

Extension de la DRBEM à la propagation guidée en écoulement cisaillé

Emmanuel PERREY-DEBAIN^a, Yves GERVAIS^a, Michel GUILBAUD^b

^a Université de Poitiers, Bâtiment H, 40, avenue du Recteur-Pineau, 86022 Poitiers cedex, France
Laboratoire d'études aérodynamiques (UMR CNRS 6609)

^b CEAT – Université de Poitiers, 43 rue de l'Aérodrome, 86036 Poitiers cedex, France
Courriel : yves.gervais@lea.univ-poitiers.fr; michel.guilbaud@lea.univ-poitiers.fr

(Reçu le 28 novembre 1999, accepté le 8 mars 2000)

Résumé.

Nous étendons ici le principe de la Dual Reciprocity Boundary Element Method à la résolution dans le domaine fréquentiel des équations de propagation acoustique au sein d'un écoulement cisaillé. L'originalité de la démarche est d'écrire les équations d'Euler linéarisées sous la forme d'une équation de propagation du second ordre pour la pression couplée à une équation du premier ordre pour la vitesse acoustique transversale. La comparaison des résultats numériques avec des solutions analytiques approchées valables pour des écoulements à faible nombre de Mach ($M < 0,1$) montre l'intérêt de la méthode. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

éléments de frontière / écoulement cisaillé / propagation guidée en conduite / couplage équations pression-vitesse acoustique

Extension of the DRBEM for acoustic propagation in duct shear flow

Abstract.

The present study aims to extend the Dual Reciprocity Boundary Element Method in order to solve acoustic wave propagation equations in the frequency domain for a parallel shear flow. The Linearized Euler Equations are written as a coupled pair of equations, which are second-order in terms of acoustic pressure and first-order in terms of normal acoustic velocity. Good agreement between numerical results and analytical solutions for a low Mach number shear flow ($M < 0.1$) shows the interest of the method. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

boundary element / plane parallel shear flow / duct shear flow / coupling pressure-acoustic velocity equations

Abridged English version

DRBEM is a particular technique using boundary integrals to solve second order equations of a unique variable [1] very efficient to compute acoustic fields in infinite domain for irrotational flows [2] or for non-homogeneous temperature medium [3,4]. For shear flows (boundary layer, mixing layer, . . .), the acoustic pressure satisfies a third order equation (Lilley equation [5]) and this method is not usable. Following [6], the DRBEM is here extended for 2D plane parallel shear flow. The linearized Euler equations are solved in the frequency domain, under the form of an integral equation for the pressure p and a linearized momentum equation for the acoustic transverse velocity v , these two equations being uncoupled in the particular case of uniform flows. Results are compared with an approximate analytical solution for low Mach numbers ($M < 0.1$).

Note présentée par Sébastien CANDEL.

S1620-7742(00)00040-4/FLA

© 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

The linear propagator associated to the linearized Euler equations for a 2D steady parallel plane shear flow $M(y)x$, (figure 1), of uniform characteristics (p_0, ρ_0, c_0) is given by equations (1,2) for solutions harmonic in time; x and y are the non dimensional (with respect to the half duct width a) cartesian coordinates and Ω the non dimensional wave number $\Omega = \omega a / c_0$. By searching for the solutions under a modal form as $p(x, y) = P(y) e^{-i\beta x}$ and $v(x, y) = V(y) e^{-i\beta x}$, we obtain from equations (1) and (2), the classical Pridmore-Brown equation (3), [7].

