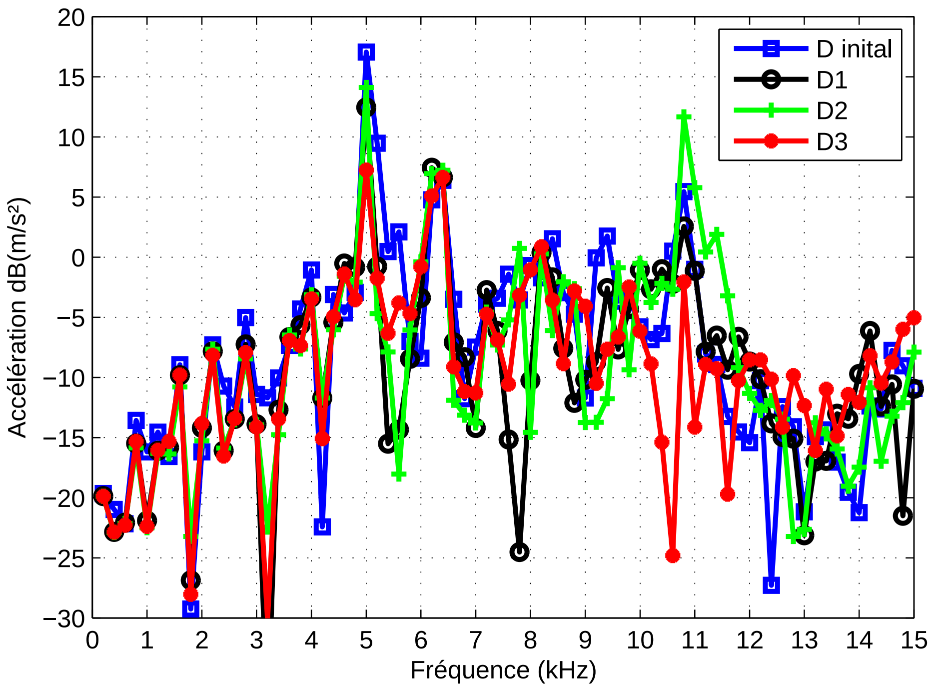


FIGURE 3.21 – Courbes de réponse en fréquence de différents modèles optimisés

A partir des courbes de réponse en fréquence, on peut remarquer que le pic à 6.2 kHz ne varie pas selon les designs, cependant les deux autres pics importants (autour de 5 et 11 kHz) réagissent différemment selon le design. Pour le design D1, les pics à 5 kHz et à 11 kHz sont réduits de 5 dB et 2 dB respectivement. Pour le design D2, le pic à 5 kHz est réduit de 3 dB, cependant, le pic à 11 kHz est augmenté de 6 dB. Pour le design D3, le pic à 5 kHz et le pic à 11 kHz sont réduits de 10 dB et de 7 dB respectivement.

Les trois designs optimisés selon les harmoniques de pression magnétique nous donnent des résultats vibratoires différents. En fait, il ne suffit pas de se limiter aux résultats d'optimisation sur les harmoniques de pressions magnétiques, il est important d'observer les variations au niveau vibratoire de cette optimisation.

Le design D3 est le plus intéressant, il arrive à réduire considérablement le pic à 5 kHz, qui est le plus grand du spectre, ainsi que le pic à 11 kHz.

Optimisation avec perte en couple

Il s'agit ici d'autoriser une perte en couple de 2% maximum dans l'optimisation des harmoniques de pression magnétique. Trois designs d'optimisation de la machine sont alors considérés selon l'harmonique principalement optimisée. Le tableau 3.4 nous montre le numéro de design, l'harmonique à minimiser et la réduction de cette harmonique, les paramètres influents, leur valeur optimisée, le gain en qualité de couple et la perte en niveau du couple. Ces résultats nous montrent que la minimisation des harmoniques 4, 12 et 48, en autorisant une perte du couple, améliore la qualité du couple. La perte en niveau de couple est d'environ 1.8% pour l'optimisation des harmoniques.

Design	Harmonique à minimiser	Réduction de l'harmonique à minimiser	Paramètres influents	Valeur optimisée	Perte en niveau de couple	Gain en qualité du couple
D4	H4	13.6%	PA	-28%	-1.8%	26%
			OE	-20%		
D5	H12	20.6%	PA	-29%	-1.7%	26.8%
			OE	-20%		
			RB	+5%		
D6	H48	41.7%	PA	-29%	-1.8%	27.8%
			OE	-20%		

Tableau 3.4 – Résultat de l'optimisation des harmoniques de pression magnétique avec perte en niveau de couple

En utilisant l'outil de couplage présenté dans le deuxième chapitre, on peut étudier la réponse en fréquence des modèles optimisés. La figure 3.22 nous montre la courbe de réponse en fréquence du modèle initial de la machine et les courbes de réponse en fréquence de modèles optimisés avec autorisation de perte en couple.

A partir des courbes de réponse en fréquence, on peut remarquer que le pic à 6.2 kHz est toujours invariable. Le pic à 5 kHz est réduit d'environ 5 dB pour D5 et D6, et d'environ 15 dB pour D4. Cependant le pic à 11 kHz augmente pour les trois designs de 4 dB. La variation la plus importante est sur le pic à 5 kHz qui correspond au fréquence du mode propre d'ordre spatial 4.

En autorisant une perte en couple de 1.8%, on arrive à réduire le pic le plus important à 5 kHz de 5 dB de plus qu'une optimisation sans perte en couple. Mais en même temps, cette perte en couple augmente le pic à 11 kHz, de 4 dB. En résumé, il y a un compromis à faire entre le niveau de couple et l'amplitude des pics. Il est

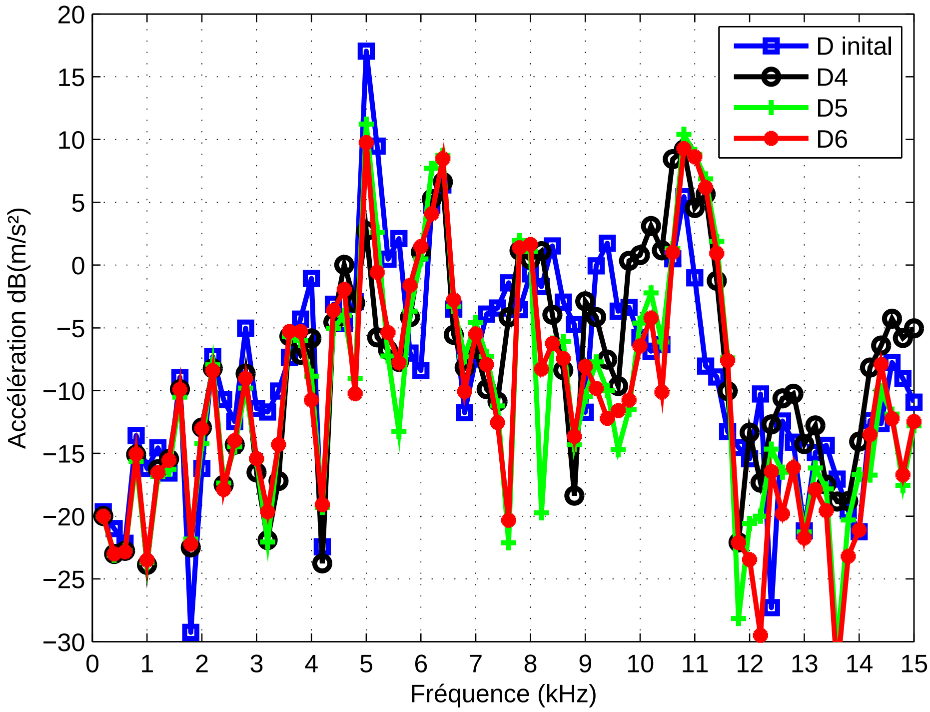


FIGURE 3.22 – Courbes de réponse en fréquence de différent modèles optimisés avec perte en couple

intéressant de remarquer que l'augmentation du pic à 11 kHz correspond à une augmentation de pulsations de couple à 11kHz puisque ce pic à 11 kHz est issu des forces tangentielles (section 3.2.1) alors que le résultat global (tableau 3.4) montre une réduction de pulsation de couple.

En général, les pics à basse fréquence sont plus gênant au niveau vibro-acoustique. On s'intéresse davantage à réduire le pic à 5 kHz plutôt que le pic à 11 kHz

En conclusion, on a deux choix intéressants :

- Design D3 : réductions des pics à 5 kHz et à 11 kHz de 10 dB et de 7 dB respectivement, sans perte en couple.
- Design D4 : réductions de pic à 5 kHz de 15 dB, avec 1.8% de perte en niveau de couple.

3.4 Validité de la méthode sur différentes vitesses

L'étude précédente a été présenté pour un point de fonctionnement, nous nous posons ici la question de la pertinence de ce design sur d'autres points de fonctionnements. La figure 3.23 présente les courbes d'accélérations pour deux autres points de fonctionnement de la machine pour le design initial et le D3. Le premier graphe, à 2000 tr/mn, montre une baisse d'amplitude de 10 dB du pic à 5 kHz. Le second, à 4000 tr/mn, présente une baisse plus faible des pics principaux. Même si ces baisses sont faibles, le design D3 reste toujours meilleur que le design initial dans les plages de vitesses faibles (lorsque le bruit d'origine magnétique risque d'être prépondérant).

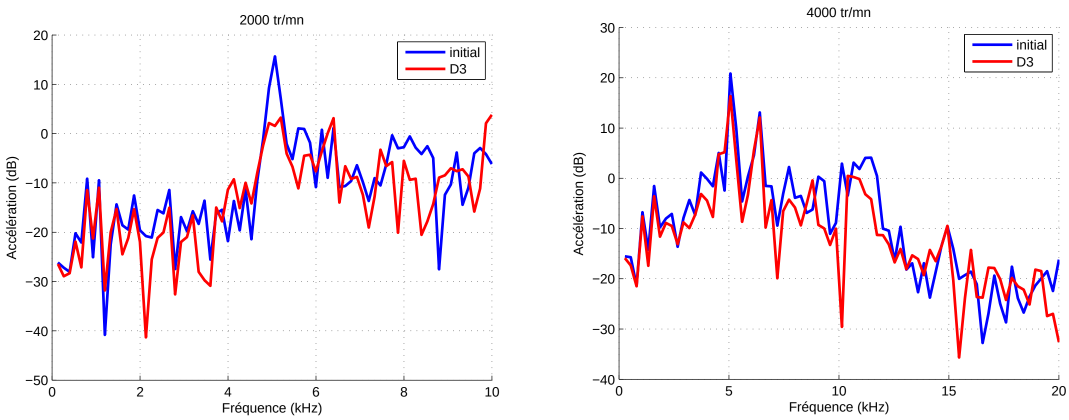


FIGURE 3.23 – Comparaison entre le spectrogramme calculé sur le design initial et après l'optimisation (D3)

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a réalisé quelques études spécifiques sur le modèle construit dans le chapitre précédent. Pour un calcul statique, nous avons remarqué que le déplacement radial sur le rayon extérieur du stator est du même ordre de grandeur qu'il soit d'origine radiale ou tangentielle. Dans le même esprit, pour un calcul dynamique, la part des forces tangentielles a des effets importants sur le spectrogramme de vibration de la machine. En conclusion, cette étude des effets des forces tangentielles nous montre que celles-ci sont loin d'être négligeables dans ce type de problème. Négliger les forces tangentielles dans un calcul vibratoire, peut donc induire une erreur de modélisation de chargement et donc d'interprétation des résultats.

On a réussi à intégrer des harmoniques d'origine électronique dans le courant rotorique, malgré l'utilisation d'un modèle éléments finis multi-multiphysique lourd, ceci en déterminant un pas de calcul acceptable. L'étude de l'effet de ces harmoniques sur le comportement vibratoire de la machine montre que ces harmoniques ont également des effets non-négligeables sur le spectre de vibration de la machine, surtout si la fréquence de découpage est proche d'une fréquence d'un mode d'ordre spatial $2p$ (nombre de pôles) ou 0.

L'étude de l'optimisation présentée dans ce chapitre a montrée la faisabilité et l'intérêt d'une méthode d'optimisation basée sur le plan d'expérience numérique à pilotage indirect avec une surface de réponse adaptative. En utilisant une surface de réponse adaptative, on a réussi à appliquer un algorithme couteux (A.G.) sur des critères inhabituels comme les harmoniques de pression magnétique. L'optimisation faite sur le modèle multi-physique met en évidence des résultats intéressants au niveau des réductions des pics vibratoires. Cette réduction peut atteindre 11 dB sur le pic principal, et jusqu'à 15 dB en autorisant une faible perte en couple.

L'utilisation du modèle éléments finis impose de fortes contraintes en termes de temps de calcul. Dans le même esprit que les études de faisabilité de l'optimisation ou de l'intégration de MLI, on peut se demander s'il est possible d'inclure favorablement des études d'incertitudes sur cette machine électrique.

Dans le domaine de la conception des systèmes vibratoires, les incertitudes sont souvent négligées. Elles peuvent provenir de plusieurs sources, notamment des propriétés des matériaux. La non prise en compte de ces incertitudes peut perturber le comportement du modèle et donc induire de mauvaises conclusions. Nous allons donc nous intéresser dans le chapitre suivant à améliorer la prédiction des modèles éléments finis, afin d'évaluer l'impact de la variabilité de paramètres d'entrées (propriétés matériaux) sur la réponse d'un modèle vibratoire (fréquence propre, réponse en fréquence).

Bibliographie

[ALO97] P. Alotto, M. Gaggero, G. Molinari, M. Nervi, "A design of experiment and statistical approach to enhance the generalised reponse surface method in the optimization of multiminima problems", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No. 2, 1997, pp.1896-1899.

[BOE08] M. Boesing, K. Kasper, R. De Doncker, "Vibration excitation in an electric traction motor for a hybrid electric vehicle" , Actes du congès : 37th Int. Congr. Expo. Noise Control Engineering, INTER-NOISE 2008, Shanghai, China, pp. 1-6, Nov. 2008.

[BOX78] G.E.P. Box, W.G. Hunter, J.S. Hunter, "Statistics for experimenters", Wiley Interscience, New York, 1978.

[BUL04] H. Bülent Ertan, N. Balkan Simsir, "Comparison of PWM and PFM Induction Drives Regarding Audible Noise and Vibration for Household Applications", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 40, No. 6, 2004, pp. 1621-1628.

[BRA94] K. Brandiski, U. Pahner, R. Belmnas, "Optimal design of a segmental PM DC motor using statistical experiment design method in combination with numerical field analysis", Actes du congrès : ICEM 1994, Paris, France, Vol. 3, 4-8 Septembre 1994, pp. 210-215.

[BRE73] R.P. Brent, "Algorithms for minimisation without derivatives", Courier Dover Publications, 2013.

[CAR61] C.W. Caroll, "The created response surface technique for optimizing nonlinear, restrained systems", Operational Research, Vol. 9, No 2, 1961, pp. 169-184.

[CHE99] Y. Cherruault, "Optimisation : Méthodes locales et globales", Presses Universitaires de France-PUF, 1999.

[COS02] M.C. Costa, S. Giurgea, J.L. Coulomb, Y. Marechal, A.B. Diertrich, S.I. Nabeta, "Diffuse element method and quadtrees : two "ingredient" for an adaptive response surface", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, 2002, pp. 1085-1088.

[CUL94] J.C. Culioli, "Introduction à l'optimisation", Ellipses, Paris, 1994.

[FIA68] A.V. Fiacco, G.P. McCormick, "Nonlinear programming sequential unconstrained minimization techniques", John Wiley, New York, 1968.

[FIS35] R.A. Fisher, "The design of experiments", Oliver and Rod, 1935.

[FLE87] R. Fletsher, "Practical methods of optimization", John Wiley & Sons, 1987.

[FOG94] L.J. Fogel, "Evolutionary programming in perspective : the top-down view", Computational Intelligence : Imitating Life, J.M. Zurada, R.J. Marks II, and C.J. Robinson, Eds, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1994, pp. 135-146.

[GAR99] S. D. Garvey, G. D. LE Flem, “Tangential forces matter”, Actes du congès : 9th ICEM, Canterbury, England, 1999, pp. 174-178.

[GEM74] F.W. Gembicki, “Vector optimization for control with performance and parameter sensitivity indices”, Thèse de doctorat, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1974.

[GIT89] S. Gitosusatro, J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadiere, “Performance derivative calculations and optimization process”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 4, 1989, pp. 2834-2839.

[GLO89] F. Glover, “Tabu Search - Part I”, ORSA Journal on Computing, Vol. 1, No. 3, 1989, pp. 190-206.

[GLO90] F. Glover, “Tabu Search - Part II”, ORSA Journal on Computing, Vol. 2, No. 1, 1990, pp. 4-32.

[GOT12] D. Mavraudieva, “Introductory course GoT-It”, 2012.

[GIE06] J. F. Gieras, C. Wang, J. C. Lai, “Noise of polyphase Electric Motors”, New York : Taylor & Francis, 2005.

[GIL98] F. Gillon, P. Brochet, “Optimization of a brushless permanent magnet motor with the experimental design method”, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 34, No. 5, 1998, pp. 3648-3651.

[HAM99] K. Hameyer, R. Belmans, “Numerical modelling and design of electrical machines and devices”, Wit press, 1999.

[HER99] C. Herault, Y. Marechal, “Boundary and interface conditions meshless methods [for EM field analysis]”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 3, 1999, pp. 1450-1453.

[HES69] M.R. Hestenes, “Multiplier and gradient methods”, Journal of Optimization Theory and applications, Vol. 4, No. 5, 1969, pp. 303-320.

[HOL75] J.H. Holland, “Adaptation in natural and artificial system : An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence”, The University of Michigan Press, 1975.

[RAT91] S. Ratnajeevan, H. Hoole, K. Weeber, S. Subramaniam, “Fictitious minima of object functions, finite elements meshes, and edge elements in electromagnetic device synthesis”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 6, 1991, pp. 5214-5216.

[HU92] N. Hu, “Tabu Search Method with random moves for globally optimal design”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, No. 5, 1992, pp. 1055-1070.

[ISL10] R. Islam, I. Husain, “Analytical model for predicting noise and vibration in permanent-magnet synchronous motors”, IEEE Trans. Ind. Appl., Vol. 46, No. 6, Nov./Dec. 2010, pp. 2346-2354.

[KAD93] K. Kadded, R.R. Saldanha, J.L. Coulomb, “Mathematical minimization of the time harmonics of the EMF of a DC-PM machine using a finite element method”, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 29, No. 2, 1993, pp. 1747-1752.

[KAS95] M. Kasper, K. Hameyer, A. Kost, “Automated optimal design of a permanent magnet DC motor using global evolution strategy and FEM”, Int. Journal of Applied Electromagnetics & Mechanics, No. 6, 1995, pp. 367-376.

[KIR83] S. Kirkpatrick, M.P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing", Science, Vol. 220, No. 4598, 1983, pp. 671-680.

[KOW68] J. Kowalik, M.R. Osborne, "Methods for Unconstrained Optimization problems, (Modern analytical and computational methods in Science and Mathematics)", Richard Bellman ED., 1986.

[KOZ92] J.R. Koza, "Genetic Programming", Cambridge, MA, MIT Press, 1992.

[LEB10] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, P. Brochet, G. Friedrich , "Prediction of audible magnetic noise radiated by adjustable-speed drive induction machines", IEEE Trans. Ind. Appl., Vol. 46, No. 4, Jul./Aug. 2010, pp. 1367-1373.

[LEB13] J. Le Benerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet,, P. Brochet "Bruit audible d'origine magnétique dans les machines asynchrones", Techniques de l'ingénieur, génie électrique, Vol. 6, No. D3580, 2013.

[LO00] W. Lo, C. Chan, Z. Zhu, L. Xu, D. Howe, K. Chau, "Acoustic noise radiated by PWM-controlled induction machine drives", IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 47, No. 4, Aug. 2000, pp. 880-889.

[MAH95] P. Mahey, R.R. Saldanha, J.L. Coulomb, "Moving asymptotes and active set strategy for constrained optimization design in magnetostatic problems", International Journal for numerical Methods in Engineering, Vol. 38, 1995, pp. 1021-1030.

[MIC94] Z. Michalewicz, "Genetic Algorithms + Data structures = Evolution Programs", Springer Verlag, 1994.

[MOH97] O.A. Mohammed, F.G. Uler, "A hybrid technique for the optimal design of electromagnetic devices using direct search and genetic algorithm", IEEE Trasactions on Magnetics, Vol. 33, No. 2. 1997, pp. 1931-1934.

[NAY91] B. Nayroles, G. Touzout, P. Villon, "La méthodes des éléments diffus", Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre, Vol. 313, No. 2, 1991, pp. 133-138.

[NEL65] J.A. Nelder, R. Mead, "A simplex method for function minimization", Computer Journal, Vol. 7, No. 4 1965, pp. 308-313.

[NGU99] T.N. Nguyen, J.L. Coulomb, "High order FE derivatives versus geometric parameters. Implantation on an existing code", IEEE Transcations on Magnetics, Vol. 35, No. 3, 1999 , pp. 1502-1505.

