

Examen Médian P17

Durée : 2h, documents autorisés : AUCUN

CHAQUE EXERCICE DOIT ÊTRE RÉDIGÉ SUR UNE COPIE SÉPARÉE !

Exercice 1. Vol d'un avion (environ 5 pts)

Le pilote d'un avion privé réalise un vol entre deux aéroports A et B séparés d'une distance $d=200$ km. Le module de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ de son avion par rapport à l'air est constant et égal à 150 km/h. On note V le module de la vitesse de l'avion par rapport au sol. Lorsqu'il y a du vent, on note $\vec{v}'$ la vitesse du vent (c'est-à-dire la vitesse de l'air par rapport au sol).

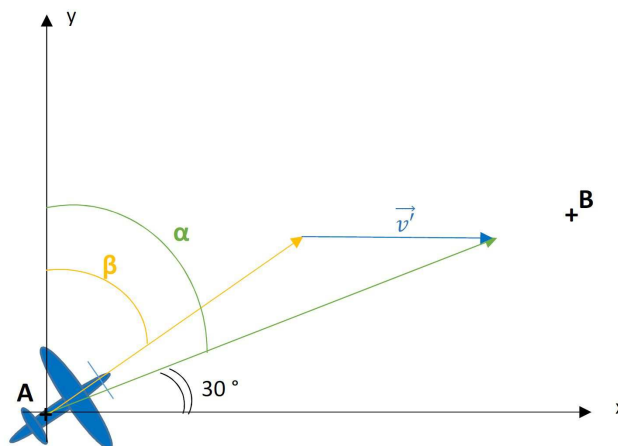


FIGURE 1 – Vol d'un avion.

En aéronautique, on appelle "la Route" l'angle α entre la direction du Nord et la direction dans laquelle l'avion se déplace (c'est-à-dire la direction de $\vec{V}$). On appelle "le Cap" l'angle β entre la direction du Nord et la direction de l'axe longitudinal de l'avion (c'est-à-dire la direction de $\vec{v}$). Enfin, on appelle "la Dérive" la différence d'angles entre la Route et le Cap.

1. Définir la vitesse absolue et relative de l'avion.
2. Écrire la loi de composition des vitesses entre $\vec{V}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$.
3. Projeter la loi de composition des vitesses sur les axes x et y pour écrire deux relations scalaire entre les normes des vitesses et les angles α et β .
4. Éliminez l'inconnue β pour obtenir une équation du second degré en V . Donnez l'expression de la seule solution physique possible V de cette équation du second degré en fonction de v , v' et α .
5. Calculer V si $v'=40$ km/h.
6. Calculer le temps (arrondi à la minute près) mis par l'avion pour aller de A à B lorsqu'il n'y a pas de vent puis calculer le temps mis par l'avion pour aller de A à B lorsqu'il y a un vent d'Ouest de 40 km/h.

Exercice 2. Traineau sur un plan incliné (environ 8 pts)

Un Lapon (habitant de la Laponie) tire son traineau de masse m assimilable à un point matériel sur une colline enneigée assimilée à un plan incliné avec α l'angle d'inclinaison (on rappelle le champ de gravité $\vec{g}$ dirigé vers le bas). Le Lapon exerce une traction $\vec{F}$ constante en norme (on note $F = \|\vec{F}\|$) et qui fait un angle constant avec la trajectoire, on note β l'angle par rapport à la normale (direction $\vec{e}_y$) comme indiqué sur la Figure 2. On tient compte de la force de frottement solide $\vec{f}$ entre le traineau et le sol (voir rappels à la fin de l'exercice).

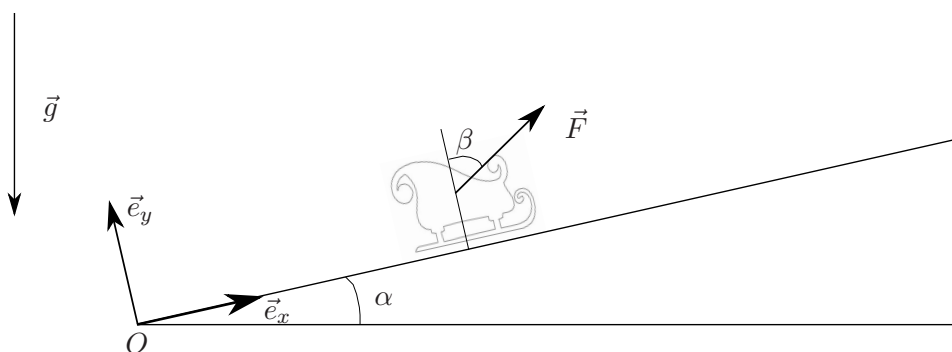


FIGURE 2 – Lapon tirant un traineau.

Dans une première étude, nous souhaitons connaître les valeurs de F permettant de rester à l'équilibre statique.