Using a perturbation method [8] with the mean value of the Mach number M_0 in the duct cross-section as small parameter, some analytical solutions of (3) can be obtained writing P or β as $X = X_0 + M_0 X_1 + M_0^2 X_2 + \dots$ ($X = P$ or β). These developments are then introduced in (3). A set of linear problems (that we limit to the first order) obtained by cancelling the terms at each order leads to equation (4) for the zero order and equation (5) for the first one. The boundary condition on the rigid wall $P_y(\pm 1) = 0$ gives the fundamental mode solution of (4) and (5), and leads to equation (6) (with $P_0 = 1$) using (7) and (8). $\varepsilon = 1$ represents the downstream propagation as $\varepsilon = -1$ the upstream one. In (7), the Ω^2 term limits the use of the development so that $M_0 P_1$ is of lower order than P_0 . Figure 2 plots the normalised (using the values on the duct axis) pressure (6) for three various velocity profiles ($U = 1 - |y|$; $U = 1 - y^2$ et $U = (1 - |y|)^{1/7}$) for downstream propagation. Results are in good agreement with the quasi-steady solution of Wang and Kassoy ([9] figure 6). Expression (6) then appears as a good approximation for the system (1)–(2) for low Mach numbers and moderate frequencies. This solution can be used as a reference solution for the following numerical calculations.

To solve the system (1,2) on a rectangular domain D with boundary $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_P \cup \Gamma_S$ (figure 3), the DRBEM requires the introduction of N nodes $\mathbf{x}_{i=1,N}$ on the boundary and L inner nodes $\mathbf{x}_{i=N+1,N+L}$ regularly distributed in D , characterised by $n_\lambda = \lambda/d$, number of nodes by wavelength (d distance between 2 nodes). The boundary elements are of constant sizes $d/2$. If $b(p, v)$ is the right hand side of (1), the DRBEM leads to the matrix system (9) [3], where $\mathbf{H}$ and $\mathbf{G}$ are the classical matrices of BEM relative to the Helmholtz operator $\Delta + \Omega^2$, $\mathbf{R}$ is the matrix of the particular solutions and $\mathbf{F}$ the interpolation matrix of $b(p, v)$. Vectors $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{p}_n$ contain respectively the values of p , $b(p, v)$ at the $N + L$ nodes and the pressure normal derivatives at the N outer nodes. $\mathbf{b}$ can be related to $\mathbf{p}$ by interpolating p and v in D using (10,11) with (12,13), where $\{b^{(k)}\}_{k=1,\dots,6} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ is a basis for the space $\mathbf{P}_3$ of the polynomials of degree less than 3 on $\mathbf{R}^2$. The radial interpolation function $f_{1,j}$, called the third order Spline function is used here for convergence and regularity reasons, [10] (the second derivative of p in $b(p, v)$ requires that $f_{1,j}$ is at less $\mathbf{C}^2$ on the domain). The presence of polynomial $\hat{p}_3$ ensures that expressions (10,11) are unique and that the interpolation matrix $\mathbf{F}_1$ of (15) [11] can be inverted. The 6 extra unknowns of (13) require the following 6 extra constraint equations (14). By introducing (10,11) in $b(p, v)$ and in (2), expression (15) is obtained where $\mathbf{M}$ and $\mathbf{M}_y$ are diagonal matrices including respectively Mach number M (convective terms) and its y derivatives (shear terms). If the matrix between square parentheses in (15) cannot be inverted, hydrodynamic modes, for which convection operator of (2) is singular, are present, corresponding to propagation constants β cancelling the denominator of (3). This case will not be considered here.

The calculations are performed for a non-dimensional duct length 5, $M_0 = 0.05$ with a parabolic profile $U = 1 - y^2$. The walls Γ_P are perfectly rigid. The pressure profile on Γ_E is given by (6) and the impedance condition $p_x = -i\beta p$ is assumed on Γ_S to simulate a duct with infinite length. For these conditions, the solution of the problem, at the first order, is given by (6). Figure 4 plots the relative error on the modulus of the pressure averaged on the whole nodes and the L^2 norm of the error (or RMS error) versus the parameter n_λ for frequencies $\Omega = 3$ and 5. It must be noticed that the method leads to two kinds of numerical errors [10], the first one for the integral formulation (linked to the quality of the interpolation on the boundary) and the second one due to the approximation of the term $b(p, v)$ (linked to the interpolation function used and to the number and location of internal nodes). Due to the low value of the Mach number, $b(p, v)$ can be considered as a corrective term with respect to the integral solution of the Helmholtz equation: the numerical errors are weak even with a low number of internal nodes. The convergence is rapidly reached (no variation can be observed for $n_\lambda \geq 6$). This is due to the approximated solution (6) that is not perfectly

exact and not to the method. To prove this assessment, *figures 5a and 5b* plot the real parts of the numerical and analytical acoustic pressure fields, from *equation (6)*; *figure 6* plots the same quantities on the duct axis ($\Omega = 3$ and 5) showing the good agreement between the two methods of calculations. The small quasi-linear offset (along the duct axis) is due to the uncertainty of the propagation constant in (8) and becomes larger as the frequency increases.