[PET97] P. Petin, J.L. Coulomb, P. Conraux, "High derivatives for fast sensitivity analysis in linear magnetodynamics", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No. 2, 1997, pp. 1149-1154.

[POW65] M.J.D. Powell, "An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivations", The Computer Journal, Vol. 7, No. 2, 1965, pp. 155-162.

[POW69] M.J.D. Powell, "A method for nonlinear constraints in minimization problems", Optimization, Academic Press, New York, 1969, pp. 283-298.

[PRE90] K. Preis, A. Ziegler, "Optimal design of electromagnetic devices with Evolution Strategies", COMPEL, Vol. 9, suppl. A, 1990, pp. 119-122.

[PRE92] W.H. Press, "Numerical Recipes in C : The Art of Scientific computing", Cambridge University Press, 1992.

[RAO96] S.S. RAO, “Engineering optimization : Theory and Practice”, John Wiley & Sons, 1996.

[REC94] I. Rechenberg, “Evolution Strategy, in Computational Intelligence : Imitating Life”, J.M. Zurada, R.J. Marks II, and C.J. Robinson, Eds, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1994, pp. 147-159.

[ROC73] R.T. Rockaffelar, “A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization”, Mathematical Programming, Vol. 5, No. 1, 1973, pp. 354-373.

[SCH98] P. Schimmerling, J.C. Sisson, A. Zaïdi, “Pratique des plans d’éxpériences”, Technique & Documentation, 1998.

[TAG87] G. Tagushi, “System of experimental design : engineering methods to optimize quality and minimise costs”, White Plains, NY : UNIPUB/Kraus International Publication, 1987.

Chapitre 4

Prise en compte de la variabilité dans les calculs vibratoires par éléments finis

4.1 Introduction

Dans la conception des systèmes vibratoires, les incertitudes sont souvent négligées, ou grossièrement prises en compte à l'aide de coefficients de sécurité importants. Les systèmes sont ainsi très conservatifs. Les incertitudes peuvent provenir des tolérances de conception et de fabrication, des chargements, des liaisons ou bien encore des propriétés des matériaux. La modélisation numérique des systèmes, à l'aide de la méthode des éléments finis, peut également être considérée comme une source d'incertitudes. Cela concerne les choix de modélisation, les outils numériques utilisés ou encore les approximations des lois physiques. Le principal intérêt des études prenant en compte la variabilité est de comprendre les différences de performance expérimentale observées de modèles théoriquement identiques. En effet, par exemple, le comportement vibro-acoustique de deux caisses automobiles sortant successivement de la chaîne de production n'est pas identique [BOU12].

Nous allons ici nous intéresser à améliorer la prédiction des modèles éléments finis, afin d'évaluer l'impact de la variabilité de paramètres matériau sur la réponse d'un modèle vibratoire de machine électrique (fréquence propre, réponse en fréquence). Dans ce chapitre, on présente tout d'abord un état de l'art concernant les travaux prenant en compte des incertitudes. Ensuite, les approches et les méthodes existantes sont présentées et discutées. Puis, une méthode est proposée afin de prendre en compte la variabilité dans les calculs vibratoires par éléments finis. L'hypothèse mécanique adoptée pour cette méthode est que les déformées modales d'une structure sont quasiment indépendantes des paramètres variables, soit la procédure de stabilité modale (*Modal Stability Procedure*, MSP). La formulation MSP est présentée pour l'analyse modale et la fonction de réponse en fréquence (FRF). La méthode utilise des simulations de Monte-Carlo (*Monte-Carlo Simulations*, MCS) sur cette formulation, la méthode est ainsi nommée MCS-MSP. Les spécifications de MCS-MSP sont un nombre réduit d'analyses élément finis, une validité pour un nombre petit ou grand de variables aléatoires, une validité pour un niveau bas ou élevé de variabilité et une compatibilité avec tout logiciel éléments finis mécanique standard (Nastran, Abaqus, Ansys, ...). Cette méthode est validée à l'aide d'un modèle simplifié du stator de la machine électrique présenté dans le chapitre 2 par rapport à la méthode de référence de Monte-Carlo. Le mécanisme de propagation des incertitudes est ensuite étudié sur les modèles simplifié et non simplifié du stator (avec dents) de la machine, permettant ainsi de discuter de la conception et des choix de modélisation.

4.2 État de l'art

Lors de la conception d'un système mécanique ou électromécanique, la prise en compte des incertitudes sur les variables de conception est impossible avec un modèle déterministe. Il est donc nécessaire de développer des modèles non déterministes prenant en compte la variabilité. De nombreux travaux de recherche s'intéressent ces dernières années aux analyses non déterministes dans le domaines mécanique et électromécanique.

Dès 1947, la méthode statistique de Monte-Carlo est proposée par Ulam [ULA47, MET49], qui a recours à un grand nombre de tirages aléatoires afin d'estimer les quantités statistiques : moyenne, écart type, coefficient de variation ou distribution. Shinozuka et Yamasaki [SHI88] présentent une vision globale sur l'avancement en mécanique stochastique. Schuëller [SCH97] en collaboration avec 22 auteurs constitue un état de l'art de la mécanique stochastique à l'aide de nombreux extraits de congrès. Elishakof propose des aspects théoriques dans [ELI99] et numériques dans [ELI03]. Ghanem et Spanos [GHA03] présentent la prise en compte de la variabilité dans les modèles des éléments finis.

Dans le domaine aérospatial, Pellissetti [PEL05] s'intéresse à la prédiction du comportement d'un satellite, Balmés [BAL03] présente une étude de variabilité sur le lanceur Ariane 5 et Potter [POT07] réalise une étude expérimentale sur les matériaux composites.

En ingénierie civile, la plupart des études non déterministes porte sur l'analyse de la fiabilité des bâtiments [SUF08] et des ponts [LAN80].

Dans le domaine automobile, Wood et Joachim [WOO84] étudient la variabilité du bruit du moteur perçu dans l'habitacle, en collaboration avec General Motors. Ils observent une variation de 10 dB sur 12 voitures nominalement identiques. Kompella et Bernhard [KOM93, KOM96] s'intéressent également à la variabilité de la réponse en fréquence entre véhicules. Ils observent un écart de 5 à 10 dB pour de basses fréquences (moins de 1 kHz). Une autre étude faite par Cornish et Syred [COR97] montre un écart pouvant atteindre 35 dB pour 5 camionnettes fabriquées à l'identique. Blain, Abry, Chové et Lardeur [BLA99] réalisent une étude chez le constructeur Renault sur la variabilité des assemblages de pièces soudées par points. Lionnet et Lardeur [LIO07] proposent une approche hiérarchique pour l'étude de la variabilité vibro-acoustique basses fréquences dans un habitacle automobile. Scigliano et al. [SCI11] s'intéressent à l'évaluation expérimentale et numérique de la variabilité intra du comportement vibro-acoustique d'un pare brise.

Dans ce contexte automobile, la méthode MCS-MSP est proposée par [MAR08], les formulations pour les éléments finis de barre, de poutre, de coque mince et de coque épaisse sont appliquées sur des applications industrielles [LAR10, ARN11, BOU12, DRU13, DRU14]. Cette méthode est développée dans ce chapitre pour l'élément fini 3D solide H8 (hexaèdre à 8 nœuds) pour un modèle de stator de machine tournante.

Dans le domaine des machines électriques, en lien avec le contexte de cette thèse, on cite quelques publications prenant en compte des incertitudes. Song [SON04] présente un modèle mathématique de mesure vibratoire avec incertitudes, afin de valider ses mesures expérimentales. Une modélisation de l'effet des incertitudes de fabrication pour les simulations électromagnétiques de dispositifs à micro-ondes est réalisée par Menezes [MEN08] à l'aide de simulations de Monte-Carlo. Une étude sur le comportement vibratoire d'un roulement est réalisée par Stocki [STO12] en fonction de propriétés incertaines en appliquant la méthode de scatter assessment. Mac [MAC13] présente une approche stochastique pour étudier les incertitudes géométriques et leurs effets sur les performances d'une machine électrique.

4.2.1 Les approches existantes

Les méthodes pour résoudre les problèmes stochastiques peuvent être classées de plusieurs façons [BEN88, SCH01]. Les méthodes peuvent être distinguer en approches probabiliste, possibiliste ou floue, en approches paramétrique ou non paramétrique, en méthodes d'échantillonnage de type Monte-Carlo ou méthodes des éléments finis stochastiques, en méthodes de type intrusive ou non intrusive.

En considérant la première classification, l'approche probabiliste est basée sur des hypothèses stochastiques provenant de la théorie de la probabilité [KOL50]. Il est nécessaire de connaitre la loi de probabilité des variables d'entrée, le plus souvent une loi normale ou bien uniforme. L'objectif de cette approche est alors d'exprimer les variables de sortie en termes d'estimateurs stochastiques (moyenne, écart type, coefficient de variation, densité de probabilité). Cette approche est la plus aboutie et la plus utilisée. La méthode MCS-MSP présentée dans ce manuscrit est associée à une approche probabiliste.

L'incertitude est lié au manque de connaissances de la variabilité d'un système. L'approche possibiliste est une méthode bien adaptée à ce problème. Il s'agit d'exprimer les bornes des variables de sortie d'un problème en fonction des bornes des variables d'entrée.

La théorie des nombres flous est proposée par Zadeh [ZAD65], en considérant qu'une variable logique appartient à un ensemble flou et varie entre 0 et 1. Il s'agit de définir une fonction d'appartenance dans ce domaine. Cette fonction est divisée successivement en intervalles correspondant à l'incertitude totale et à la valeur nominale de la variable.

Les méthodes non déterministes pouvant être associées aux approches probabiliste, possibiliste et floue vont maintenant être présentées. Le tableau 4.1 [MAR08] met en évidence les domaines d'utilisation de ces méthodes en fonction des approches.

	Probabiliste	Possibiliste	Floue
Non paramétrique	$\star$		
Perturbation	$\star$	$\star$	$\star$
Plans d'expériences	$\star$	$\star$	$\star$
Monte-Carlo	$\star$		
Chaos polynomial	$\star$		
Algèbre des intervalles		$\star$	
MCS-MSP et MCS-CGSM	$\star$	$\star$	

Tableau 4.1 – Domaines d'utilisation des méthodes non déterministes en fonction des approches utilisées

4.2.2 Méthodes non déterministes existantes

Méthode non paramétrique

Le choix des paramètres incertains d'un modèle et des lois de probabilité associées est important pour l'étude de la variabilité d'une réponse. Le modèle est supposé connu et les incertitudes ne portent que sur les paramètres de ce modèle. Pour des systèmes mécaniques complexes, les incertitudes de modélisation sont considérées par Soize [SOI00]. Cette approche est qualifiée de non paramétrique car les paramètres incertains ne sont pas directement modélisés par des variables aléatoires ou des champs stochastiques. Les incertitudes sont prises en compte de façon globale en modélisant directement les matrices du modèle dynamique par des matrices aléatoires, formées à partir du principe du maximum d'entropie, la théorie des matrices aléatoires est utilisée [SOI05]. Cette approche probabiliste est intéressante pour la prise en compte de l'incertitude et de la variabilité associées aux choix de modélisation de la structure.

Méthode de perturbation

La méthode des éléments finis stochastiques par perturbation [BAE81] est très employée. Elle est intéressante pour des problèmes faiblement non linéaires, où le niveau de variabilité (coefficient de variation) n'est pas élevé. Le nombre de variables aléatoires considérées en entrée doit être raisonnable. Cette méthode consiste en un développement en série de Taylor de la quantité perturbée autour de sa valeur moyenne, ce qui donne une expression du type :

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial Y}{\partial X_i} \triangle Y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i^2} \triangle Y^2 + \cdots \tag{4.1}$$

La variable aléatoire Y est la somme de la valeur nominale et de termes perturbés. Cette méthode est utilisée pour une étude mathématique de la variabilité des systèmes linéaires en 1967 par Pipes [PIP67].

Dans la pratique, les développements sont tronqués à l'ordre deux au plus. Cette méthode fournit la moyenne et la variance, en augmentant l'ordre des séries on peut calculer les moments d'ordre supérieur. La technique des perturbations est sujette aux conditions d'existence et de validité des séries de Taylor [GHA91] ; son champ d'application est donc limité aux cas où les variables varient peu (systèmes dynamiques). Le niveau de variabilité en entrée doit en effet être faible afin d'obtenir une bonne prédiction.

L'utilisation de cette méthode est possible avec la plupart des logiciels éléments finis permettant d'obtenir les sensibilités au premier ordre. Cambou [CAM75] introduit la perturbation au premier ordre dans les modèles par éléments finis. Il défend l'hypothèse de linéarité locale des déplacements en statique, en considérant la variabilité de plusieurs paramètres mécaniques (module d'Young, coefficient de Poisson et chargement).

Kaminski [KAM01, KAM02] étudie la perturbation au second ordre, qui rend le modèle plus précis. Cependant elle est difficilement applicable sur des problèmes industriels.

Une variante de la méthode de perturbation est proposée par Elishkoff et Ren [ELI03] permettant d'appliquer des niveaux élevés de variabilité. Cette méthode exige une approche intrusive dans le code éléments finis, car elle utilise la matrice de rigidité perturbée.

Une méthode en statique proposé par Falsone et Impollonia [FAL02] consiste à résoudre un problème aux valeurs propres en utilisant les matrices nominales et perturbées. Une extension de cette méthode en dynamique est présentée par les mêmes auteurs [FAL05].

Plans d'expériences

La méthode des plans d'expériences (*Design Of Experiments*) est proposée par Fischer en 1920 et est appliquée par Taguchi [TAG87] dans les années 1950 dans l'ingénierie. Cette méthode consiste à minimiser le nombre d'expériences par l'exploration optimale du domaine de variabilité. Elle a été utilisée par Cafeo [CAF97] pour identifier le nombre optimal d'essais à réaliser dans l'étude de la variabilité de mesure en analyse modale.

La lourdeur de cette méthode peut être considérée comme le principal inconvénient, surtout lorsque le nombre de variables est élevé. L'autre inconvénient est qu'elle ne permet pas d'obtenir la densité de probabilité.

Les techniques de surface de réponse sont souvent utilisées dans la méthode des plans d'expériences comme nous l'avons détaillé dans la partie optimisation du chapitre précédent. Le principe est de reconstruire le comportement d'un paramètre de sortie à partir d'un ensemble d'expériences, puis à l'aide d'une interpolation sur ces points d'obtenir une expression analytique approximée. L'efficacité de cette méthode dépend du choix de l'interpolation. Ensuite, des simulations de Monte-Carlo peuvent être appliquées sur cette surface, cette technique est très efficace en temps de calcul.

Cette méthode est très utilisée dans le domaine industriel. Kloess, Mourelatos et Meernik [KLO03] étudient l'influence de la variabilité de la performance d'une portière de voiture prenant en compte l'action du vent, l'infiltration d'eau et l'effort de fermeture. Lee, Baik et Yim [LEE02] traitent un problème d'optimisation en prenant en compte la fiabilité pour la conception de véhicules. Blain, Aubry, Chové et Lardeur [BLA99] étudient la variabilité sur des plaques soudées et assemblées, associée à des paramètres mécaniques (module d'Young, épaisseurs...).

Simulations de Monte-Carlo

Ces méthodes, dont le nom est en rapport avec les jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, ont été proposées par Nicholas Metropolis en 1947 et publiées avec Stanislas Ulam [ULA47, MET49]. L'utilisation des simulations de Monte-Carlo (*Monte-Carlo Simulations*, MCS) en ingénierie émerge dans les années 60 avec les ordinateurs. Les méthodes d'échantillonnage, de type Monte-Carlo, sont très répandues et détaillées dans de nombreux ouvrages comme dans celui de Fishman [FIS96]. La méthode de Monte-Carlo est souvent considérée comme méthode de référence pour sa robustesse et sa fiabilité. L'idée est d'obtenir un échantillon d'observations de la grandeur d'intérêt. Un grand nombre de réalisations déterministes est nécessaire. Les quantités statistiques (distribution, moyenne, écart-type, coefficient de variation) sont obtenues de ces observations. Le principal inconvénient des méthodes d'échantillonnage est qu'un nombre suffisamment grand de tirages doit être effectué afin que l'étude statistique de la réponse converge. Cette méthode est ainsi très coûteuse en temps de calcul pour un modèle industriel, la convergence de la réponse peut être difficile voire impossible à observer pour un modèle à plusieurs millions de degrés de liberté.

Différentes améliorations de MCS ont été proposées. La structure même de cette méthode permet une parallélisation aisée des opérations : il suffit de mener les résolutions des systèmes déterministes sur plusieurs processeurs (ou ordinateurs), ce qui réduit ainsi assez fortement les temps de calcul [PAP99]. Ou encore, la technique de l'Hypercube Latin, introduite par McKay [MCK79], permet une réduction significative du coût de calcul en conservant le même niveau de prédiction. Sa propriété de « stratification » permet de réduire assez nettement le nombre de tirages requis [RAN00].

Méthode spectrale des éléments finis stochastiques

La méthode spectrale des éléments finis stochastiques (*Spectral Stochastic Finite Element Method*, SSFEM) fait l'objet de nombreuses publications depuis les années 90. Elle est proposée pour prendre en compte l'aléa dans des problèmes mécaniques linéaires par Ghanem et Spanos [GHA91]. Plusieurs bibliographies [MAT97, SCH97, SUD00, LI01] ont été réalisées sur la SSFEM, et notamment un état de l'art des derniers développements par Stefanou [STE09]. Les avantages de ces méthodes sont présentées par Schenk et Schuëller [SCH05].

Le concept de la SSFEM couple la méthode des éléments finis, utilisée pour les problèmes déterministes, avec les outils probabilistes. L'idée est de considérer l'aléa comme une dimension supplémentaire du problème traité. En plus de la discrétisation spatiale, celle des éléments finis, certains paramètres du modèle sont représentés par une variable aléatoire obtenue par discrétisation de champs aléatoires ou par des variables aléatoires scalaires. La discrétisation de la dimension aléatoire est réalisée avec une famille de polynômes. Ces fonctions peuvent être des polynômes orthogonaux, en particulier un chaos polynomial. De manière générale, les méthodes stochastiques spectrales sont une classe de méthodes permettant d'approximer une représentation de la réponse $Y(\xi)$ du modèle via une décomposition de l'aléa sur un ensemble de fonctions Ψ_i et en considérant un ensemble de coefficients déterministes y_i à calculer :

$$Y(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \Psi_i(\xi) \tag{4.2}$$

Lorsque les polynômesΨ_i forment une base orthogonale, le développement est nommé chaos polynomial. L'approche proposée par Ghanem et Spanos [GHA91] permet de résoudre des problèmes mécaniques dont les propriétés matériau varient spatialement. Le champ aléatoire gaussien, représentant ces propriétés, est discrétisé en utilisant un développement de Karhunen-Loève [KAR46]. Afin de prendre en compte l'aléa, la matrice de rigidité est développée sur la base du chaos. La méthode est de ce fait intrusive puisqu'elle nécessite des modifications du code éléments finis.

Dessombz, Thouverez et Jézéquel [DES99a] propose un exemple simple de barre encastrée dont ils étudient la sensibilité paramétrique. Ghanem [GHA99] résume les différents développements de la SSFEM et propose une méthodologie. Une nouvelle variante exploitant les potentialités des réseaux de neurones est introduite par Hurtado [HUR02].

Les erreurs commises par les méthodes stochastiques de la littérature sont rarement présentées. La thèse de Ahmad [AHM09] peut toutefois être citée car il compare les méthodes SSFEM et MCS. Notamment, il présente un modèle de plate-forme pétrolière à 15 éléments finis de barre, pour lequel le module d'élasticité de chaque barre est considéré comme paramètre aléatoire avec un coefficient de variation de

10%. Pour les 5 premières valeurs propres, les erreurs sur l'écart-type sont comprises entre 10 et 17% pour un ordre 1 du chaos. Les erreurs deviennent inférieures à 5% à partir d'un ordre 4, mais pour un coût numérique bien plus conséquent.

Ces méthodes SSFEM de type Galerkin sont intrusives et nécessitent la modification de la boîte noire éléments finis, elles ne sont pas intéressantes dans un contexte industriel où les codes éléments finis utilisés sont principalement Abaqus, Nastran ou Ansys. Des alternatives récentes proposent des méthodes spectrales non intrusives [BER02]. Ces méthodes encapsulent des modèles déterministes dans un environnement de procédures stochastiques. Des surcouches sont ajoutées aux codes éléments finis déterministes classiques, sans modifications intrinsèques. Deux catégories d'approches se distinguent : une approche dite interpolante (collocation stochastique) et des approches non interpolantes comme la projection spectrale ou bien la régression. La méthode de régression est présentée par Berveiller et Sudret [BER02, BER06] pour déterminer les coefficients du chaos. La méthode de projection consiste à effectuer une minimisation au sens de la variance par des méthodes MCS ou par une méthode de quadratures de Gauss. Cette dernière est utilisée par Beddek [BEDD12], pour étudier la propagation d'incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme, il compare des approches spectrales intrusive SSFEM et non intrusive (projection spectrale avec méthode de quadrature) en terme de précision et de coût numérique.