1. Physiquement, la force $\vec{F}$ doit nécessairement être orientée vers la droite (comme sur le schéma). En déduire une relation très simple entre les angles α et β .
2. Indiquez sur un schéma les forces mises en jeu sur le traineau. Exprimer ces forces dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
3. Écrire le principe fondamental de la statique. En déduire l'expression du frottement $\vec{f}$ et de la réaction normale $\vec{N}$ en fonction de F, m, g et des angles α et β .
4. Trouver la valeur maximale de la traction F au delà de laquelle le traineau n'est plus en contact avec le sol. Dans la suite de l'exercice, on considérera que F n'excède pas cette valeur.
5. On définit l'angle α_0 tel que $\mu_s = \tan \alpha_0$ et on considère le cas où $\alpha_0 \leq \beta$. Montrer, en utilisant la loi de Coulomb statique que la force F doit nécessairement vérifier l'inégalité :

$$mg \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin(\beta - \alpha_0)} \leq F \leq mg \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\sin(\beta + \alpha_0)}.$$

Dans une deuxième étude, F dépend du temps : $F(t) = kt$, avec k une constante positive, et l'on souhaite étudier le mouvement du traineau au cours du temps. Pour les calculs ultérieurs, on considère que le traineau est initialement au repos au point O .

6. Montrer très simplement que (i) la condition $\alpha \leq \alpha_0$ doit être vérifiée et que (ii) tant que

$t \leq t_0$, avec

$$t_0 = \frac{mg \sin(\alpha + \alpha_0)}{k \sin(\beta + \alpha_0)},$$

le traineau ne se déplace pas.

7. À $t = t_0$, le traineau se met à glisser dans le sens des x croissants et on note $x(t)$ la position du traineau. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer l'accélération du traineau et montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{x} = At + B$$

où A et B sont des constantes à déterminer.

8. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de A , B et t_0 .

♠ Rappels de mécanique sur le frottement solide...

La loi de Coulomb **dynamique** des frottements s'écrit :

$$\vec{f} = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

où $\vec{v}$ désigne la vitesse relative du point de contact du solide par rapport à la surface et μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

La loi de Coulomb **statique** des frottements s'écrit

$$\|\vec{f}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique.

Exercice 3. Piège de Penning (environ 7 pts)

Soit un référentiel galiléen et $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère cartésien associé. Nous souhaitons étudier le fonctionnement d'un piège à particule permettant de confiner des particules chargées dans une zone donnée de l'espace. Il existe plusieurs types de piège, celui que nous allons étudier est le piège de Penning dans lequel règne un champ électromagnétique constant au cours du temps. Nous étudions le cas d'un électron assimilé à un point matériel P placé dans le piège, de masse m , de charge $-e$ ($e > 0$). P sera repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Enfin, nous négligerons l'action des forces gravitationnelles sur l'électron. Nous rappelons également l'expression de la force de Lorentz pour une particule de charge q , de vitesse $\vec{v}$, dans un champ électromagnétique $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Notons que les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

Première étude : champ électrique. Dans un premier temps, nous considérons que règne dans le piège de Penning un champ électrique non uniforme dans l'espace et dont l'expression est donnée en fonction de la position par :

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d^2}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z)$$

où V_0 (en Volts) et d (en mètres) sont des constantes positives. Le champ magnétique est nul.

1. Déterminer l'équation vectorielle résultant de l'écriture du principe fondamental de la dynamique. Puis, la projeter dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On s'intéresse ici au cas où, à l'instant initial, P se situe en O et sa vitesse vaut $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

2. Déterminer $z(t)$ et tracer z en fonction du temps (voir rappels de maths à la fin).

3. Déterminer $(x(t), y(t))$ (voir rappels de maths à la fin). On pourra poser $\omega_E = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}$.

Deuxième étude : champ magnétique seul. Dans un second temps, nous considérons que règne dans le piège de Penning un champ magnétique uniforme donné par : $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ où B_0 est une constante positive. Le champ électrique est nul.

4. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à P . En déduire le système d'équations différentielles vérifié par les coordonnées cartésiennes de la vitesse de P , (v_x, v_y, v_z) . On s'intéresse ici au cas où, à l'instant initial, P se situe en O et sa vitesse vaut $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

5. Déterminer $z(t)$ et tracer z en fonction du temps.

6. Combiner les équations restantes du principe fondamental de la dynamique (on pourra en dériver une par rapport au temps si besoin est) et montrer que v_x est solution de l'équation :

$$\ddot{v}_x + \omega_B^2 v_x = 0$$

avec $\omega_B = \frac{eB_0}{m}$.

7. En déduire la vitesse $(v_x(t), v_y(t))$ et la position $(x(t), y(t))$.

♠ **Rappels de maths...** On rappelle que

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{a une solution de la forme} \quad x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad \text{a une solution de la forme} \quad x(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$