The numerical results obtained here show the quality of this new approach. Further studies have to be performed to test the method in more complex configurations (fastest flows and transverse modes) where the coupling of the system (1,2) is stronger than in the present case. The idea to solve the linearized Euler equations under the form of an integral equation for the pressure may be an interesting way to calculate acoustic fields in unbounded domain (free jet, presence of an uniform flow at infinite to simulate a reactor in steady flight) and to be used as complementary tool for the traditional numerical methods (finite element, finite differences).

1. Introduction

La DRBEM est une technique particulière basée sur les intégrales de frontière pour résoudre essentiellement des équations du second ordre à une variable [1] qui a montré son efficacité pour simuler des champs acoustiques en espace libre en présence d'un écoulement irrotationnel [2] ou d'un champ de température variable [3,4]. Lorsque l'écoulement est cisailé (couche limite, couche de mélange...), la pression acoustique vérifie une équation du troisième ordre (équation de Lilley [5]) et la méthode n'est plus directement applicable. En s'inspirant des travaux de Kansa [6], nous étendons ici le principe de la DRBEM pour résoudre les équations de propagation au sein d'un écoulement cisailé unidirectionnel bidimensionnel. Les équations d'Euler linéarisées sont résolues dans le domaine fréquentiel sous la forme d'une équation intégrale pour la pression et d'une équation de quantité de mouvement linéarisée pour la vitesse acoustique transversale, ces deux équations étant découplées dans le cas particulier d'un écoulement uniforme. Les résultats de calcul sont comparés à des champs analytiques approchés valables pour des nombres de Mach faiblement subsoniques ($M < 0,1$).

2. Mode fondamental de l'équation de Pridmore-Brown à faible nombre de Mach

Le propagateur linéaire associé aux équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement cisailé (*figure 1*) unidirectionnel $M(y)x$ stationnaire et de caractéristiques uniformes (p_0, ρ_0, c_0) s'écrit en cherchant les solutions harmoniques du temps :

$$\Delta p + \Omega^2 p = 2i\Omega M p_x + M^2 p_{xx} - 2\rho_0 c_0 M_y v_x \quad \text{et} \quad \rho_0 c_0 (i\Omega v + M v_x) = -p_y \quad (1,2)$$

où p et v sont respectivement la pression acoustique et la vitesse acoustique transversale, x et y les coordonnées cartésiennes classiques adimensionnées par rapport à la demi-largeur a du conduit et Ω le

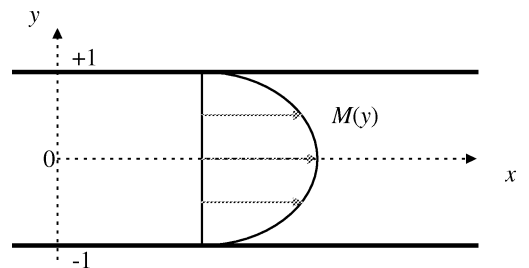


Figure 1. Écoulement cisailé unidirectionnel.