Méthode itérative ou séries de Neumann

Le développement de Neumann a été employé par [GHA91] dans le cadre de la méthode spectrale et fournit un développement alternatif à la projection sur un chaos polynomial. L'avantage principal de ce traitement est que le système linéaire impliqué dans le calcul de la réponse stochastique est un système triangulaire inférieur, comme dans la méthode de perturbation. Par conséquent, le système est plus facile à résoudre que le système couplé généré par le développement sur la base du chaos polynomial. Cette méthode permet de récupérer la totalité de l'information probabiliste car la variable de sortie est décrite comme une fonction de variables aléatoires connue. Cette approche est assez similaire à la discrétisation de Karhunen-Loève. L'opérateur est décrit sous la forme d'une série infinie que l'on va tronquer à m termes. Il est alors possible d'identifier les premiers termes de la réponse. La convergence se fait lentement. Les applications numériques montrent que le développement de Neumann produit de plus mauvais résultats que le développement sur chaos polynomial. Cette méthode est employée par [SHI88] pour des structures constituées de barres, par [MEI98] pour l'analyse stochastique des poutres, et par [YAM88] pour une plaque soumise à une traction répartie dont le module d'élasticité longitudinal est un champ aléatoire bidimensionnel.

Algèbre des intervalles

Les incertitudes dans les structures peuvent être traitées par une approche probabiliste, comme dans les méthodes présentées précédemment. Une autre approche est possibiliste et consiste à utiliser une représentation par intervalles. La distribution de probabilité est en effet souvent difficile à connaître. Dans ce contexte, l'arithmétique des intervalles a été développée, afin de prendre en compte à la fois des erreurs physiques, expérimentales et les erreurs dues aux machines de calcul. Les idées principales du calcul par intervalles sont données par Moore [MOO66]. Lorsque les systèmes mécaniques modélisés par éléments finis dépendent de paramètres incertains et bornés, ils peuvent être étudiés grâce à l'arithmétique des intervalles. Le calcul par intervalles a des propriétés spéciales [DES99b] en comparaison à l'arithmétique classique. En particulier, si une variable intervalle revient plusieurs fois dans une expression, il est très probable que le résultat sera surestimé. La majorité des algorithmes pour la résolution de systèmes linéaires considère des matrices intervalles pleines, chaque terme de la matrice est un intervalle indépendant. En effet, lors de la construction des matrices éléments finis, on peut factoriser les paramètres intervalles, ce qui permet d'éviter de trop importantes surestimations. La méthode des intervalles est utilisé dans le domaine vibro-acoustique en 1995 par Dimarogonas [DIM95]. Cette méthode présente une surestimation des niveaux d'incertitude des sorties.

Logique floue

La logique floue (*Fuzzy logic*) a été proposée par [ZAD65] pour résoudre le problème de surestimation des incertitudes modélisées par des intervalles. La théorie de l'approche floue a été appliquée par Rao et Sawyer [RAO95] en simulation numérique avec l'introduction de la méthode des éléments finis flous. Moens et Vandepitte [MOE00] ont développés une technique calculant les enveloppes d'une série de courbes de réponse en fréquence en garantissant l'inclusion de la réponse réelle. Hanss [HAN02] a proposé une méthode dite de transformation inspirée des plans d'expériences.

Méthode MCS-CGSM

La méthode MCS-CGSM pour l'analyse statique est de concept similaire à la méthode MCS-MSP pour l'analyse vibratoire. Elle fait l'hypothèse que les efforts généralisés ne dépendent pas des paramètres variables, soient des efforts généralisés certains (*Certain Generalized Stress Method*, CGSM). Elle est proposée par Lardeur, Oudjene et Arnoult en 2003 [LAR03a, LAR03b] pour prendre en compte la variabilité dans les calculs statiques de barres et poutres modélisées par éléments finis. La méthode MCS-CGSM est étendue à des modèles de plaques et de coques par Mahjudin [MAH13]. En utilisant le théorème énergétique de Castigliano, la méthode MCS-CGSM permet de formuler le déplacement d'un point de la structure en fonction des paramètres variables à l'aide de deux analyses éléments finis. Des tirages de Monte-Carlo sont effectués sur l'expression semi-analytique du déplacement pour estimer les quantités statistiques.

Discussion des méthodes

Les méthodes stochastiques de type Monte-Carlo exigent de nombreux tirages à effectuer sur un solveur éléments finis, cette méthode fiable et robuste nécessite une grande puissance de calcul (ordinateurs multiprocesseurs). Avec un coût de calcul raisonnable, les méthodes de perturbation sont intéressantes, mais seulement pour un faible niveau de variabilité des paramètres d'entrées. Les plans d'expériences, les surfaces de réponse ou les méthodes pour l'approche floue sont limités à un nombre faible de variables aléatoires, une centaine de calculs sont nécessaires pour atteindre une bonne précision. Les méthodes spectrales des éléments finis stochastiques, et en particulier le chaos polynomial, ont également du mal à gérer un grand nombre de variables, les variantes non intrusives dans les codes éléments finis proposent une évolution intéressante.

Toutes ces méthodes ont un point commun, l'hypothèse est d'origine statistique ou mathématique. La méthode MCS-MSP, qui va être présentée et utilisée dans cette thèse, est basée sur une hypothèse d'origine mécanique. La méthode MCS-MSP est une méthode de type Monte-Carlo appliquée sur une formulation spécifique et non sur un solveur éléments finis. Cette méthode a pour spécifications de réaliser une unique analyse éléments finis en configuration nominale, d'être valide pour un nombre petit ou grand de variables aléatoires, d'être valide pour un niveau bas ou élevé de variabilité et d'être compatible avec tout logiciel éléments finis standard.

4.2.3 Méthode de référence

Afin de valider et de mettre en évidence les intérêts d'une méthode stochastique proposée, une comparaison avec la méthode de simulations de Monte-Carlo directe (MCS) est souhaitée, car celle-ci peut être considérée comme une référence. Cette comparaison est toutefois peu présentée dans la littérature. La méthode MCS-MSP proposée dans ce manuscrit est validée et comparée par la suite à la méthode MCS.

Cette validation est réalisée sur un modèle éléments finis simplifié de stator, soit un cylindre creux, afin de s'affranchir des temps de calcul possiblement très importants sur notre modèle industriel de stator de la machine électrique. Les méthodes stochastiques MCS et MCS-MSP sont programmées dans le logiciel Matlab [MAT11] et utilisent un générateur de nombres aléatoires suivant une loi normale.

4.3 Introduction : Hypothèse de stabilité modale et validation du maillage MSP

La bonne utilisation de la méthode MCS-MSP (*Modal Stability Procedure*), pour l'analyse modale et la fonction de réponse en fréquence (FRF), est conditionnée par la vérification de l'hypothèse MSP et la validation du maillage avant de mener une étude avec variabilité.

4.3.1 Hypothèse de stabilité modale

La méthode MCS-MSP est une méthode de calcul vibratoire basée sur l'hypothèse mécanique de stabilité modale. Les déformées modales de la structure sont supposées très peu influencées par la perturbation des paramètres d'entrée. La méthode MCS-MSP permet de prendre en compte la variabilité des propriétés mécaniques de la structure étudiée et de construire via des simulations de Monte-Carlo une information stochastique (moyenne, écart-type, coefficient de variation et distribution de la probabilité) d'une fréquence propre ou d'une FRF. Les analyses éléments finis déterministes classiques, associées aux tirages aléatoires, sont très coûteuses, mais l'hypothèse de stabilité modale permet de réduire considérablement le coût de chaque tirage pour faire de la méthode MCS-MSP une méthode de simulations de Monte-Carlo économique.

La validité de l'hypothèse de stabilité modale est discutée par Boubaker [BOU12] et par Druesne [DRU14] pour un modèle éléments finis de caisse nue automobile. Pour ce problème à 214 variables aléatoires (épaisseurs de tôles), à 840000 degrés de liberté et avec un niveau de variabilité modéré, un calcul de MAC (*Modal Assurance Criterion*) [EWI84, ALL03] est effectué entre la base modale nominale et plusieurs bases modales perturbées, afin d'évaluer l'influence de la perturbation sur les déformées modales. Le MAC, qui est un indicateur de comparaison de bases modales, vaut 1 ou quasiment 1 à basse fréquence dans cette étude, l'hypothèse est vérifiée. Pour une plage de fréquence plus étendue, les valeurs de MAC diminuent pour atteindre des valeurs de 0,8 mais l'hypothèse reste globalement acceptable. Il a été montré que, même lorsque l'indicateur MAC est légèrement mis en défaut, l'erreur MCS-MSP/MCS sur l'écart-type de la fréquence propre reste faible. Ceci montre une certaine robustesse de la méthode MCS-MSP et de son hypothèse.

Afin de vérifier l'hypothèse de stabilité modale, dans le cadre de l'étude du stator de la machine électrique, quelques calculs de MAC ont été également réalisés et ont permis de vérifier des valeurs très acceptables dans la gamme de fréquences d'intérêt.

4.3.2 Validation du maillage MSP

La seconde précaution d'utilisation de la méthode MCS-MSP concerne le choix du maillage. La validation du maillage se fait en configuration nominale. La convergence de la méthode MCS-MSP est étudiée, avec les valeurs nominales des paramètres, comme il est procédé habituellement avec la méthode des éléments finis. Pour le maillage choisi et en configuration nominale, un calcul MSP et un calcul éléments finis (EF) sont comparés. La validation du maillage est acceptée si les écarts entre les formulations MSP et EF sont de l'ordre du pourcent. Cette validation est effectuée par la suite pour les modèles de stators étudiés.

4.4 La méthode MCS-MSP pour l'analyse modale

Les aspects théoriques de la méthode MCS-MSP sont ici présentées, notamment avec la formulation pour l'élément solide hexaédrique à 8 nœuds. Un modèle de stator simplifié est utilisé pour valider la méthode MCS-MSP en configuration nominale, puis avec variabilité. Le mécanisme de propagation des incertitudes est étudié sur les modèles simplifié et non simplifié du stator de la machine électrique, enfin la variabilité des fréquences propres est discutée.

4.4.1 Aspects théoriques

Formulation MSP générale

Le problème déterministe aux valeurs propres nominales pour l'analyse dynamique est décrit par l'équation suivante avec l'indice 0 associé à la configuration nominale :

$$K_0 \Phi_0 = M_0 \Phi_0 \Lambda_0 \tag{4.3}$$

où K_0 et M_0 sont respectivement les matrices de rigidité et de masse, Λ_0 est la matrice diagonale des valeurs propres et Φ_0 est la matrice modale. Pour un nœud i, l'équation 4.3 devient :

$$K_0 \phi_0^i = \lambda_0^i M_0 \phi_0^i \tag{4.4}$$

où λ et ϕ sont respectivement les valeur propre et vecteur propre. Lorsqu'on introduit la variabilité dans le système, l'équation générale aux valeurs propres s'exprime en fonction des paramètres perturbés avec l'indice p :

$$K_p \phi_p^i = \lambda_p^i M_p \phi_p^i \tag{4.5}$$

En se basant sur la théorie des matrices perturbées, introduite par Yang, Chen et Wu [YAN01], on peut exprimer le vecteur propre perturbé par :

$$\phi_p = \phi_0 + \vartheta\phi_1 + \vartheta^2\phi_2 + \vartheta^3\phi_3 + \cdots = \phi_0 + \Delta\phi_p \tag{4.6}$$

où les expressions de ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont fournis dans [CHE77] et ϑ est une variable aléatoire centrée réduite.

Puisque l'objectif est d'évaluer la variabilité sur les fréquences propres, on utilise l'expression du quotient de Rayleigh en analyse modale :

$$\lambda_p = \frac{(\phi_0 + \Delta\phi_p)^T K_p (\phi_0 + \Delta\phi_p)}{(\phi_0 + \Delta\phi_p)^T M_p (\phi_0 + \Delta\phi_p)} \tag{4.7}$$

En appliquant l'hypothèse de stabilité modale, l'équation 4.7 est réduite à :

$$\lambda_p = \frac{\phi_0^T K_p \phi_0}{\phi_0^T M_p \phi_0} \tag{4.8}$$

La variabilité est conservée exclusivement dans les matrices caractéristiques K_p et M_p. Le numérateur de l'équation 4.8 est homogène à l'énergie interne de déformation, et le dénominateur est une forme de l'énergie cinétique. Avec discrétisation, cette équation peut être exprimée comme une somme sur l'ensemble des n éléments finis de la structure :

$$\omega_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \phi_{0,j}^T k_{p,j} \phi_{0,j}}{\sum_{j=1}^n \phi_{0,j}^T m_{p,j} \phi_{0,j}} \tag{4.9}$$

où ω_p^2 est le carré de la pulsation propre, $k_{p,j}$ et $m_{p,j}$ sont respectivement les matrices élémentaires perturbées de rigidité et de masse, $\phi_{0,j}$ est le vecteur propre élémentaire nominale.

L'obtention des matrices élémentaires de rigidité et de masse de l'équation 4.9 est difficile à partir d'un code éléments finis standard, et parfois non possible. De plus, selon le type d'éléments finis, les paramètres d'intérêt de la matrice de rigidité ne sont pas toujours faciles à isoler. Pour cela, on formule l'énergie interne élémentaire du numérateur de l'équation 4.9 de cette manière :

$$\pi_{int}^{elem} = \frac{1}{2}\phi_{0,j}^T k_{p,j} \phi_{0,j} = \frac{1}{2}\int_{V_{p,j}} \sigma_{p,j}\varepsilon_{p,j} dV \tag{4.10}$$

où $\sigma_{p,j}$ est le vecteur des contraintes modales élémentaires, $\varepsilon_{p,j}$ est le vecteur des déformations modales élémentaires et $V_{p,j}$ est le volume fini élémentaire. Afin d'évaluer cette nouvelle forme de l'intégrale de l'énergie interne de l'élément, il est nécessaire d'avoir les déformations modales élémentaires, ce qui est facile à extraire d'un code éléments finis.

Dans le domaine élastique, les déformations et les contraintes sont liées par la loi de Hooke :

$$\sigma_{p,j} = H_{p,j}\varepsilon_{p,j} \tag{4.11}$$

où $H_{p,j}$ est la matrice de loi constitutive mécanique pour le j-ème élément.

En ce qui concerne le dénominateur de l'équation 4.9, la masse modale est considérée par une matrice de masse concentrée. Cette matrice de masse élémentaire est diagonale et est facile à construire.

La formulation MSP d'une pulsation propre perturbée est donc :

$$\omega_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \int_{V_{p,j}} \varepsilon_{p,j}^T H_{p,j} \varepsilon_{p,j} dV}{\sum_{j=1}^{n} \phi_{0,j}^T m_{p,j} \phi_{0,j}} \tag{4.12}$$

avec la fréquence propre perturbée f_p liée à cette pulsation par la relation $\omega_p = 2\pi f_p$. A partir de cette équation 4.9, les formulations MSP des éléments finis de barre, de poutre et de coque à 3 nœuds sont proposées dans la thèse de Martini [MAR08, ARN11], et la formulation MSP de l'élément de coque à 4 nœuds est décrite par Boubaker [BOU12].

Formulation MSP pour l'élément volumique

Nous allons maintenant proposer la formulation MSP pour l'élément solide hexaédrique à 8 nœuds (figure 2.16), qui est utilisé pour modéliser le stator étudié dans ce manuscrit.

Le numérateur de l'équation 4.9 est la somme des énergies élémentaires. Avec la loi de comportement $H_{p,j}$ en 3D, l'énergie interne pour l'élément solide H8 est calculée au centre de l'élément, elle est supposée constante sur tout le volume élémentaire et est de la forme :

$$\pi_{int}^{elem} = \frac{1}{2} \varepsilon_{p,j}^T H_{p,j} \varepsilon_{p,j} V_{p,j} \tag{4.13}$$

Il a été discuté dans le chapitre 2 (section 2.6.2) de la modélisation du stator constitué de tôles empilées en un matériau homogène isotrope. Afin de pouvoir distinguer les modules d'élasticité dans les directions x, y et z du stator dans l'étude de variabilité, le matériau est modélisé par un comportement anisotrope. En considérant les modules d'Young égaux suivant les directions x et y de la section du stator, le comportement est ici orthotrope. La loi de Hooke 3D suivante est donc considérée, en tenant compte de propriétés matériau possiblement différentes dans les trois directions de l'espace :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{yz}\nu_{zy})}{E_y E_z} & \frac{(\nu_{yz}-\nu_{zx}\nu_{yz})}{E_y E_z} & \frac{(\nu_{zx}-\nu_{yz}\nu_{zy})}{E_y E_z} & & & \\ \frac{(\nu_{xy}-\nu_{xz}\nu_{zy})}{E_x E_z} & \frac{(1-\nu_{zx}\nu_{xz})}{E_x E_z} & \frac{(\nu_{zy}-\nu_{zx}\nu_{xy})}{E_x E_z} & & & \\ \frac{(\nu_{xz}-\nu_{xy}\nu_{yz})}{E_x E_y} & \frac{(\nu_{yz}-\nu_{yx}\nu_{xz})}{E_x E_y} & \frac{(\nu_{xz}-\nu_{xy}\nu_{yz})}{E_x E_y} & & & \\ & & & aG_{xy} & & \\ & & & & aG_{xz} & \\ & & & & & aG_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

avec les notations $a = \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}-\nu_{zx}\nu_{xz}-\nu_{xy}\nu_{yx}-2\nu_{yz}\nu_{zx}\nu_{xy}}{E_x E_y E_z}$ et $G_{ij} = \frac{E_i}{2(1+\nu_{ij})}$, où E_i est le module d'Young, ν_{ij} est le coefficient de Poisson, G_{ij} est le module de cisaillement et en considérant les indices i et j étant les directions des propriétés matériau.

En ce qui concerne le dénominateur de l'équation 4.9, l'énergie cinétique pour l'élément solide H8 peut s'écrire en considérant une modélisation de la masse en matrice diagonale :

$$\pi_{cin}^{elem} = \rho_{p,j} V_{p,j} \phi_{0,j}^T I^m \phi_{0,j} / N \tag{4.14}$$

où $\rho_{p,j}$ est la masse volumique élémentaire perturbée, $V_{p,j}$ est le volume élémentaire, I^m une matrice d'identité dans laquelle les termes d'inertie de translation sont unitaires alors que les termes d'inertie de rotation sont nuls, $\phi_{0,j}$ est le vecteur propre élémentaire nominale et N le nombre de nœuds de l'élément solide.

Le rapport de la somme des énergies internes élémentaires 4.13 sur la somme des énergies cinétiques élémentaires 4.14 constitue donc la formulation MSP concernant l'élément 3D solide d'une pulsation propre perturbée. Cette formulation met en évidence les paramètres du matériau (modules de Young et masse volumique), ce qui permet de les considérer comme paramètres aléatoires.

Formulation MSP pour l'élément masse

La formulation MSP pour l'élément de masse est écrit avec l'énergie cinétique d'un élément de masse ponctuelle suivante :

$$\pi_{cin}^{masse} = masse_{p,j}\phi_{0,j}^T I^m \phi_{0,j} \tag{4.15}$$

où $masse_{p,j}$ est la masse perturbée attribuée au nœud.

4.4.2 Organigramme de la méthode MCS-MSP

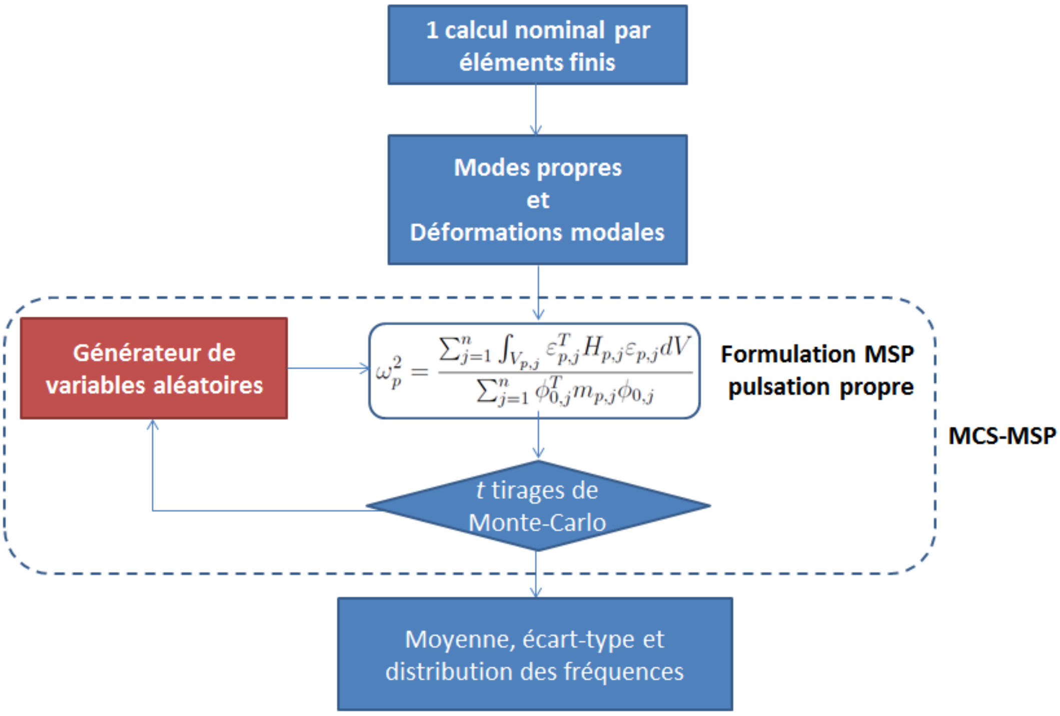


FIGURE 4.1 – Organigramme de la méthode MCS-MSP pour le calcul de fréquences propres

La formulation MSP, qui vient d'être présentée, est associée à la méthode nommée MCS-MSP car cette méthode est associée à des simulations de Monte-Carlo. La figure 4.1 présente l'organigramme de la méthode MCS-MSP pour calculer les fréquences propres. Le code éléments finis (EF) utilisé dans le cadre de cette thèse est Nastran [NAS12]. La formulation MSP présentée a montré la nécessité d'extraire les déformations modales et les vecteurs propres de l'analyse modale (sol 103) en configuration nominale. Ces sorties sont écrites dans un fichier texte de type *.pch, l'aspect informatique pourrait être amélioré. Ensuite, ces informations, la connectivité (nœuds, éléments) et les propriétés matériaux sont importées et réorganisées dans Matlab [MAT11], afin de coder la méthode MCS-MSP. Les termes constants, non perturbés, de l'énergie interne et de l'énergie cinétique sont préalablement calculés. Des simulations de Monte-Carlo sont ensuite effectuées sur la formulation MSP (équation 4.12), pour un nombre t de tirages égal à 10,000. A partir des t fréquences propres perturbées calculées, on construit les informations stochastiques : moyenne, écart type, coefficient de variation et densité de probabilité.