Figure 1. 2D parallel plane shear flow.

nombre d'onde sans dimension $\Omega = \omega a/c_0$. En cherchant les solutions sous la forme modale $p(x, y) = P(y)e^{-i\beta x}$ et $v(x, y) = V(y)e^{-i\beta x}$ on forme à partir de (1) et (2) l'équation classique de Pridmore-Brown [7] :

$$P_{yy} + \frac{2M_y}{\Omega - M\beta}\beta P_y + ((\Omega - M\beta)^2 - \beta^2)P = 0 \quad (3)$$

En utilisant une méthode de perturbation [8] ayant comme petit paramètre la valeur moyenne du nombre de Mach M_0 sur une section, on peut obtenir analytiquement certaines solutions de (3). Pour cela on écrit P et β sous la forme $X = X_0 + M_0X_1 + M_0^2X_2 + \dots$, ($X = P$ ou β). Ces développements sont ensuite introduits dans (3). En annulant les termes à chaque ordre, nous obtenons une suite de problèmes linéaires (nous nous limitons au premier ordre) :

• à l'ordre 0, $P_{0,yy} + (\Omega^2 - \beta_0^2)P_0 = 0 \quad (4)$

• à l'ordre 1, $P_{1,yy} + (\Omega^2 - \beta_0^2)P_1 = 2\beta_0\left(\beta_1 + \Omega\frac{M}{M_0}\right)P_0 - 2\frac{M_y}{\Omega M_0}\beta_0P_{0,y} \quad (5)$

La condition limite à la paroi rigide $P_y(\pm 1) = 0$ permet d'obtenir le mode fondamental solution de (4) et (5). On obtient finalement (on choisit de prendre $P_0 = 1$) :

$$p(x, y) = (1 + M_0P_1(y))e^{-i\beta x} \quad (6)$$

avec

$$P_{1,yy} = \varepsilon 2\Omega^2(1 - M(y)/M_0) \quad (7)$$

et

$$\beta = \varepsilon\Omega(1 - \varepsilon M_0) \quad (8)$$

où $\varepsilon = 1$ pour la propagation aval et $\varepsilon = -1$ pour la propagation amont. On notera que le terme Ω^2 dans (7) restreint l'utilisation du développement de sorte que le terme M_0P_1 reste d'un ordre de grandeur inférieur à P_0 . Le profil de la pression (6) normalisée par sa valeur au centre du conduit est illustré sur la *figure 2* pour trois profils d'écoulement ($U = 1 - |y|$; $U = 1 - y^2$ et $U = (1 - |y|)^{1/7}$) dans le cas d'une propagation aval. Les résultats sont parfaitement en accord avec la solution quasi-stationnaire de Wang & Kassoy (voir *figure 6* de [9]). L'expression (6) est donc une bonne approximation du système (1)–(2) tant que l'on reste à des nombres de Mach faibles et des fréquences modérées. Cette solution peut ainsi servir de solution de référence pour les applications numériques qui vont suivre.

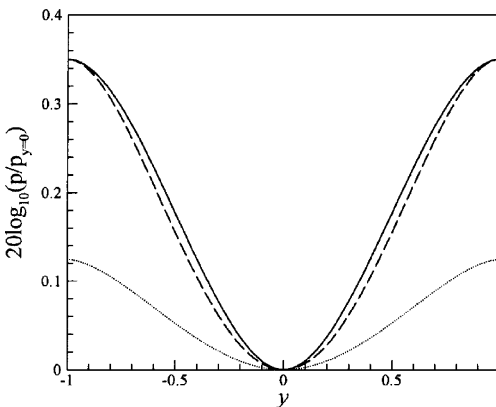


Figure 2. Profil de pression (en dB) pour trois profils d'écoulement : —, $U = 1 - |y|$; ----, $U = 1 - y^2$; ·····, $U = (1 - |y|)^{1/7}$. Le nombre de Mach au centre du conduit vaut 0,1 et $\Omega = \pi/2$.

Figure 2. Pressure distributions (in dB) for 3 velocity profiles: —, $U = 1 - |y|$; ----, $U = 1 - y^2$; ·····, $U = (1 - |y|)^{1/7}$. The Mach number at the duct centre line is 0.1 and $\Omega = \pi/2$.