Spécifications de la méthode MCS-MSP

L'organigramme de la méthode MCS-MSP (figure 4.1) met en avant le caractère non intrusif de la méthode, soit aucune modification du code éléments finis. Les codes EF utilisés dans l'industrie (Nastran, Abaqus, Ansys, ...), et tout code EF d'une manière générale, sont compatibles avec cette approche. Les méthodes d'échantillonnage de type Monte-Carlo sont couteuses en temps de calcul lorsqu'elles font appel à chaque tirage au code EF. La méthode MCS-MSP est une méthode de simulations de Monte-Carlo, elle effectue des tirages sur la formulation semi-analytique MSP et donc met en avant un aspect économique très intéressant. De plus, la formulation MSP montre un coût proportionnel au nombre EF du modèle et au nombre de modes propres utilisé, ceci est discuté à l'issue des exemples. Concernant l'aspect stochastique, la méthode est quasiment indépendante du nombre de variables aléatoires et est compatible avec un niveau bas ou élevé de variabilité.

4.4.3 Application : stator simplifié

Dans cette partie nous appliquons la méthode des éléments finis et la méthode MCS-MSP sur un modèle simplifié du stator de la machine électrique. Tout d'abord, on présente le modèle du stator simplifié, la convergence de chaque méthode et le choix du maillage. On s'intéresse ensuite à valider la méthode MCS-MSP en configuration nominale, puis avec prise en compte de la variabilité. Le mécanisme de propagation des incertitudes est discuté. Enfin le coût numérique de la méthode MCS-MSP est présenté.

Présentation

Le comportement vibratoire du stator est ici étudié avec un modèle géométrique simplifié, soit un cylindre creux (figure 4.2), ayant le volume du stator avec dents. Le matériau cuivre n'est donc pas représenté, l'unique matériau constitutif du stator est l'acier et il est modélisé avec un comportement élastique homogène isotrope. Les propriétés du matériau sont : le module d'Young $E = 200$ GPa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et la masse volumique $\rho = 7500$ Kg/m^3. L'analyse modale considérée est de type libre-libre, sans conditions aux limites.

Afin d'étudier la convergence des méthodes EF et MCS-MSP, 7 maillages sont réalisés avec une discrétisation employant des éléments solides hexaédriques à 8 nœuds (H8). Le tableau 4.2 présente les différents maillages avec la discrétisation, le nombre de nœuds et le nombre d'éléments associés. La figure 4.3 présente le maillage 3 à 1872 nœuds. Le maillage 8 est considéré très fin, il est pris par la suite comme maillage de référence.

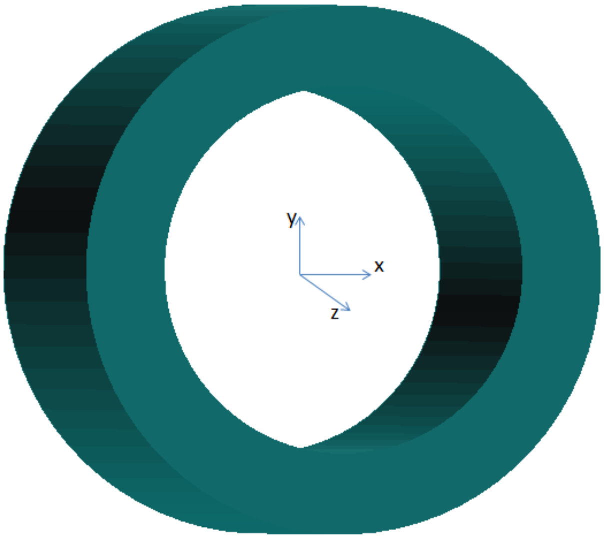


FIGURE 4.2 – Modèle géométrique du stator simplifié

	Nombre de découpage dans le sens radial	Nombre de découpage dans le sens axial	Nombre de nœuds total	Nombre d'éléments total
Maillage 1	1	4	120	48
Maillage 2	2	8	648	384
Maillage 3	3	12	1872	1296
Maillage 4	4	16	4080	3072
Maillage 5	5	20	7560	6000
Maillage 6	6	24	12600	10368
Maillage 8	8	32	38016	24576

Tableau 4.2 – Maillages étudiés

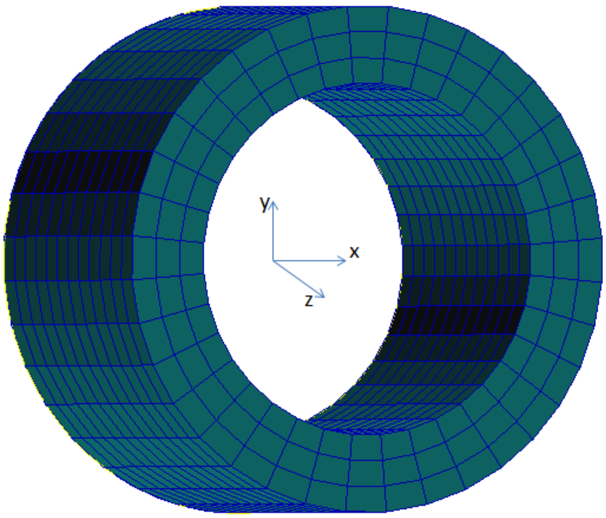


FIGURE 4.3 – Maillage 3 du stator simplifié à 1872 nœuds et 1296 éléments H8

Les 12 premiers modes propres associés à ces fréquences propres sont représentés sur la figure 4.4 pour le maillage 6. Les formes modales présentées dans cette figure peuvent être nommées selon la déformation subie par chaque mode. On considère la notation de mode (i , j) où i est le nombre de lobes vu dans le plan radial et j au niveau axial. Le premier mode, par exemple, est un mode de la forme (2,0). Lorsque la déformation modale est inexistante au niveau axial, soit j=0 , le mode est dit radial. Ces types de déformation sont précisés pour chaque mode dans le tableau 4.3.

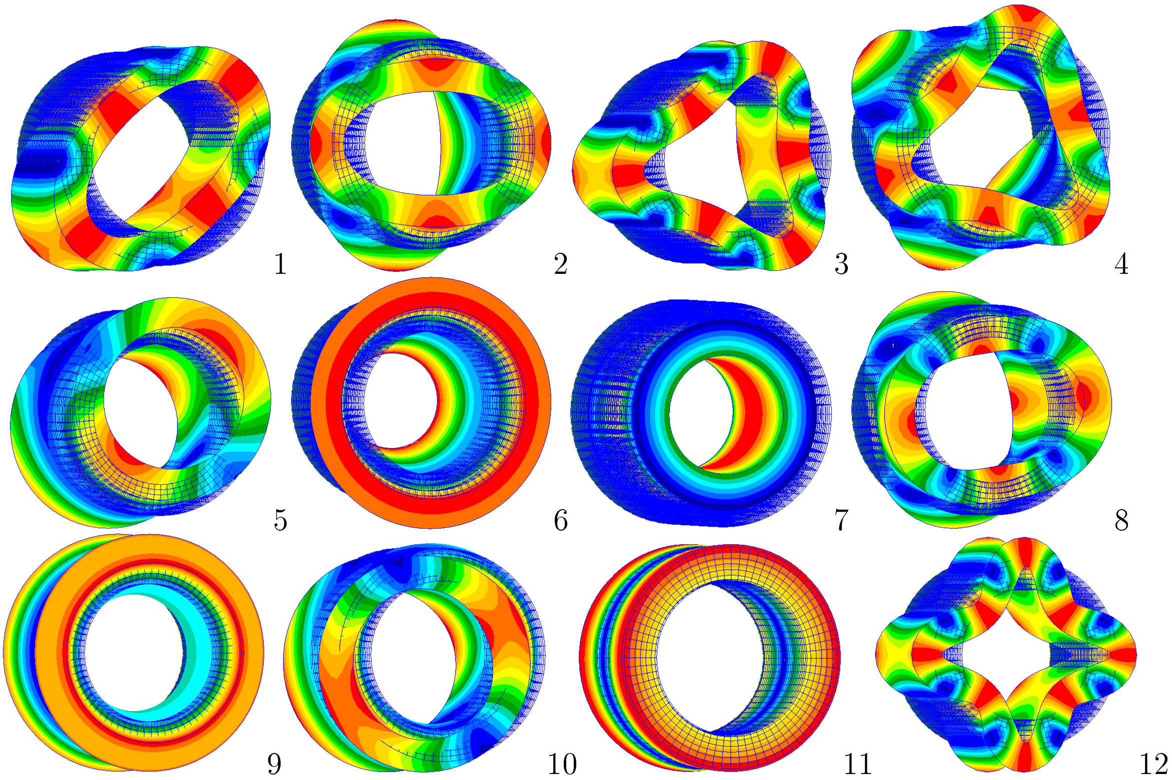


FIGURE 4.4 – Modes propres de 1 à 12 du stator simplifié calculés par Nastran

Convergence du maillage EF

Fréquence propre	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5	M 6	M 8	Type de mode
1	2331	2143	2102	2087	2080	2076	2071	(2,0)
2	2588	2688	2688	2687	2686	2685	2684	(2,1)
3	6068	5624	5507	5463	5442	5431	5414	(3,0)
4	6146	6324	6331	6329	6327	6326	6323	(3,1)
5	6295	6429	6453	6461	6465	6467	6468	flexion
6	6863	7361	7467	7504	7522	7532	7542	(0,1)
7	6935	7630	7636	7638	7639	7640	7640	(0,0)
8	7153	8562	8917	8918	8918	8918	8918	(2,1)
9	7651	8674	8950	9096	9129	9135	9143	(0,2)
10	8617	9016	9090	9116	9165	9203	9243	flexion
11	7440	8910	9018	9143	9202	9235	9267	(0,2)
12	8167	9045	9348	9454	9504	9494	9466	(4,0)

Tableau 4.3 – Fréquences propres EF (Hz) de 1 à 12 du stator simplifié calculées par Nastran pour les 7 maillages

Il est important de vérifier l'influence de la discrétisation du maillage sur le calcul des fréquences propres nominales afin d'identifier le maillage adapté à une bonne précision des résultats. Pour étudier la convergence par la méthode des éléments finis, une analyse modale avec le code Nastran est effectuée pour chaque maillage du tableau 4.2. Les 12 premières fréquences propres EF sont présentées en Hz dans le tableau 4.3 pour chaque maillage M, représentant une plage de fréquences de 2000 à 10000 Hz.

Afin d'observer la convergence des 4 premières fréquences, les résultats EF de ce tableau sont représentés sur la figure 4.5. La convergence des fréquences 1 et 3 se fait par valeurs supérieures, et celle des fréquences 2 et 4 est obtenue rapidement par valeurs inférieures.

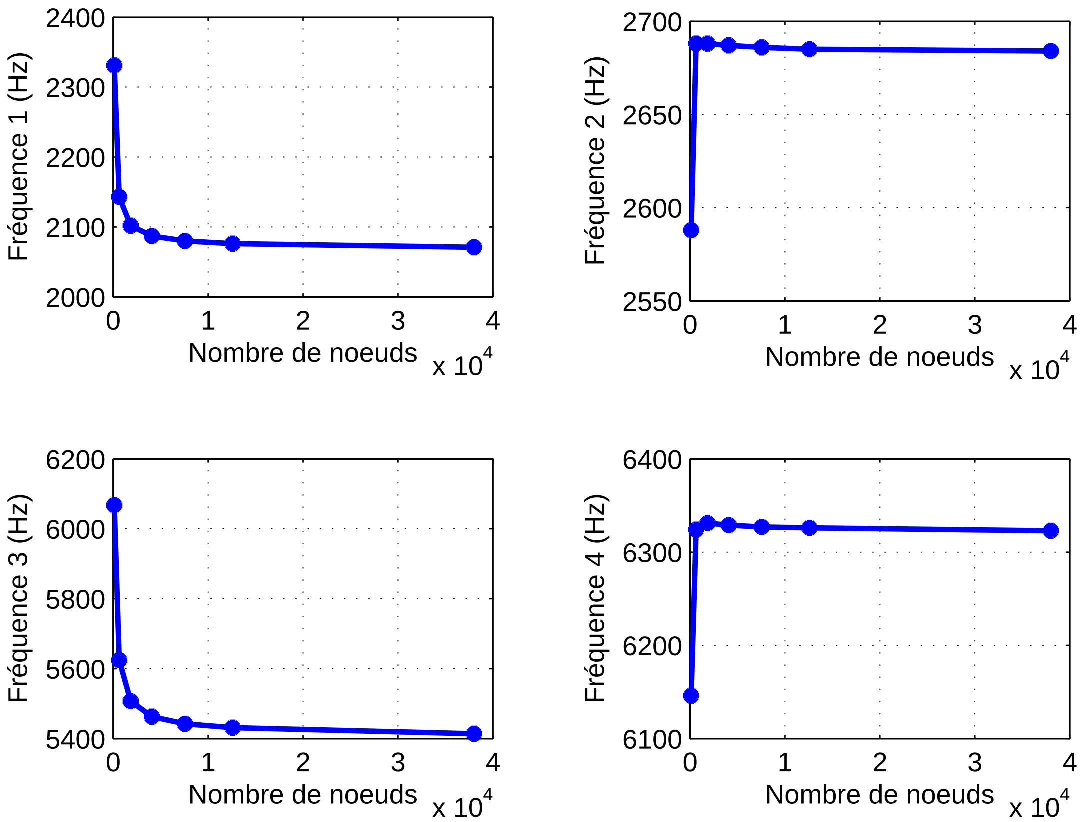


FIGURE 4.5 – Fréquences propres 1, 2, 3 et 4 calculées par la méthode EF en fonction du nombre de nœuds du maillage

On considère ici un maillage convergé lorsque l'écart relatif, entre deux maillages de finesse successive, est inférieur à 1% . Ce critère est retenu pour décider de la convergence du modèle EF Nastran du stator simplifié. Les écarts relatifs sont présentés dans le tableau 4.4. On observe une réduction de l'écart relatif avec l'augmentation du nombre de nœuds. L'écart relatif entre les maillages 4 et 5 est inférieur à 1% pour les 12 premières fréquences propres. Le maillage 4 du stator simplifié est ainsi considéré comme convergé pour le calcul des fréquences propres par la méthode des éléments finis implémentée dans le solveur Nastran.

Fréquence propre	Écart 1/2	Écart 2/3	Écart 3/4	Écart 4/5
1	8.81	1.94	0.71	0.33
2	-3.69	-0.01	0.05	0.03
3	7.89	2.13	0.8	0.38
4	-2.82	-0.1	0.03	0.03
5	-2.09	-0.37	0.13	-0.06
6	-6.77	-1.41	0.51	-0.24
7	-9.1	-0.1	0.03	-0.01
8	-16.46	-3.98	0.01	0
9	-11.79	-3.08	-1.6	-0.36
10	-4.43	-0.8	-0.28	-0.53
11	-16.5	-1.2	-1.37	-0.64
12	-9.71	-3.24	-1.13	-0.52

Tableau 4.4 – Écart relatifs (%) entre 2 maillages sur les fréquences propres EF du stator simplifié calculées par Nastran

Convergence du maillage MSP

Une étude de convergence est également réalisée en utilisant la formulation MSP pour calculer les fréquences propres (équation 4.12). Le tableau 4.5 présente les 12 premières fréquences propres. La plupart des fréquences MSP convergent par valeurs inférieures. Les écart relatifs entre les maillages sont proposés dans le tableau 4.6. A l'aide du même critère de convergence que pour la méthode EF, soit un écart relatif inférieur à 1% entre deux maillages successifs, le tableau montre que le maillage 5 est considéré comme convergé pour le calcul de fréquences propres par la formulation MSP.

On remarque que le maillage convergé pour la formulation MSP est plus fin que celui obtenu pour la méthode par éléments finis. La formulation MSP (équation 4.12) et la formulation de l'élément solide H8 de Nastran sont effectivement différentes. Ceci a été déjà observé par d'autres types d'éléments finis dans [MAR08].

Fréquence propre	M1	M2	M3	M4	M5	M6
1	982	1893	1993	2026	2041	2049
2	124	2404	2560	2614	2639	2653
3	3391	5035	5243	5314	5346	5364
4	9428	5689	6037	6060	6219	6250
5	5980	6351	6417	6441	6452	6458
6	6608	7303	7441	7490	7513	7526
7	4608	7625	7637	7639	7640	7640
8	4576	7955	8844	8877	8892	8900
9	7589	8027	8676	8941	9122	9131
10	8461	8977	9073	9107	9066	9134
11	4592	8753	8729	8981	9098	9162
12	4330	8310	9009	9261	9379	9383

Tableau 4.5 – Fréquences propres MSP (Hz) de 1 à 12 du stator simplifié pour les 6 premiers maillages

Fréquence propre	Écart 1/2	Écart 2/3	Écart 3/4	Écart 4/5	Écart 5/6
1	-48.14	-5.04	-1.64	-0.74	-0.4
2	-48.44	-6.1	-1.63	-0.95	-0.51
3	-32.64	-3.97	-2.07	-0.61	-0.33
4	-39.74	-5.78	-1.34	-0.93	-0.5
5	-5.84	-1.04	-2.01	-0.17	-0.09
6	-9.52	-1.85	-0.37	-0.3	-0.17
7	-39.56	-0.15	-0.66	-0.01	-0.01
8	-42.48	-10.05	-0.03	-0.17	-0.09
9	-5.45	-7.48	-2.96	-1.99	-0.09
10	-5.74	-1.06	-0.37	0.45	-0.75
11	-47.54	0.28	-2.81	-1.29	-0.7
12	-47.89	-7.77	-2.72	-1.26	-0.04

Tableau 4.6 – Écarts relatifs (%) entre 2 maillages sur les fréquences propres MSP du stator simplifié

Choix du maillage et validation de MSP au nominal

Afin de valider la formulation MSP au nominal, on compare les fréquences propres MSP à celles calculées par la méthode des éléments finis. Le tableau 4.7 montre cette comparaison pour les maillages 4, 5 et 6 en évaluant l'erreur relative entre les fréquences propres nominales MSP et EF. Pour le maillage 4, qui est le maillage convergé pour le calcul EF, les erreurs observées sont toutes inférieures à 3%. Les erreurs sont inférieures à 2% pour le maillage 5, qui est le maillage convergé pour la formulation MSP. Enfin pour le maillage 6, les erreurs sont au maximum de l'ordre de 1%. On constate donc que les erreurs relatives sont très faibles entre la formulation MSP et la méthode EF.

Dans cette comparaison, on choisit le maillage 6 comme valide pour la prise en compte de la variabilité par la formulation MSP dans le paragraphe 4.4.3.

Fréquence propre	Maillage 4	Maillage 5	Maillage 6
1	-2.93	-1.88	-1.3
2	-2.69	-1.73	-1.21
3	-2.74	-1.77	-1.23
4	-2.65	-1.71	-1.19
5	-0.31	-0.2	-0.14
6	-0.19	-0.12	-0.08
7	0	0	0
8	-0.46	-0.3	-0.21
9	-1.71	-0.07	-0.05
10	-0.1	-1.09	-0.75
11	-1.78	-1.13	-0.78
12	-2.04	-1.31	-1.16
	<3%	<2%	<1.3%

Tableau 4.7 – Erreurs relatives (%) MSP / EF sur les fréquences propres pour les maillages 4, 5 et 6

Une dernière comparaison, pour confirmer le choix du maillage 6 pour MSP, consiste à calculer l'erreur relative entre les fréquences MSP pour ce maillage 6 et les fréquences EF pour le maillage 8 pris comme référence pour son extrême finesse. Le tableau 4.8 présente des erreurs relatives très faibles, soit une erreur maximale de l'ordre de 1%. Ces résultats confirment le choix du maillage 6 pour la prise en compte de la variabilité avec la méthode MCS-MSP.

Fréquence propre	Erreur relative MSP(M6)/EF(M8)
1	-1.04
2	-1.17
3	-0.93
4	-1.16
5	-0.15
6	-0.21
7	0
8	-0.2
9	-0.13
10	-1.17
11	-1.13
12	-0.88

Tableau 4.8 – Erreurs relatives (%) MSP avec le maillage 6 / EF avec le maillage 8 (référence) sur les fréquences propres

Choix des paramètres incertains et de la loi de distribution

De part la conception du stator en tôles empilées et des choix de modélisation du matériau présentés dans le chapitre 2 (section 2.6.2), les propriétés matériau sont ciblées comme paramètres d'intérêt dans l'étude avec variabilité. Les propriétés sont le module d'Young E , le coeffcient de Poisson ν et la masse volumique ρ. Une analyse de sensibilité de ces paramètres sur les fréquences propres a montrée que le coeffcient de Poisson n'est pas un paramètre influent. Les modules d'Young des 3 directions de l'espace, ainsi que la masse volumique, sont pris comme variables aléatoires. La variabilité en entrée est imposée sur ces paramètres suivant une loi de distribution gaussienne tronquée à +/- 3σ autour de la valeur nominale (figure 4.6), soit 99.7% de la probabilité des tirages aléatoires. Ce type de loi est représentatif de nombreux phénomènes physiques. Pour rappel, le coefficient de variation (C.o.V.) est le rapport de l'écart-type σ sur la moyenne m, il représente le niveau de variabilité des paramètres d'entrée et de sortie.

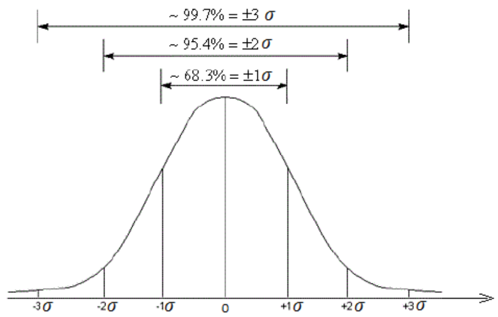


FIGURE 4.6 – Distribution d'une loi normale centrée réduite avec la correspondance entre les écarts types et les probabilités de tirages

Les modules d'Young dans les deux directions de la section du stator sont considérés identiques dans l'étude qui suit, le nombre de variables aléatoires du problème est donc au maximum de 3 : $(E_x{=}E_y)$, E_z et ρ. La méthode MCS-MSP est également compatible avec une modélisation des propriétés matériau en champs aléatoires, ce qui permet d'observer l'influence de la longueur de corrélation [MAH13].

Validation de MCS-MSP avec prise en compte de la variabilité

Après la validation de la formulation MSP au nominal, il s'agit ici de valider la méthode MCS-MSP avec prise en compte de la variabilité. La méthode de référence choisie, afin de faire cette validation est la méthode de Monte-Carlo directe (*Monte-Carlo Simulation*, MCS) appliquée sur le modèle éléments finis Nastran. On réalise 10,000 tirages aléatoires de type MCS sur le modèle Nastran et sur le modèle MSP (équation 4.12) du stator simplifié. Ce nombre de tirages choisi correspond à une convergence observée pour différents nombres de tirages testés. Les quantités statistiques d'intérêt sont la moyenne, l'écart-type et la distribution des fréquences propres perturbées.

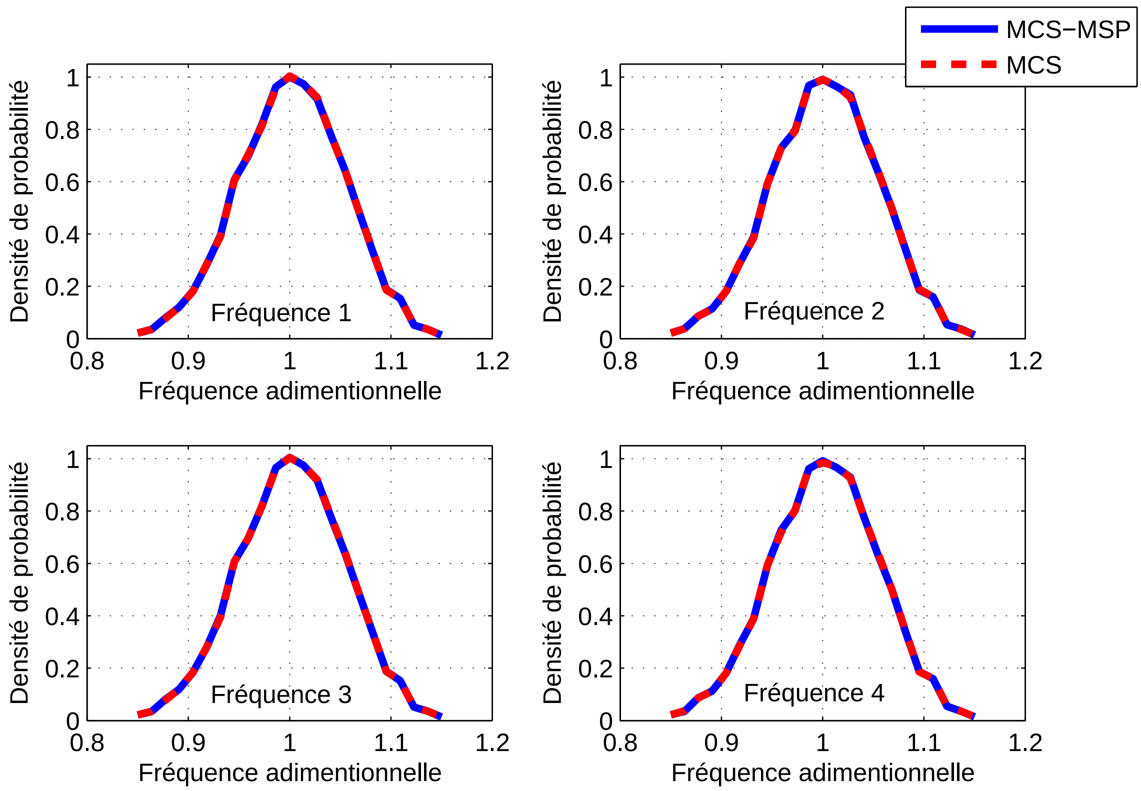


FIGURE 4.7 – Comparaison des densités de probabilité obtenues avec MCS et MCS-MSP des 4 premières fréquences propres - Niveau de variabilité C.o.V.$(E_x{=}E_y)$=5% et C.o.V.(E_z)=5%

Le niveau de variabilité est ici choisi modéré sur les paramètres d'entrée, soit les coefficients de variation C.o.V.$(E_x{=}E_y) = 5\%$ et C.o.V.$(E_z) = 5\%$. La figure 4.7 présente une comparaison entre les densités de probabilités MCS et MCS-MSP des 4 premières fréquences propres. Nous constatons que les fréquences propres perturbées sont dispersées suivant une distribution proche de celle d'une loi normale de type Gauss, avec une légère dissymétrie. Les densités de probabilité montrent une très bonne cohérence des dispersions obtenues avec les deux méthodes stochastiques MCS et MCS-MSP. Le tableau 4.9 présente les résultats en moyenne, écart-type et erreurs relatives entre MCS et MCS-MSP pour les 8 premières fréquences propres. L'erreur relative sur la moyenne est toujours inférieure à 1.3% et est très proche de 0% pour plusieurs fréquences. Pour l'écart type, cette erreur est toujours inférieure à 1%. Les erreurs constatées sont très faibles et permettent de valider la méthode MCS-MSP avec la prise en compte de la variabilité.

La méthode MCS-MSP a aussi été utilisée pour des niveaux de variabilité élevés sur les paramètres d'entrée par [BOU12, DRU13, DRU14], les erreurs observées sur l'écart-type sont toujours inférieures à 5% pour des modèles à éléments finis de coque, même pour un C.o.V.=20%. La méthode MCS-MSP est donc également compatible avec un niveau de variabilité élevé.

	MCS-MSP		MCS		Erreur relative	
Fréquence propre	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Erreur sur la moyenne	Erreur sur l'écart-type
1	2049	49.1	2076	49.6	-1.29%	-1.00%
2	2653	64.8	2685	65	-1.18%	0.78%
3	5364	128.2	5430	129.3	-1.21%	-0.85%
4	6250	152.3	6324	153.5	-1.17%	-0.78%
5	6458	158.7	6466	158.2	-0.12%	0.32%
6	7526	185.2	7531	185.5	-0.07%	-0.16%
7	7640	186.1	7638	185.4	0.02%	0.38%
8	8900	215.6	8916	215.2	-0.19%	0.19%

Tableau 4.9 – Moyenne et écart-type (Hz) des fréquences propres perturbées du stator simplifié par les méthodes MCS et MCS-MSP - Erreurs relatives (%) MCS-MSP / MCS - Niveau de variabilité C.o.V.(E_x=E_y)=5% et C.o.V.(E_z)=5%

Mécanisme de propagation des incertitudes

A l'aide de la méthode MCS-MSP, on étudie ici le mécanisme de propagation des incertitudes, soit observer le niveau de variabilité en sortie (sur une fréquence propre) par rapport au niveau de variabilité en entrée (sur les propriétés matériau) et ceci pour différents choix de variables aléatoires. Deux niveaux de variabilité sont choisis en entrée, un niveau de variabilité modéré C.o.V.=5% et un niveau de variabilité élevé C.o.V.=15%. L'information stochastique observée est le coefficient de variation des 4 premières fréquences propres, elle est reportée dans le tableau suivant.

Le tableau 4.10 permet de faire plusieurs observations sur le mécanisme de la propagation des incertitudes sur le stator simplifié avec la méthode MCS-MSP pour les quatre premières fréquences propres, également valables pour les 8 fréquences suivantes. :

- Le C.o.V. sur la fréquence propre est toujours inférieur à celui appliqué aux variables aléatoires d'entrée et varie très peu d'un mode à l'autre.
- Le module d'Young E_x=E_y et la masse volumique ρ sont les paramètres influents la variabilité des fréquences propres.
- L'influence du paramètre E_z est négligeable. En effet, les 4 premiers modes propres étudiés ici sont des modes radiaux (figure 4.4). De plus, même lorsque

Variables aléatoires	C.o.V.	C.o.V.(f_1)	C.o.V.(f_2)	C.o.V.(f_3)	C.o.V.(f_4)
E_x=E_y	5%	2.4%	2.4%	2.4%	2.4%
	15%	7.2%	7.3%	7.1%	7.3%
E_z	5%	0.1%	0%	0.1%	0%
	15%	0.2%	0.1%	0.2%	0.1%
ρ	5%	2.5%	2.5%	2.5%	2.5%
	15%	7.5%	7.5%	7.5%	7.5%
E_x=E_y et E_z	5%	2.4%	2.4%	2.4%	2.5%
	15%	7.2%	7.4%	7.2%	7.4%
E_x=E_y , $E_z$et ρ	5%	3.4%	3.5%	3.4%	3.4%
	15%	10.6%	10.7%	10.6%	10.7%

Tableau 4.10 – Coefficient de variation des quatre premières fréquences propres calculées par la méthode MCS-MSP pour deux niveaux de variabilité sur les propriétés de matériau

les déformations sont radiale et axiale, les fréquences 2 et 4 ne sont pas impactés par la variabilité de E_z.
- Plus la variabilité en entrée est élevée, plus la variabilité en sortie est élevée. Une certaine linéarité entre la variabilité d'entrée et la variabilité de sortie est constatée.
- L'augmentation du nombre de paramètres variables en entrée n'induit pas un cumul des variabilités en sortie mais la variabilité augmente toutefois, car les paramètres (E et ρ) sont de nature différente. En effet, par exemple pour la première fréquence propre, les variabilités de sortie sont C.o.V.(f_1)=2.4% pour C.o.V.(E_x=E_y)=5% et C.o.V.(f_1)=2.5% pour C.o.V.(ρ)=5%. Et lorsque les deux variables aléatoires sont considérées en même temps C.o.V.(f_1)=3.4% pour un C.o.V.(E_x=E_y, ρ)=5%.

A l'inverse, le phénomène de compensation induit une baisse du niveau de variabilité en sortie lorsque le nombre de variables aléatoires de même nature augmente [BOU12].

Coût numérique de la méthode MCS-MSP

Dans ce paragraphe, nous mettons en avant le caractère économique de la méthode MCS-MSP. Cette méthode permet en effet de gagner un temps significatif pour étudier la variabilité de fréquences propres puisque les simulations de Monte-Carlo sont réalisées sur la formulation MSP présentée alors que la méthode de Monte-Carlo directe MCS sollicite à chaque tirage un code éléments finis.

Le gain de la méthode MCS-MSP par rapport la méthode MCS est présenté en FLOPS, soit le nombre d'opération à virgule flottante pour l'algorithme utilisé. L'ordre de ce gain pour un tirage est exprimé selon la relation :

$$O(Gain) = \frac{FLOPS(MCS)}{FLOPS(MCS - MSP)} \tag{4.16}$$

Pour le code éléments finis Nastran, l'algorithme pour l'analyse modale (solveur SOL 103) est celui de Lanczos. D'après le manuel [NAS09] de l'éditeur MSC du solveur, le nombre d'opérations de cet algorithme est de l'ordre de Nb^2m, avec N est le nombre de degrés de liberté (ddl), b la demi-largeur de bande et m le nombre de modes retenus. Pour la méthode MCS-MSP, avec l'équation 4.12, le nombre de FLOPS est de l'ordre de Nm.

Le gain en FLOPS est donc de l'ordre de b^2 pour un tirage de Monte-Carlo. Il est à noter que la demi-largeur de bande b augmente avec le nombre de ddl. Pour différentes discrétisations du modèle de stator simplifié, la figure 4.8 montre l'ordre du gain en fonction de la finesse du maillage, cette courbe est approchée par la fonction suivante :

$$O(Gain) = 0.411 * N^{1.475} \tag{4.17}$$

L'intérêt de la méthode MCS-MSP est donc évident pour étudier la variabilité sur un modèle industriel, possiblement à plusieurs milliers de degrés de liberté. Les gains MCS-MSP ont également été présentés par [DRU13, DRU14] sur un modèle de caisse nue automobile à 840,000 ddls. Sur ce modèle constitué essentiellement d'éléments de coque, le gain est 2500 en temps CPU, le coût des simulations MCS-MSP est équivalent à celui de 4 analyses par éléments finis déterministes.

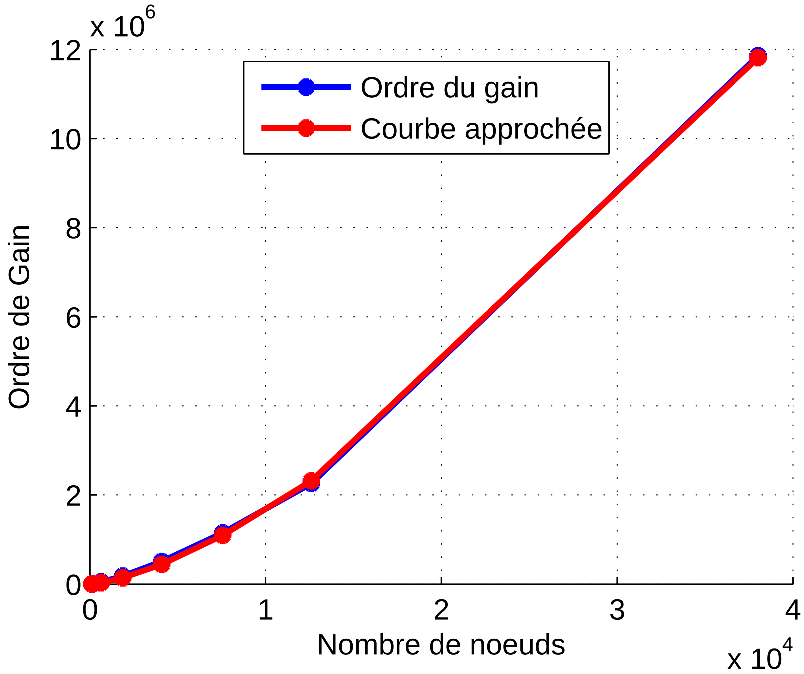


FIGURE 4.8 – Ordre du gain MCS-MSP / MCS en FLOPS en fonction du nombre de nœuds du modèle pour un tirage

4.4.4 Application industrielle : stator

Présentation du modèle

Dans le cadre de la machine électrique présentée dans le chapitre 2, la méthode MCS-MSP est ici appliquée sur un modèle de stator avec dents pour étudier la variabilité des fréquences propres. Ce modèle est composé de 53568 nœuds et 40320 éléments hexaédriques à 8 nœuds (figure 4.9). La discrétisation de ce modèle a été choisi avec le meilleur compromis possible entre le nombre de nœuds et la précision des résultats. Ce modèle a été présenté dans la section 2.6.2, ainsi que les modes et les fréquences propres du stator sur la plage d'intérêt.

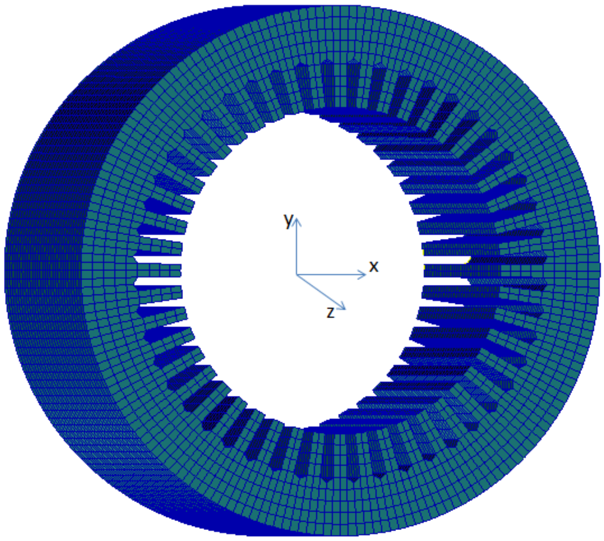


FIGURE 4.9 – Maillage du stator à 55368 nœuds et 40320 éléments H8

Mécanisme de propagation des incertitudes

Pour deux niveaux de variabilité modéré et élevé, respectivement 5% et 15%, imposés sur les paramètres matériau, on observe le C.o.V. des fréquences 1 à 4 dans le tableau 4.11. La comparaison entre ces résultats sur le stator avec dents (tableau 4.11) et ceux sur le stator simplifié (tableau 4.10) montre des coefficients de variation très proches voire identiques. Cela peut expliquer par le fait que tous les modes étudiés sont des modes globaux. En effet, les modes pour lesquels la déformation modale est localisée aux dents sont à hautes fréquences et ne sont pas dans la plage d'intérêt. En considérant la simplicité du modèle et le gain en temps de calcul, il est très intéressant d'étudier la variabilité des fréquences propres avec le modèle de stator simplifié.

	C.o.V.	C.o.V.(f_1)	C.o.V.(f_2)	C.o.V.(f_3)	C.o.V.(f_4)
E_x=E_y	5%	2.3%	2.4%	2.3%	2.4%
	15%	7%	7.3%	7%	7.2%
E_z	5%	0.2%	0%	0.2%	0.1%
	15%	0.5%	0.1%	0.5%	0.2%
ρ	5%	2.5%	2.5%	2.5%	2.5%
	15%	7.5%	7.5%	7.5%	7.5%
E_x=E_y et E_z	5%	2.3%	2.4%	2.3%	2.4%
	15%	6.9%	7.3%	6.9%	7.2%
E_x=E_y, E_z et ρ	5%	3.3%	3.4%	3.3%	3.4%
	15%	10.3%	10.5%	10.3%	10.5%

Tableau 4.11 – Coefficient de variation des quatre premières fréquences propres calculées par la méthode MCS-MSP pour deux niveaux de variabilité 5% et 15% sur les propriétés matériau du stator

Les observations faites dans la section précédente sur le tableau 4.10 sont ainsi valables pour le modèle du stator avec dents. Notamment, l'influence du module d'Young axial est négligeable. Ce constat permet de revenir sur les choix de modélisation concernant le stator réalisés au chapitre 2. Le stator est en réalité formé d'un empilement de tôles modélisé dans ce manuscrit par un unique solide. Le module d'Young axial est donc modélisé d'une manière approchée, mais ceci n'a aucune incidence sur le comportement vibratoire au vu de l'étude de la variabilité.

4.5 La méthode MCS-MSP pour la réponse en fréquence

Après l'analyse modale, on s'intéresse à la fonction de réponse en fréquence (FRF) pour étudier la variabilité du comportement vibratoire de la machine. Comme précédemment, les propriétés matériau sont considérées incertaines. Après introduction de la perturbation sur les FRFs, la formulation MSP pour la réponse en fréquence est présentée. La validation de MSP au nominal puis avec prise en compte de la variabilité est proposée pour l'application du stator simplifié. Le mécanisme de propagation des incertitudes est ensuite interprété. Enfin, le coût numérique de la méthode MCS-MSP pour les FRFs est discuté.

Les équations de la réponse en fréquence sans perturbation ont été présentées dans le deuxième chapitre (section 2.4.3). Dans un système mécanique avec paramètres variables, les quantités énoncées sont toutes perturbées. Les équations 2.87, 2.88, 2.89 et 2.90 s'écrivent maintenant de la manière suivante :

$$(-\omega^2 \widetilde{m}_p + j\omega \widetilde{c}_p + \widetilde{k}_p) q_p(\omega) = \hat{\Phi}_p^T f(\omega) \tag{4.18}$$

avec :

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_p &= \hat{\Phi}_p^T M_p \hat{\Phi}_p \\ \widetilde{c}_p &= \hat{\Phi}_p^T C_p \hat{\Phi}_p \\ \widetilde{k}_p &= \hat{\Phi}_p^T K_p \hat{\Phi}_p \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\mathcal{H}_p(\omega) = (-\omega^2 \widetilde{m}_p + j\omega \widetilde{c}_p + \widetilde{k}_p)^{-1} \tag{4.20}$$

$$q_p(\omega) = \mathcal{H}_p(\omega) \hat{\Phi}_p^T f(\omega) \tag{4.21}$$

$$u_p(\omega) = \hat{\Phi}_p \mathcal{H}_p(\omega) \hat{\Phi}_p^T f(\omega) \tag{4.22}$$

Amortissement L'amortissement est considéré de type modal. Dans les analyses de réponse en fréquence, il sera ajouté à la réponse dynamique du système de manière proportionnelle à la masse et à la rigidité. La matrice d'amortissement modal est alors diagonale dont le i-ème terme diagonale est :

$$\widetilde{c}_i = 2\zeta_i \sqrt{\widetilde{k}_i \widetilde{m}_i} \tag{4.23}$$

où ζ_i est le coefficient d'amortissement modal pour le mode i. Le fait que cette matrice soit diagonale est un avantage pour la formulation, ce qui ne pas toujours le cas si on choisit un autre type d'amortissement.

4.5.1 Aspects théoriques

Formulation MSP générale

L'hypothèse de stabilité modale présentée au paragraphe 4.3, soient les modes perturbés et nominaux égaux $\Phi_p = \Phi_0$, signifie que les déplacements sont projetés sur la base nominale :

$$\bar{u}_p = \sum_{i=1}^{m} \phi_0^i q_i = \hat{\Phi}_0 q_p \tag{4.24}$$

où m est le nombre de modes retenus, $\hat{\Phi}_0$ est la matrice modale nominale tronquée au mode m, ϕ_0^i est le i-ème mode propre nominal et q_i est la i-ème composante du vecteur des coordonnées modales.

Les termes indiqués par une barre superposée identifient les quantités à calculer par la formulation MSP. Les équations 2.87, 2.88, 2.89 et 2.90 s'écrivent de la manière suivante :

$$(-\omega^2 \bar{\bar{m}}_p + j\omega \bar{\bar{c}}_p + \bar{\bar{k}}_p) q_p(\omega) = \hat{\Phi}_0^T f(\omega) \tag{4.25}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{m}}_p &= \hat{\Phi}_0^T M_p \hat{\Phi}_0 \\ \bar{\bar{c}}_p &= \hat{\Phi}_0^T C_p \hat{\Phi}_0 \\ \bar{\bar{k}}_p &= \hat{\Phi}_0^T K_p \hat{\Phi}_0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_p(\omega) = (-\omega^2 \bar{\bar{m}}_p + j\omega \bar{\bar{c}}_p + \bar{\bar{k}}_p)^{-1} \tag{4.27}$$

$$\bar{q}_p(\omega) = \bar{\mathcal{H}}_p(\omega) \hat{\Phi}_0^T f(\omega) \tag{4.28}$$

$$\bar{u}_p(\omega) = \hat{\Phi}_0 \bar{\mathcal{H}}_p(\omega) \hat{\Phi}_0^T f(\omega) \tag{4.29}$$

Comme pour la formulation MSP pour l'analyse modale, on souhaite éviter l'extraction des matrices élémentaires de rigidité du modèle éléments finis. Pour la matrice de rigidité modale, on utilise l'expression suivante :

$$\bar{\bar{k}}_p = \sum_{j=1}^{n} \int_{V_{p,j}} \xi_{p,j}^T H_{p,j} \xi_{p,j} dV \tag{4.30}$$

où n est le nombre d'éléments finis et $\xi_{p,j}$ est la matrice élémentaire des déformations modales. Les colonnes de cette matrice sont les déformations modales élémentaires pour chaque mode.

Pour la masse modale $\bar{\bar{m}}_p$, on construit une matrice de masse élémentaire diagonale, son expression est la suivante :

$$\bar{\bar{m}}_p = \sum_{j=1}^{n} \hat{\Phi}_{0,j}^T m_{p,j} \hat{\Phi}_{0,j} \tag{4.31}$$

La matrice d'amortissement $\bar{\bar{c}}_p$ est obtenue d'après l'équation 4.23 en utilisant $\bar{\bar{k}}_p$ et $\bar{\bar{m}}_p$. On peut alors résoudre les équations 4.25 et déduire les déplacements avec l'équation 4.29, ce qui constitue la formulation MSP pour la FRF. Comme la formulation pour l'analyse modale, la formulation MSP pour la FRF met en évidence les paramètres matériau qui peuvent être considérés comme variables aléatoires. L'organigramme de la méthode MCS-MSP pour la FRF est présenté sur la figure 4.10, des simulations de Monte-Carlo sont effectuées sur la formulation afin d'obtenir les informations stochastiques d'intérêt.

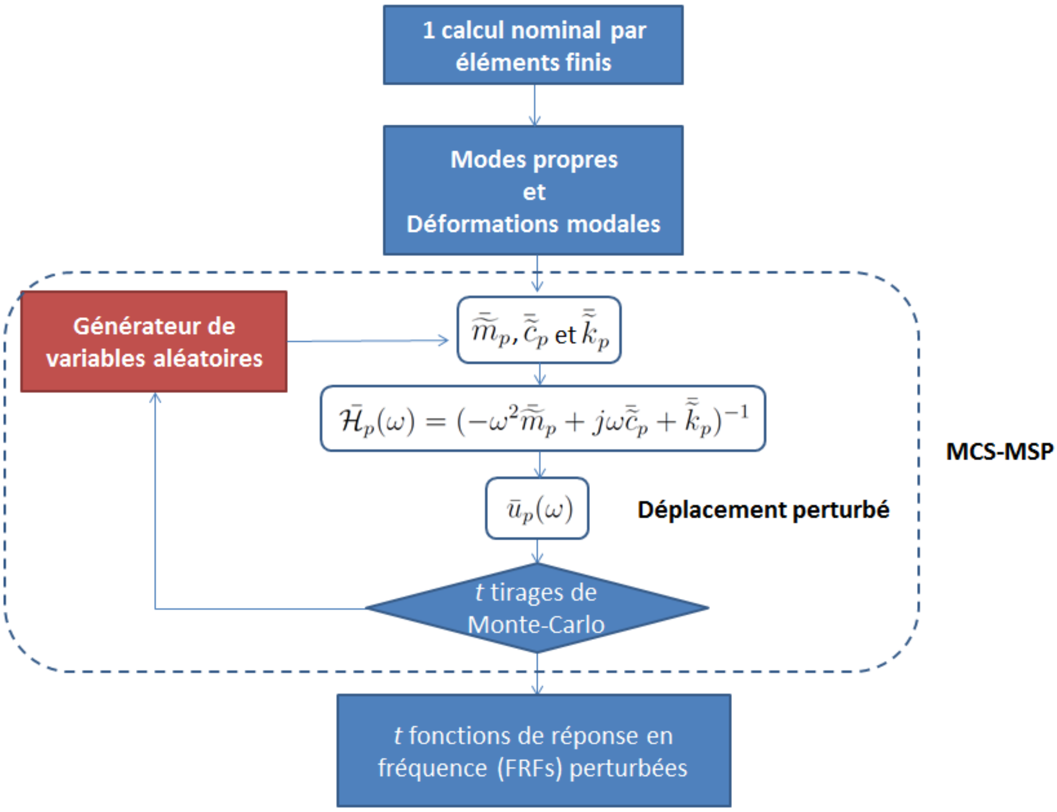


FIGURE 4.10 – Organigramme de la méthode MCS-MSP pour la réponse en fréquence

Considérations sur les matrices modales

Les matrices modales obtenues des équations 4.19 sont diagonales. Cette topologie est une conséquence directe de la propriété d'orthogonalité entre les modes propres et les matrices caractéristiques M et K. La diagonalité implique le découplage des équations de la dynamique et facilite la résolution.

En revanche dans les équations 4.26, l'orthogonalité n'est plus respectée car on n'utilise pas les modes propres perturbés. L'équation 4.32 montre la topologie des matrices de rigidité modales obtenues par une méthode classique (équations 4.19) et par la formulation MSP (équations 4.26).

$$\tilde{K}_p = \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bullet \end{bmatrix}_{m\times m} \qquad \bar{\bar{K}}_p = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{4.32}$$

$\tilde{K}_p$ et $\bar{\tilde{K}}_p$ représentent respectivement les matrices de rigidité calculées par la méthode EF classique et par la formulation MSP. Les matrices modales de la formulation MSP sont donc pleines et nécessitent une véritable inversion matricielle. La matrice $\bar{\mathcal{H}}_p$ de l'équation 4.27 doit être réalisée à chaque tirage avec le coût d'une inversion. Ces matrices modales ont toutefois l'avantage d'être de petite taille, égale au nombre de modes retenus dans la superposition modale. Ce nombre, dans le plupart des cas, est beaucoup plus faible que le nombre de degré de liberté du modèle, surtout pour une application industrielle. L'opération d'inversion n'est donc pas très couteuse, contrairement à des simulations de Monte-Carlo directe exploitant l'équation 4.20. Dans cette dernière, en effet, pour obtenir les matrices modales il faut calculer les modes propres perturbés et donc résoudre un problème aux valeurs et vecteurs propres perturbés d'ordre N (nombre de degrés de liberté) pour chaque tirage.

Erreur de troncature

Théoriquement, le nombre de modes d'un modèle éléments finis est égal au nombre N de degrés de liberté du modèle. Si tous les modes sont utilisés, la technique de superposition modale fournit la solution exacte. Mais comme il a été dit précédemment, on exploite seulement une base tronquée $\hat{\Phi}$ constituée de m modes, correspondant à l'intervalle fréquentiel d'intérêt. La résolution directe est une méthode exacte mais trop coûteuse, elle correspond au solveur SOL 108 (Réponse directe en fréquence) de Nastran [NAS12], alors que la résolution avec base tronquée correspond au solveur SOL 111 (Réponse modale en fréquence).

Cette technique entraine ainsi une erreur dite de troncature, que ce soit pour MSP ou pour la méthode des éléments finis (EF). Plusieurs techniques existent pour limiter cette erreur de troncature, des techniques de correction statique [MAC71] ou dynamique sont utilisées, ou une technique pragmatique utilisée dans l'industrie consistant à choisir une base modale tronquée incluant les modes jusqu'à $2f$ ou $3f$. Nous adoptons dans ce chapitre cette dernière pratique.

Par ailleurs, il a été montré par [MAR08] que la formulation MSP pour la FRF fournit des résultats exacts lorsque $m = N$. Les approximations faites par les formulations MSP pour l'analyse modale (section 4.4) et pour la FRF sont donc de nature différente. L'approximation MSP pour la FRF est liée à une erreur de troncature, cette erreur est nulle pour $m = N$, même en considérant des modes qui ne sont pas certains. Alors que pour la formulation MSP pour l'analyse modale, les modes doivent être certains afin que la méthode soit exacte.

4.5.2 Comparaison de FRFs et critères d'erreur

On propose ici deux critères d'erreur afin de comparer les fonctions de réponse en fréquence calculées par la méthode des EF et la formulation MSP, dans le paragraphe suivant, pour un modèle de stator simplifié. Le but est de quantifier l'erreur entre une courbe obtenue par la méthode des EF et celle obtenue par la formulation MSP. Contrairement aux calculs de fréquences propres, on ne s'intéresse plus seulement à la moyenne ou l'écart-type d'un paramètre scalaire de sortie. Il s'agit ici de comparer deux courbes sur une plage de fréquences. La différence entre les 2 courbes est quantifiée en valeur absolue et exprimée en déciBel (dB). Les erreurs sur les courbes moyennes (équation 4.33) et écarts-type (équation 4.34) entre les méthodes MCS et MSP sont données pour une pulsation ω. Le seuil d'acceptabilité de ces erreurs e_m

et e_σ est choisi à 6 dB, ce qui correspond à un facteur 2 avec l'échelle logarithmique utilisée.

$$e_m(\omega) = \mid m\left(FRF_{MSP}(\omega)\right) - m\left(FRF_{MCS}(\omega)\right) \mid \tag{4.33}$$

$$e_\sigma(\omega) = \mid \sigma\left(FRF_{MSP}(\omega)\right) - \sigma\left(FRF_{MCS}(\omega)\right) \mid \tag{4.34}$$

4.5.3 Application : stator simplifié

Présentation du modèle

Le modèle utilisé dans cette section est le stator simplifié présenté dans le paragraphe 4.4.3. La figure 4.11 montre le maillage M6, comprenant 12600 nœuds et 10368 éléments H8, retenu précédemment dans le cadre de l'analyse modale. Une excitation radiale de type harmonique d'amplitude unitaire est appliquée sur un nœud du rayon d'alésage du stator. On observe la réponse en fréquence sur un nœud situé sur le rayon extérieur du stator simplifié. Aucune condition aux limites n'est appliquée, le modèle est du type libre-libre. Le coefficient d'amortissement modal choisi est 1% sur tous les modes propres.

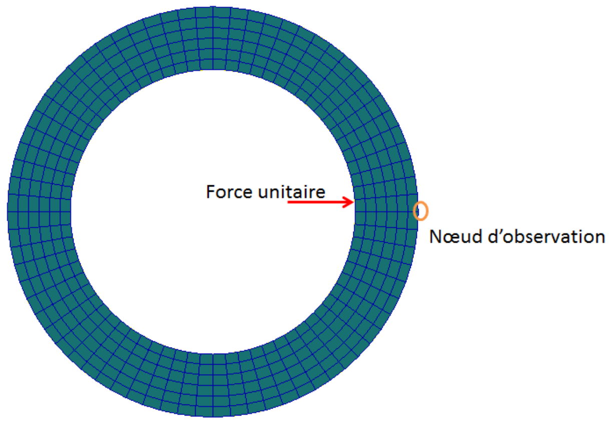


FIGURE 4.11 – Maillage M6 du stator simplifié à 12600 nœuds et 10368 éléments H8 avec excitation d'amplitude unitaire imposée et nœud d'observation de la réponse en fréquence

Erreurs de troncature pour la méthode EF et la formulation MSP

Nous observons dans ce paragraphe l'effet du nombre m de modes retenus dans la base modale sur le calcul des FRFs pour la méthode des éléments finis et pour la formulation MSP. Cette notion d'erreur de troncature a été présentée précédemment, on s'intéresse ici à une plage de fréquence allant jusqu'à 7 kHz, comprenant 5 modes propres.

Méthode des éléments finis Afin de retenir un nombre m de modes bien choisi pour la base tronquée, on calcule tout d'abord la réponse en fréquence par la méthode directe de Nastran (SOL 108), qui nous sert de référence (courbe noire sur la figure 4.12). Puis les résolutions avec base tronquée à $m = 5$, 15 et 28 modes retenus (qui correspond à une base tronquée de 1, 1.5 et 2 fois la plages d'intérêt 7 kHz) sont effectuées avec le solveur SOL 111. La figure 4.12 montre qu'à partir de m

$= 28$ modes, soit deux fois le nombre de modes sur la plage fréquentielle, la FRF s'approche très bien de l'allure de la courbe correspondant au calcul direct. On remarque une baisse en accélération de 10 dB par rapport au calcul direct sur les troisième et quatrième modes propres.

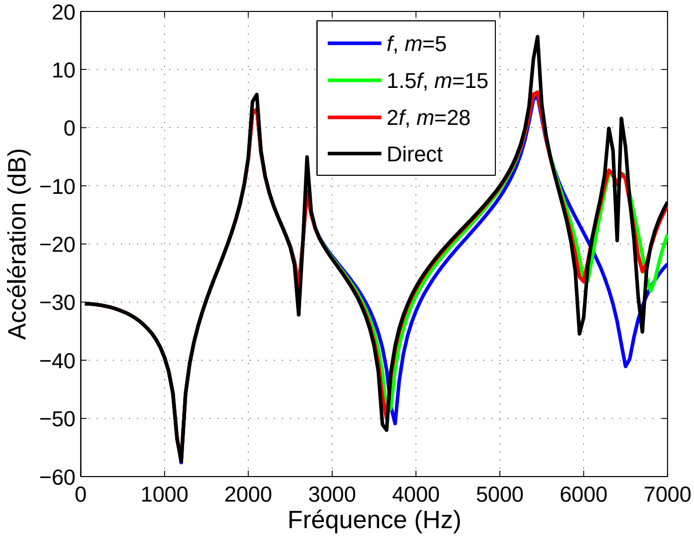


FIGURE 4.12 – Comparaison des FRFs EF calculées par un calcul direct et par un calcul à base tronquée ($1f$, $1.5f$ et $2f$)

Formulation MSP Pour le calcul de la réponse en fréquence par la formulation MSP, la figure 4.13 montre les FRFs pour une troncature à $m = 5$, 15 et 28 modes. A partir d'une base tronquée à $m = 28$ modes, soit une troncature incluant les modes jusqu'à $2f$ dans la plage d'intérêt, l'allure de la FRF est stabilisée. La bonne pratique de doubler la largeur de la plage de fréquences d'intérêt est ici correcte, on considère cette base tronquée à $m = 28$ modes par la suite.

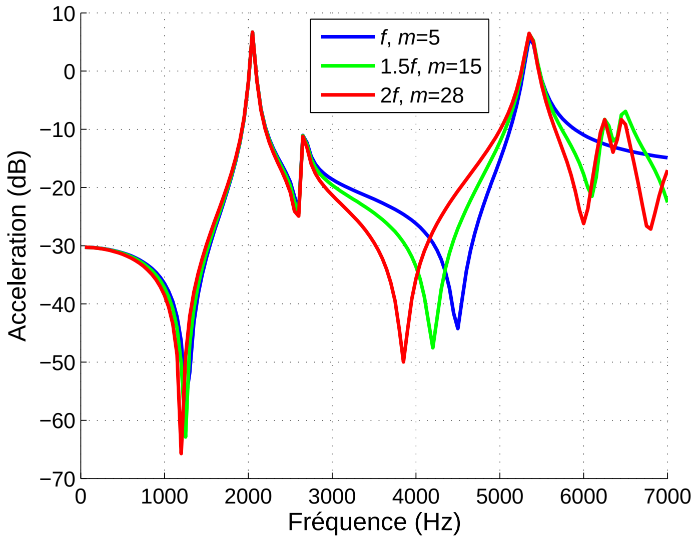


FIGURE 4.13 – Comparaison des FRFs MSP calculées avec une base tronquée ($1f$, $1.5f$ et $2f$)

Validation de MSP au nominal

Après l'étude de l'influence du nombre de modes retenus, on compare ici les deux méthodes EF et MSP avec un nombre de modes retenus sur une plage égale à deux fois la plage d'intérêt. Afin de valider la méthode MSP au nominal, la figure 4.14 compare les FRFs calculées par le solveur SOL 111 de Nastran et par la formulation MSP.

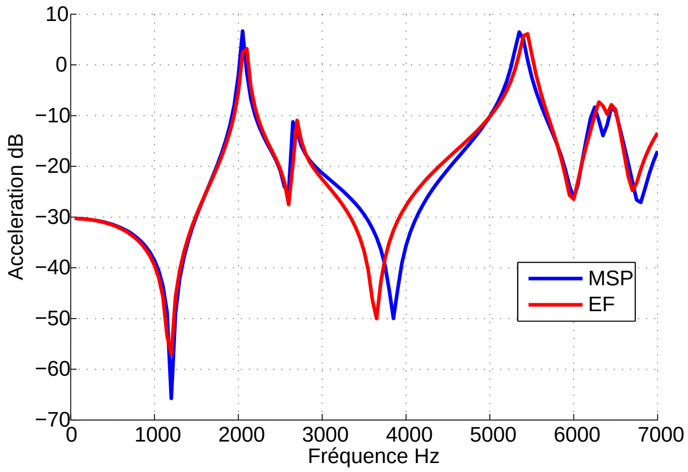


FIGURE 4.14 – Comparaison au nominal des FRFs calculées par la méthode EF et la formulation MSP

Sur la plage allant jusqu'à 7 kHz, les allures globales des FRFs EF et MSP sont très proches, et en particulier pour le positionnement des pics correspondant aux fréquences propres. Les écarts observés dans les zones de résonance sont toujours inférieurs à 3dB. Aux pics d'anti-résonance, les courbes ont tendance à se décaler lorsque la fréquence augmente. En effet, un décalage de 100 Hz est observé vers 3800 Hz, où l'accélération est très faible (-50 dB).

Cette comparaison valide la formulation MSP pour la FRF en configuration nominale. La formulation MSP (équation 4.29) et la formulation Nastran pour l'élément solide H8 fournissent en effet des résultats très proches.

Validation de MCS-MSP avec prise en compte de la variabilité

Afin de valider la méthode MCS-MSP avec prise en compte de la variabilité, on applique ici un coefficient de variation de 5% sur les modules d'Young (E_x=E_y,E_z) du matériau, soit deux variables aléatoires. Un nombre de 10,000 tirages est choisi pour la méthode de Monte-Carlo associée à Nastran (MCS) et pour la méthode de Monte-Carlo associée à la formulation MSP. La figure 4.15 présente les courbes FRFs moyennes et les intervalles de confiance à 95% obtenus par les deux méthodes.

L'intervalle de confiance est directement lié au comportement moyen et à la variabilité caractérisée par l'écart-type. On observe un niveau de variabilité élevé de la réponse, qui a tendance à augmenter avec la fréquence. La méthode MCS-MSP fournit une courbe FRF moyenne et un intervalle de confiance très proche de la méthode de référence MCS, surtout au positionnement des pics de résonance. On ne s'intéresse pas aux anti-pics car ils correspondent à des niveaux d'accélération très bas, ils sont d'autant plus négligeables que les accélérations sont tracées sur une échelle logarithmique.

Les courbes obtenues, issues de 10,000 tirages, sont donc lissées par rapport aux FRFs de la figure 4.14 qui représente un unique tirage au nominal. En particulier, au voisinage des deux fréquences très proches à 6kHz, les réponses moyennes correspondent à un unique pic, qui est le résultat des 10,000 FRFs. Avec la variabilité et pour certain tirage, ces deux fréquences se croisent.

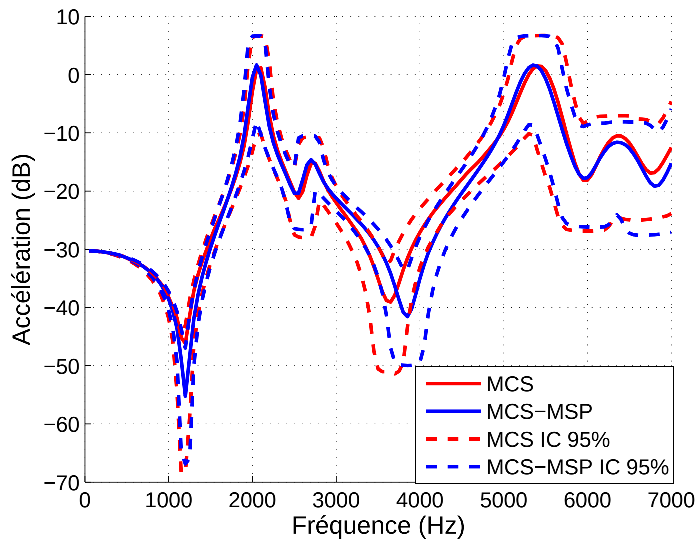


FIGURE 4.15 – Courbes FRFs moyennes et intervalles de confiance à 95% du stator simplifié pour un C.o.V.(E_x=E_y,E_z)=5% calculées par les méthodes MCS-MSP (bleu) et MCS (rouge)

Afin d'évaluer plus précisément les écarts entre les courbes MCS et MCS-MSP, on utilise les critères d'erreur présentés précédemment $e_m(\omega)$ (équation 4.33) sur la moyenne et $e_\sigma(\omega)$ (équation 4.34) sur l'écart-type. La figure 4.16 présente ces erreurs sur la plage d'intérêt. Au positionnement des pics de résonance traits pointillés), les erreurs sur les moyennes sont très faibles et toujours inférieures à 0.3 dB, les erreurs sur les écarts-type sont plus importantes mais sont toujours inférieures à 6 dB.

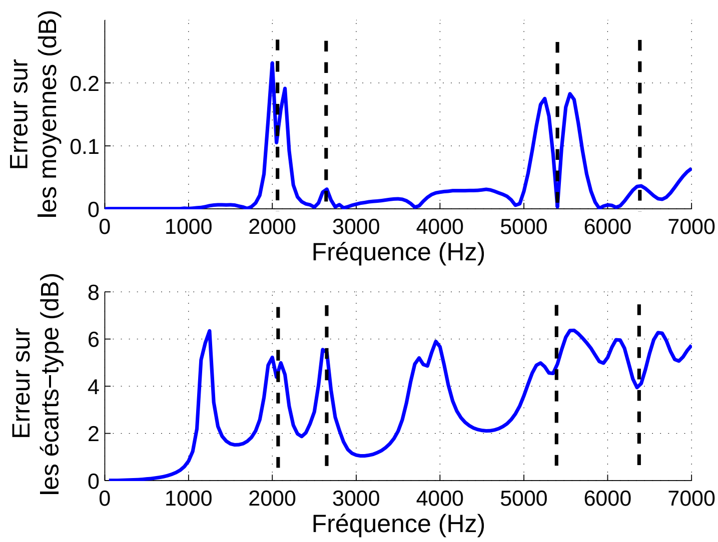


FIGURE 4.16 – Erreurs sur les courbes moyennes et écarts-type des FRFs entre les méthodes MCS et MCS-MSP

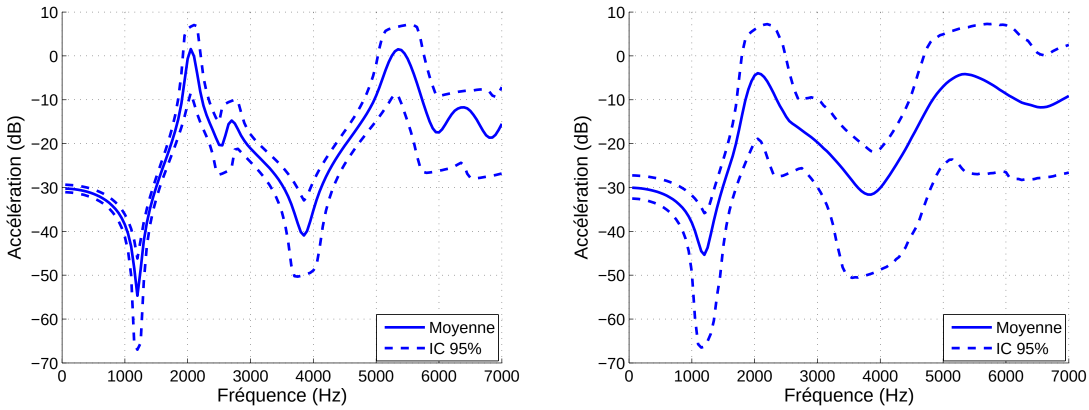
La formulation MSP fournit donc des résultats très satisfaisants pour le calcul des FRFs avec prise en compte de la variabilité. Ceci constitue la validation de la méthode MCS-MSP pour un niveau de variabilité modéré.

Mécanisme de propagation des incertitudes

La méthode MCS-MSP pour la FRF a montré sa fiabilité à prendre en compte la variabilité de paramètres matériau afin d'observer l'impact sur la variabilité de FRF. La méthode MCS-MSP est maintenant utilisé dans ce paragraphe afin d'évaluer le mécanisme de propagation des incertitudes. Celui-ci est ici étudié pour le modèle simplifié du stator de la machine électrique. Le nombre d'échantillons de notre méthode de type Monte-Carlo est de nouveau pris à 10,000. Deux niveaux de variabilité (C.o.V.=5% et C.o.V.=15%) sont appliqués sur les paramètres d'entrées : modules d'Young et masse volumique. Les courbes FRFs moyennes et les intervalles de confiance à 95% obtenus sont discutés sur la plage d'intérêt allant jusqu'à 7kHz incluant 5 modes propres.

Pour les cas étudiés, les figures 4.17, 4.18, 4.19 et 4.20 montrent que la variabilité augmente globalement avec la fréquence, avec un niveau de variabilité de la réponse parfois très élevé. Les réponses sont également de plus en plus lisses avec la montée en fréquence.

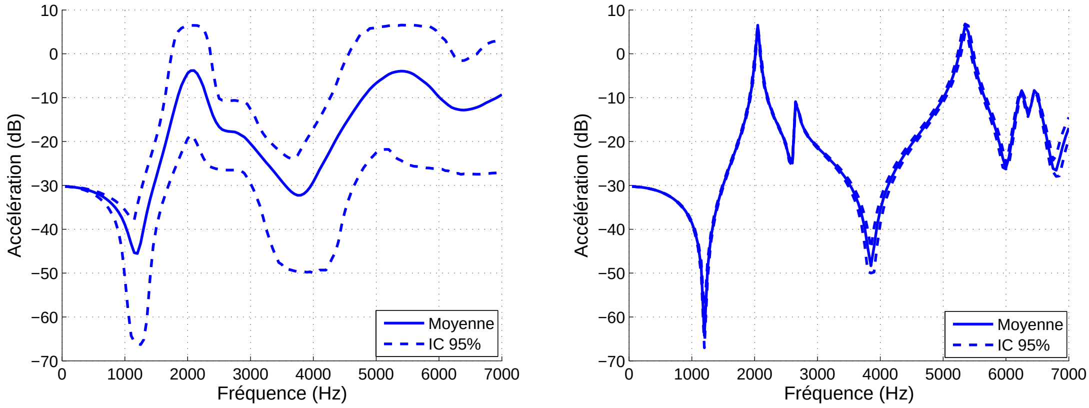
Lorsque la masse volumique est considérée comme unique variable aléatoire (figure 4.17), la variabilité de la réponse peut atteindre 18 et 28 dB pour les niveaux de variabilité de 5% et 15% respectivement. La réponse est clairement sensible à la variabilité de la masse volumique.



CoV(ρ)=5% CoV(ρ)=15%

FIGURE 4.17 – Courbes FRFs calculées par la méthode MCS-MSP pour deux niveaux de variabilité 5% et 15% - une variable aléatoire ρ

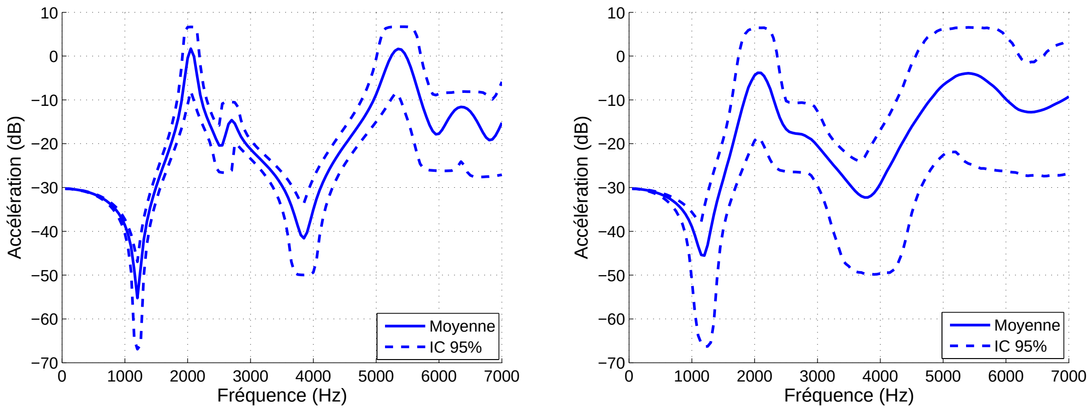
Concernant les modules d'Young, la figure 4.18 montre que la réponse en fréquence présente des niveaux de variabilité élevés pour CoV(E_x=E_y)=15%, semblables aux courbes précédentes pour la masse volumique prise comme variable aléatoire. Le second graphe de cette figure montre que la réponse est insensible à une variabilité importante du module d'Young E_z suivant l'axe du stator.



CoV(E_x=E_y)=15% CoV(E_z)=15%

FIGURE 4.18 – Courbes FRFs calculées par la méthode MCS-MSP pour un niveau de variabilité 15% - une variable aléatoire E_x=E_y ou E_z

La figure 4.19 confirme les conclusions précédentes, la prise en compte de E_z comme variable aléatoire n'ajoute pas de variabilité dans la réponse.



CoV(E_x=E_y, E_z)=5% CoV(E_x=E_y, E_z)=15%

FIGURE 4.19 – Courbes FRFs calculées par la méthode MCS-MSP pour deux niveaux de variabilité 5% et 15% - deux variables aléatoires E_x=E_y et E_z

Lorsque les trois variables aléatoires sont considérées E_x=E_y, E_z et ρ, la figure 4.20 montre que la variabilité est encore plus élevée et peut atteindre 30 dB pour CoV=15%. La variabilité sur la réponse de la figure 4.18 induite par la variabilité de E_x=E_y et la variabilité sur la réponse de la figure 4.17 induite par la variabilité de ρ ne se cumule pas sur cette figure 4.20, mais augmente toutefois. La variabilité augmente car les variables aléatoires sont de nature différente.

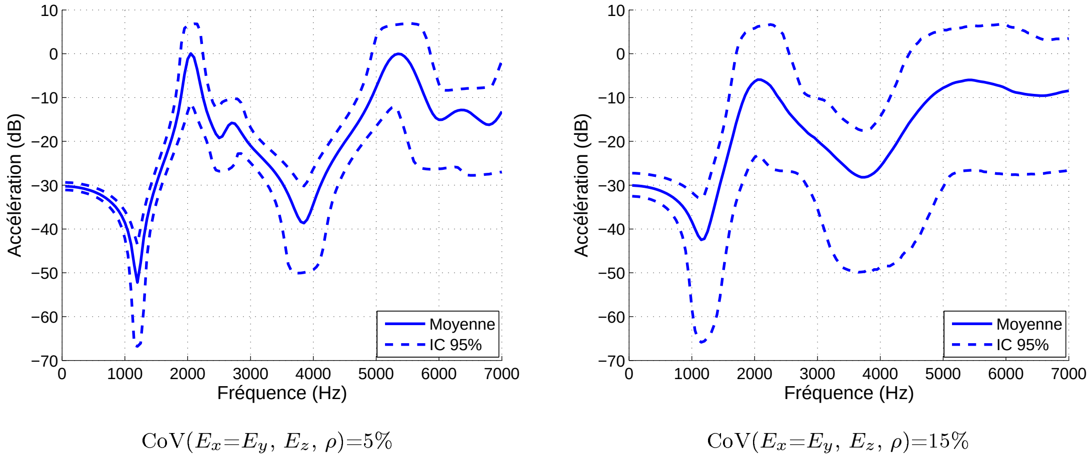


FIGURE 4.20 – Courbes FRFs calculées par la méthode MCS-MSP pour deux niveaux de variabilité 5% et 15% - trois variables aléatoires E_x=E_y, E_z et ρ

Coût numérique de la méthode MCS-MSP pour la FRF

D'après l'organigramme de la figure 4.1, la méthode MCS-MSP pour la FRF a besoin d'un seul calcul par éléments finis pour récupérer les modes propres et les déformations modales nominales. Ensuite on effectue sur la formulation MSP (équation 4.29) t tirages de Monte-Carlo.

Pour le modèle du stator utilisé, le gain en temps CPU de la méthode MCS-MSP par rapport à MCS est proche de 5. Ce gain n'est pas très important car d'une part la programmation de MCS-MSP pourrait être optimisée, et d'autre part l'inversion de la matrice $\bar{\mathcal{H}}_p$ de l'équation 4.27 représente 85% du coût de cette méthode. L'évaluation de l'inversion de cette matrice pleine pourrait également être améliorée.

4.6 Conclusion

Nous avons présentés dans ce chapitre l'état de l'art des méthodes non déterministes existantes pour la prise en compte de la variabilité dans les modèles éléments finis. La méthode MCS-MSP de type Monte-Carlo, basée sur l'hypothèse mécanique de stabilité modale, a été présentée pour réaliser les calculs vibratoires. La bonne utilisation de cette méthode est conditionnée par la vérification de l'hypothèse MSP et la validation du maillage avant de mener une étude avec variabilité. Les formulations MSP pour l'analyse modale et pour la réponse en fréquence ont été développée pour l'élément 3D solide H8 afin de prendre en compte la variabilité des propriétés matériau. Ces formulations ont été validées par rapport à la méthode de référence de Monte-Carlo directe MCS, en configuration nominale puis avec prise en compte de la variabilité. Le mécanisme de propagation des incertitudes a été discuté. Enfin le coût numérique de la méthode MCS-MSP a été présenté.

Concernant l'étude de la variabilité des fréquences propres, le modèle du stator avec dents n'apporte pas de richesse supplémentaire par rapport au modèle de stator simplifié dans la plage de fréquences d'intérêt. En effet, sur celle-ci, il n'y a pas de mode faisant intervenir la déformée des dents. Le modèle de stator simplifié est donc un très bon compromis. La variabilité du module d'Young suivant l'axe du stator n'a aucun impact sur la variabilité des fréquences propres. Les variables influentes sont les modules d'Young dans les directions de la section ainsi que la masse volumique.

Pour ces variables aléatoires, la variabilité des fréquences est à peu près la moitié de celle imposée en entrée. La variabilité augmente lorsque les types de paramètres sont considérées en même temps. Cette étude sur la variabilité des fréquences propres a également permis de valider le choix de modéliser le stator composé d'un empilement de tôles en un unique solide.

Le coût numérique de la méthode MCS-MSP pour l'analyse modale est très satisfaisant, la méthode peut donc être utilisé sans soucis sur un modèle industriel à plusieurs milliers de degrés de liberté.

Pour l'étude de la variabilité des FRFs, les paramètres matériau influents sont les mêmes que pour l'analyse modale. La variabilité augmente avec la fréquence et peut être importante. Pour un coefficient de variation de 5% sur le module d'Young dans les directions de la section ou sur la masse volumique, la variabilité de la réponse n'est pas loin d'atteindre les 20 dB et elle l'atteint lorsque les deux paramètres aléatoires sont considérées en même temps. Le niveau de variabilité en sortie peut donc être très élevé.

Le coût numérique de la méthode MCS-MSP pour la réponse en fréquence peut être amélioré car il est pénalisé par des aspects informatiques. Il reste toutefois intéressant par rapport une méthode de Monte-Carlo classique.

Bibliographie

[AHM09] J. Ahmad, “Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale”, Thèse de doctorat en mécanique, Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand II, France, 2009.

[ALL03] R.J. Allemang, “The Modal Assurance Criterion – Twenty years of use and abuse”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 37(8), 2003, pp. 14–21.

[ARN11] E. Arnoult, P. Lardeur, L. Martini, “The modal stability procedure for dynamic and linear finite element analysis with variability”. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 47, 2011, pp. 30-45.

[BAE81] G. B. Baecher, T. S. Ingra, “Stochastic FEM in settlement predictions”, Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 107(4), 1981, pp. 449 -463.

[BAL03] E. Balmès, D. Barthe, F. Ravary, “Propagation de méconnaissances en analyse modale”, Actes du congrès : 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 2003, pp. 407-414.

[BEDD12] K. Beddek , S. Clenet , O. Moreau , V. Costan ,Y. Le Menach , A. Benabou , “Adaptive Method for Non-Intrusive Spectral Projection—Application on a Stochastic Eddy Current NDT Problem”, IEEE Transactions on Magnetics, 48(2), 2012, pp.759-762.

[BEN01] S. Benfratello, G. Muscolino, “Mode-superposition correction method for deterministic and stochastic analysis of structural systems”, Computers & Structures, Vol. 79 (26-28), November 2001, pp. 2471-2480.

[BEN88] H. Benaroya, M. Rehak, “Finite element methods in probabilistic structural analysis : a selective review”, Applied Mechanics Reviews, Vol. 41 (5), 1988, pp. 201-213.

[BER02] M. Berveiller , B. Sudret, M. Lemaire, “Comparaison of method for computing the response coefficient in stochastic finite element analysis”, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 17, 2002, pp. 337-348.

[BER06] M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire, “Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression”, European Journal of Computational Mechanics, Vol. 15, 2006, pp. 81–92.

[BLA99] E. Blain, D. Aubry, P. Chové, P. Lardeur, “Influence of parameters dispersion on the vibrating behavior of spot welded plates”, Actes du congrès : Euromech 405, Valenciennes, France, 1999, pp. 1-6.

[BOU12] M. B. Boubaker, F. Druesne, P. Lardeur, F. Barillon, P. Mordillat, “Uncertain vibration analysis of an automotive car body modeled by finite elements with the modal stability procedure”, International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA), & International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics (USD), Leuven, Belgique, 2012.

[CAF97] J. A. Cafeo, R. V. Lust, S. Doggett, D. J. Nefske, D. A. Feldmaier, S. H. Sung, “A design of experiemnts approach to quantifying test-to-test variability for a modal test” Actes du congrès : 15th international Modal Ananlysis conference, Orlando, Etats-Unis, 1997, pp. 598-604.

[CAM75] B. Cambou, “Applications of first order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity”, Actes du congrès : 2nd International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Mechanics, Aachen, Allemagne, 1975, pp. 67-87.

[CHE77] J. C. Chen, B.K. Wada, “Matrix perturbation for structural dynamic analysis”, AIAA Journal, Vol. 15, 1997, pp. 1095-1100.

[COR97] R. Cornish, F. Syred, “Vehicle noise path modelling for interior noise variability reduction”, C524/027/97, 1997, pp. 105-116.

[DES99a] O. Dessombz, F. Thouverez, L. Jézéquel, “Analysis of stochastic structures : projection on homogeneous chaos”, Actes du congrès : Euromech 405, Valenciennes, France, 1999, pp. 221-226.

[DES99b] O. Dessombz, F. Thouverez, J. P. Lainé, L. Jézéquel, “Interval structural analysis of uncertain mechanical systems : Static and dynamic cases”, Actes du congrès : Euromech 405, Valenciennes, France, 1999, pp. 65-74.

[DIM95] A. D. Dimarogonas, “Interval analysis of vibrating systems”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 183, 1998, pp. 739-749.

[DRU13] F. Druesne, M. B. Boubaker, P. Lardeur, “Méthodes rapides pour l’évaluation de la variabilité de fréquences propres d’une caisse nue automobile”, CSMA 2013, 11e Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 13-17 Mai 2013.

[DRU14] F. Druesne, M. B. Boubaker, P. Lardeur, “Fast methods based on modal stability procedure to evaluate natural frequency variability for industrial shell-type structures, Finite Element in Analysis and Design”, article accepté en mai 2014.

[ELI99] I. Elishakoff, “Probabilistic theory of structures”, 2-ème ed. New York. Dover, 1999.

[ELI03] I. Elishakoff, Y. Ren, “Finite element methods for structures with large stochastic variations” Oxford University Press, Oxford, 2003.

[EWI84] D.J. Ewins, “Modal testing : theory and practice”, Research Studies Press, Baldock, Hertfordshire, United Kingdom, 1984.

[FAL02] G. Falson, N. Impollonia, “A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, 2002, pp. 5067-5085.

[FAL05] G. Falson, G. Ferro, “A méthod for the dynamical analysis of FE discretized uncertain structures in the frequency domain” Computer methods in applied mechanics anf Engineering, Vol. 194, 2005, pp. 4544-4564.

[FIS96] G. S. Fishman, “Monte Carlo : Concepts, Algorithms and Applications”, Springer Verlag, 1996.

[GHA91] G. R. Ghanem, D. P. Spanos, “Stochastic Finite Elements : A spectral approach”, Springer-Verlag, New york, 1991.

[GHA99] G. R. Ghanem, "Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 168, 1999, pp. 19-34.

[GHA03] G. R. Ghanem, D. P. Spanos, "in : Stochastic Finite Element : A Spectral Approach", Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[HAM64] J. M. Hammersley, D. C. Handscomb, "Monte Carlo methods", Chapman and Hall. Londres, 1964.

[HAN02] M. Hanss, "The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parametrs", Fuzzy, sets ans systems, Vol. 130, 2002, pp. 277-289.

[HUR02] J. E. Hurtado, "Analysis of one dimensional stochastic finite elements using neural networks" Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 17, 2002, pp. 35-44.

[KAM01] M. Kaminski, "Stochastic second order perturbation approach to the stress based finite element method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Iss. 21, 2001, pp. 3831-3852.

[KAM02] M. Kaminski, "Stochastic perturbation approach to engineering structure vibrations by the finite difference method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 251, 2002, pp. 651-670.

[KAR46] K. Karhunen, "Zur spektraltheorie stochastischer prozesse", Annales Academiae Scientiarum Fennicae Vol. 37, 1946.

[KLO03] A. Kloess, Z. P. Mourelatos, P. R. Meernik, "Probabilistic analysis of an automotive body-door system", International Journal of Vehicle Design, Vol. 34, No. 2, 2003, pp. 101-125.

[KOL50] A. Kolmogorov, "Foundation of the theory of probability", Chelsea. New York, 1950.

[KOM93] M. S Kompella., R. J. Bernhard, "Measurement of statistical variation of structural acoustic characteristics of automotive vehicles" Actes du congrès : SAE Noise and Vibration Conference, Detroit, Etats-Unis, 1993, pp. 64-81.

[KOM96] M. S. Kompella, R. J. Bernhard, "Variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicles", Noise Control Engineering Journal, Vol. 44, No. 2, 1996, pp.93-98.

[LAN80] I. Langen, R. Sigbjörnsson, "On stochastic dynamics of floating bridges", Engineering Structures, Vol. 2, Iss. 4, 1980, pp. 209-216.

[LAR03a] P. Lardeur, M. Oudjene, E. Arnoult, "La méthode MEGC pour le calcul de dispersion du comportement statique des treillis". Actes du congrès : 16ème Congrès Française de Mécanique, Nice, France, 2003.

[LAR03b] P. Lardeur, M. Oudjene, E. Arnoult, "Une méthode rapide pour la prise en compte des incertitudes dans les structures minces ; application aux treillis", Actes du congrès : 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 2003.

[LAR10] P. Lardeur, L. Martini, E. Arnoult, F. Druesne, "An economical approach for the variability of natural frequencies and frequency response functions of structures modelled by finite elements", Actes du congrès, ECCM 2010, IV European Conference on Computational Mechanics, Paris, Mai 2010, pp. 16-21.

[LEE02] S. B. Lee, S. Baik, H. J. Yim, “Design optimization of vehicule structure by using response surface model”, Actes du congrès : ICSV9, Orlando, Etats-Unis, 2002.

[LI01] J. LI, S. Liao, “Response analysis of stochastic parameter structures under nonstationary random excitation”, Computational Mechanics, Vol. 27, 2001, pp. 61-68.

[LIO07] C. Lionnet, P. Lardeur, “A hierarchical approach to the assessment of the variability of interior noise levels measured in passenger cars”, Noise Control Engineering Journal, Vol. 55, No. 1, 2007, pp.29-37.

[MAC13] D. H. Mac, S. Clénet, S. Zheng, T. Coorevits, J. C. Mipo, “On the geometric uncertainties of an electrical machine : stochastic modeling and impact on the performances”. Actes du congrès : Compumag 2013, Budapest, Hongrie, 2013.

[MAC71] R.H. Macneal, “A hybrid method of component mode synthesis”, Computers and structures, Vol. 1, 1971, pp. 581-601.

[MAH13] M. Mahjudin, F. Druesne, I. Katili, P. Lardeur, “La méthode CGSM pour l’analyse statique des plaques avec variabilité”, CSMA 2013, 11e Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 13-17 Mai 2013.

[MAR08] L. Martini, “Développement et évaluation de l’hypothèse de stabilité modale pour la variabilité du comportement vibratoire des structures minces modélisées par éléments finis”, thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, 2008.

[MAT11] MATLAB and Statistics Toolbox Release 2011b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, Unites States.

[MAT97] H.G. Matthies,C.E. Brenner, C.G. Bucher, C. Guedes Soares, “Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids, Stochastic finite elements”, Structural Safety, Vol. 19, No. 3, 1997, pp. 283 -336.

[MCK79] M. D. McKay, R. J. Beckman, W. J. Conover, “Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code”, Technometrics, Vol. 21, No. 2, 1979, pp. 239-245.

[MEI98] H. Mei, O. P. Agrawal, S. S. Pai, “Wavelet-based model for stochastic analysis of beam structures”, AAIA Journal, Vol. 36, No. 3, 1998, pp. 465-470.

[MEN08] L. R. de Menezes, A. O. Paredes, H. Abdalla, G. A. Borges, “Modeling device manufacturing uncertainty in electromagnetic simulations”, Actes du congrès : Microwave Symposium Digest, 2008 IEE MTT-S International, pp. 1385-1388.

[MET49] N. Metropolis, S. Ulam,“The Monte Carlo method”, Journal of the american Staistical Association, Vol 44, 1949, pp. 335-341.

[MOE00] D. Moens, D. Vandepitte, “Envelope frequency response function calculation of uncertain structures”, Actes du Congrès : International Conference of Sound and Vibration Engineering (ISMA2000), Leuven, Belgique, 2000, pp. 395-402.

[MOO66] R.E. Moore, “Interval Analysis”, Prentice-Hall, 1966.

[NAS12] MSC Nastran, Quick Reference Guide, 2012.

[NAS09] MSC Nastran, Numerical Methods User's Guide, 2009.

[PAP99] M. Papadrakakis,V. Papadopoulos, "Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engi neering, Vol. 168, 1999, pp. 305-320.

[PEL05] M.F. Pellissetti, H.J. Pradlwarter,G.I. Schuëller, "Reliability Analysis of Large FE-Systems using Line Sampling", Actes du congrès : ICOSSAR 2005, Rome, Italie, 2005.

[PIP67] L. A. Pipes, "A Perturbation Method for the solution of linear matrix differential equation", Journal of the Franklin Institute, Vol. 283, No. 5, 1967, pp. 357-371.

[POT07] K. Potter, C. Langer,B. Hodgkiss,S. Lamb, "Sources of variability in uncured aerospace grade unidirectional carbon fibre epoxy preimpregnate", Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, Vol. 38, No. 3, 2007, pp. 905-916.

[RAN00] D. Randall Mantefel, "Evaluating the convergence of Latin Hypercube Sampling", Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2000, pp. 100-106.

[RAO95] S. S. Rao, J. Sawyer, "Fuzzy finite element approach for the analysis of imprecisely defined system" AIAA Journal, Vol. 33, No. 12, 1995, pp. 2364-2370.

[SCH05] C. A. Schenk,G. I. Schuëller, "Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems", Springer. Berlin, 2005.

[SCH97] G. I. Schuëller, "A State-of-the-Art Report on Computational Stochastic Mechanics", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 12, No.4, 1997, pp. 197-321.

[SCH01] G.I. Schuëller, "Computational stochastic mechanics – recent advances", Computers and Structures, Vol. 79, Iss. 22-25, 2001, pp. 2225-2234.

[SCI11] R. Scigliano, M. Scionti, P. Lardeur, "Verification, validation and variability for the vibration study of a car windscreen modeled by finite elements", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 47, No. 1, 2011, pp.17-29.

[SHI88] M. Shinozuka, F. Yamasaki, "Stochastic finite elements analysis : an introduction", Actes du congrès : Stochastic structural dynamics : progress in theory and applications, Barking, Royaume-Uni, 1988, pp. 241-291.

[SHI88] M. Shinozuka, F. Yamazaki, "Stochastic Structural Dynamics : Progress in Theory and Applications", Elsevier Applied Sciences, editors : Ariaratnam S.T., Schuëller G.I. , Elishakoff I., 1988.

[STE09] G. Stefanou, "The Stochastic finite element method : Past, present and future", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 198, 2009, pp. 1031-1051.

[STO12] R. Stocki, R. Lasota, P. Tauzowski, T. Szolc, "Scatter assessment of rotating system vibrations due to uncertain residual unbalancesand bearing proprties", Computer Assisted Methods in Engineering and Science, Vol. 19, 2012, pp. 95-120.

[SOI00] C. Soize, "A non-parametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 15, 2000, pp. 277-294.

[SOI05] C. Soize, “Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics” Computer methods in Applied Mechanics and Engeineering, Vol. 194, 2005, pp. 1333-1366.

[SON04] Q. Song, D. Zhou, B. Niu,C. Zhu, “Uncertainties in the vibration Acceleration Measurment”, Actes du congès : IMTC (Instrumentation and Measurement Technology Conference), Como, Italie, Mai 2004, pp. 1075-1078.

[SUD00] B. Sudret, A. Der Kiureghian, “Stochastic Finite Element Methods and Reliability, A State-of-the-Art Report”. Report No.UCB/SEMM-2000 /08, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley.

[SUF08] B. Sudret, “Probabilistic models for the extent of damage in degrading reinforced concrete structures”, Reliability Engineering & System Safety, Vol. 93, No. 3, 2008, pp. 410-422.

[TAG87] G. Taguschi, “System of experimental design : engineering methods to optimize quality and minimize costs”, UNIPUB/Kraus International Publications, New York, 1987.

[ULA47] S. Ulam, R. D. Richtmyer, J. von Neumann, “Statistical methods in neutron diffusion”, Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-551, 1947.

[ULA91] S. M. Ulam, “Adventures of Mathematician”, University of California Press, Berkeley, 1991.

[WOO84] L. A. Wood, C. A. Joachim, “Variability of onterior noise levels in passenger cars”, Actes du congrès : Conference on Vehicle Noise and Vibration, London, England, 1984, pp. 197-206.

[YAM88] F. Yamasaki, M. Shinozuka, G. Dasgupta, “Neumann expansion for stochastic finite element analysis”, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No.8, 1988, pp. 1335-1354.

[YAN01] X. Yang, S. Chen, B. Wu, “Eigenvalue reanalysis of structures using perturbations and Padé approximation”, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 15, No. 2, 2001, pp. 257-263.

[ZAD65] L.A. Zadeh, “Fuzzy Sets”, Information and Control, Vol. 8, 1965, pp. 338-353.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

En conclusion, cette thèse avait comme but d'étudier un modèle multi-physique électromagnétique-vibratoire d'une machine électrique, d'optimiser ce modèle et d'améliorer les comportements vibratoires de la machine en prenant en compte les incertitudes. Dans ce contexte, deux modèles numériques électromagnétique et mécanique ont été exploités. Des études sont faites sur les modèles numériques afin d'assurer qu'ils soient représentatifs.

Le calcul numérique est lourd au niveau du temps de calcul, surtout pour un dispositif industriel modélisé de manière réaliste. Dans cette thèse, on considère un modèle numérique pertinent. Ce modèle est simple et rapide au niveau de temps de calcul, mais suffisamment précis au niveau des résultats attendus.

Une étude sur la finesse du maillage mécanique et quelques choix de modélisation sont faits en se basant sur des mesures expérimentales.

Nous avons réalisé des études sur les limites de la méthode de calcul de pression magnétique utilisée. En fait, le choix de la position du chemin fictif du calcul de pression magnétique et le pas de calcul par rapport à la discrétisation du maillage dans l'entrefer, ont des effets non négligeables sur les résultats vibratoires du modèle multi-physique. Il est recommandé d'être très attentif à la variabilité des résultats vis a vis de ces deux paramètres. Le calcul d'induction magnétique (qui sert à calculer la pression magnétique) doit être réalisé sur un chemin fictif situé dans l'entrefer. Nous recommandons de situer ce chemin au milieu de l'entrefer dans le cas du calcul d'efforts locaux via le tenseur de Maxwell. Il est important de bien choisir le pas de rotation du rotor afin d'éviter des bruits numériques. Le pas de rotation doit être égal au multiple de distance entre les nœuds du maillage dans l'entrefer.

Ce modèle multi-physique numérique simplifié a été validé en comparant les spectrogrammes calculés par un modèle complet du groupe motopropulseur et mesurés sur le groupe motopropulseur.

En profitant de ce modèle validé, nous avons réalisés quelques études spécifiques sur la machine. Nous avons réalisés une première étude sur les effets des chargements tangentiels sur le déplacement et sur la vibration radiale au niveau de la surface externe du stator. Contrairement à ce qui est mentionné dans des nombreuses publications dans ce domaine, les chargements tangentiels sont importants. Au niveau statique, on a trouvé que le déplacement de la surface extérieure du stator est de même ordre pour un chargement radial ou tangentiel. Au niveau dynamique, les chargements tangentiels affectent significativement le spectrogramme de la machine, nous avons montré l'existence de modes propres qui ne sont excités que par les chargements tangentiels.

Plusieurs études analytiques ont été faites sur les alimentations statoriques d'une machine asynchrone. Afin de prouver la faisabilité d'une étude qui prend en compte les harmoniques de hachage dans un modèle éléments finis, une étude a été faite sur les harmoniques vibratoires d'origine électronique sur un modèle éléments finis. En fait, les courants qui alimentent notre machine électrique sont obtenus à partir de tensions continues découpés en MLI. Ces courants qui possèdent des composantes harmoniques ont des effets potentiellement importants sur le comportement vibratoire de la machine, surtout si la fréquence de découpage est proche d'une fréquence d'un mode résonant d'ordre $2p$ ou 0.

Un modèle éléments finis multi-physique est bien souvent trop lourd pour appliquer un algorithme d'optimisation, surtout sur des critères harmoniques. Nous avons montré, dans cette thèse, qu'une méthode rapide et fiable basée sur le principe d'une surface de réponse adaptative, via des aller retour avec un modèle EF, peut être favorablement utilisée sur ce modèle multi-physique. Les résultats d'optimisation nous montrent que l'on peut réduire significativement les vibrations de la machine en réduisant quelques harmoniques de pressions magnétiques. En plus, l'autorisation d'une faible perte en couple (moins de 2%), peut améliorer considérablement les résultats obtenus.

Dans le domaine de la conception des systèmes soumis aux vibrations, les incertitudes sont souvent négligées, ou grossièrement prises en compte à l'aide de coefficients de sécurité importants. Ces incertitudes peuvent provenir de plusieurs sources dont les propriétés des matériaux. Dans cette thèse nous avons pris en compte les incertitudes des propriétés de matériaux dans un calcul vibratoire de la machine électrique. Afin de réaliser cette étude, on a utilisé une méthode basée sur l'hypothèse mécanique de stabilité modale (*Modal Stability Procedure*, MSP). La bonne utilisation de la méthode MCS-MSP est conditionnée par la vérification de l'hypothèse MSP et la validation du maillage avant de mener une étude avec variabilité. La formulation MSP pour l'élément solide hexaédrique à 8 nœuds a été développée dans cette thèse pour l'appliquer sur un modèle de machine électrique pour l'analyse modale et la FRF. Cette méthode présente un gain important en temps de calcul par rapport à une méthode classique de Monte-Carlo. Ce gain augmente avec la finesse du maillage.

Avec l'utilisation de MCS-MSP pour l'analyse modale, on peut conclure que les variabilités des fréquences propres sont toujours inférieures à celle appliquées aux variables d'entrées. Cette variabilité sur les fréquences propres varie légèrement d'un mode à l'autre. Le module d'Young axial (représentatif de l'hétérogénéité de l'empilement des tôles) n'a pas une influence importante sur les fréquences propres. Cette étude nous a montré qu'un modèle simplifié d'un stator, soit un cylindre creux, est capable de fournir les mêmes résultats qu'un modèle d'un stator avec dents. Cela peut s'expliquer par l'effet que les modes étudiés (à basses fréquences) sont des modes globaux et non pas des modes de dents. Il permet aux concepteurs d'utiliser des modèles donnant des résultats acceptables sans être trop complexes.

Pour l'étude de la variabilité des réponses en fréquence, les paramètres matériaux influents sont les mêmes que pour l'analyse modale. La variabilité augmente avec la fréquence et peut être importante. Pour un coefficient de variation de 5% sur le module d'Young dans les directions de la section ou sur la masse volumique, la variabilité de la réponse n'est pas loin d'atteindre les 20 dB et elle l'atteint lorsque les deux paramètres aléatoires sont considérées en même temps. Le niveau de variabilité en sortie peut donc être très élevé avec ce niveau de variabilité en entrée.

En perspective, l'outil de couplage, présenté dans cette thèse et développé au sein du LEC, pourra être utilisé pour réaliser des calculs multi-physiques sur d'autres machines, des études sur une machine synchroreluctante ont déjà été commencées. Il est également possible de coupler un modèle thermique de cette même machine avec le modèle électromagnétique-vibratoire, pour prendre en compte les interactions thermique-vibration.

Les études sur les vibrations causées par les harmoniques du courant rotorique issues du hachage ont montrées qu'il est possible d'utiliser notre outil de modélisation multi-physique EF pour étudier l'impact des différentes stratégies MLI générant les courants statoriques.

La méthode d'optimisation utilisée dans cette thèse a été appliquée sur des critères harmoniques uniquement fonction du temps : les harmoniques de la pression magnétique appliquée sur un nœud. Il serait intéressant d'appliquer la même méthode sur des harmoniques spatio-temporels (figures 2.40 et 2.42). Il est possible également, avec des améliorations de l'outil de couplage, d'intégrer le modèle mécanique dans les boucles d'optimisation, et appliquer cette méthode d'optimisation directement sur les pics vibratoires.

La prise en compte de la variabilité pourrait être proposée sous la forme de champs aléatoires, permettant de se rapprocher de la variabilité locale d'une tôle à l'autre du stator, au lieu de variables aléatoires globales. Le modèle stochastique est alors plus complexe mais les champs stochastiques permettent de représenter les paramètres mécaniques incertains d'une manière plus réaliste. La variabilité spatiale des paramètres est modélisée. La méthode MCS-MSP est compatible avec la modélisation de la variabilité des propriétés matériau en champ aléatoire. L'intérêt sera notamment d'observer l'influence de la longueur de corrélation sur la réponse stochastique. Il serait ainsi intéressant d'analyser l'impact d'une variation rapide ou lente des propriétés matériau du stator sur son comportement vibratoire. Enfin, il serait intéressant d'étudier les variabilités provenant d'autres sources, comme la modélisation et la fabrication, et d'étudier l'impact des incertitudes de l'assemblage des tôles sur la variabilité du comportement vibratoire.

Table des figures

Liste des tableaux