3. La DRBEM

On cherche à résoudre le système (1,2) sur un domaine rectangulaire D de frontière $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_P \cup \Gamma_S$ (figure 3). L'utilisation de la DRBEM nécessite l'introduction de N nœuds notés $\mathbf{x}_{i=1,N}$ sur la frontière et L nœuds $\mathbf{x}_{i=N+1,N+L}$ régulièrement répartis dans D de sorte qu'on peut définir le paramètre adimensionnel $n_\lambda = \lambda/d$ (d distance entre deux nœuds voisins) caractérisant le nombre de nœuds par longueur d'onde. Les éléments de frontière sont constants de taille $d/2$. On note $b(p, v)$ le membre de droite de (1). Le traitement de (1) par la DRBEM aboutit au système matriciel suivant [3] :

$$\mathbf{H}\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{p}_n = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (9)$$

où $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ sont les matrices classiques de la méthode des intégrales de frontière relatives à l'opérateur de Helmholtz $\Delta + \Omega^2$, $\mathbf{R}$ est la matrice des solutions particulières et $\mathbf{F}$ la matrice d'interpolation du champ $b(p, v)$. Les vecteurs $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{p}_n$ contiennent respectivement les champs p et $b(p, v)$ aux $N + L$ nœuds du problème et la dérivée normale de la pression aux N nœuds à la frontière.

On peut relier $\mathbf{b}$ à $\mathbf{p}$ en interpolant spatialement p et v dans D par :

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j^{(p)} f_{1j}(\mathbf{x}) + \hat{p}_3^{(p)}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad v(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j^{(v)} f_{1j}(\mathbf{x}) + \hat{p}_3^{(v)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \quad (10,11)$$

avec :

$$f_{1j}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^4 \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \quad \text{et} \quad \hat{p}_3^{(p \text{ ou } v)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^6 \beta_{N+L+k}^{(p \text{ ou } v)} \cdot b^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (12,13)$$

où $\{b^{(k)}\}_{k=1,\dots,6} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ forment une base de l'espace $\mathbf{P}_3$ des polynômes sur $\mathbf{R}^2$ de degré inférieur à 3. La fonction d'interpolation radiale f_{1j} , appelée fonction Spline du troisième ordre, est envisagée ici pour des raisons de convergence [10] et de régularité (la dérivée seconde de p dans $b(p, v)$ impose à f_{1j} d'être au moins C^2 sur le domaine). La présence du polynôme $\hat{p}_3$ assure l'unicité des expressions (10) et (11) et l'inversibilité de la matrice d'interpolation $\mathbf{F}_1$ de (15) [11]. Les six inconnues supplémentaires de (13) nécessitent l'ajout des six équations de contrainte suivantes :

$$\sum_{j=1}^{N+L} \beta_j^{(p \text{ ou } v)} \cdot b^{(k)}(\mathbf{x}_j) = 0, \quad k = 1, \dots, 6 \quad (14)$$

En injectant les expressions (10) et (11) dans l'expression de $b(p, v)$ et dans (2), on aboutit après quelques développements matriciels à la relation suivante :

$$\mathbf{b} = (2i\Omega\mathbf{M}\mathbf{F}_{1,x} + \mathbf{M}^2\mathbf{F}_{1,xx} + 2\mathbf{M}_y\mathbf{F}_{1,x}[\mathbf{i}\Omega\mathbf{F}_1 + \mathbf{M}\mathbf{F}_{1,x}]^{-1}\mathbf{F}_{1,y})\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{p} \quad (15)$$

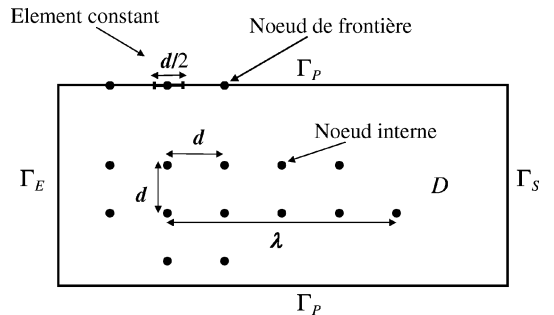


Figure 3. Répartition des nœuds dans D .

Figure 3. Nodes distribution in D .

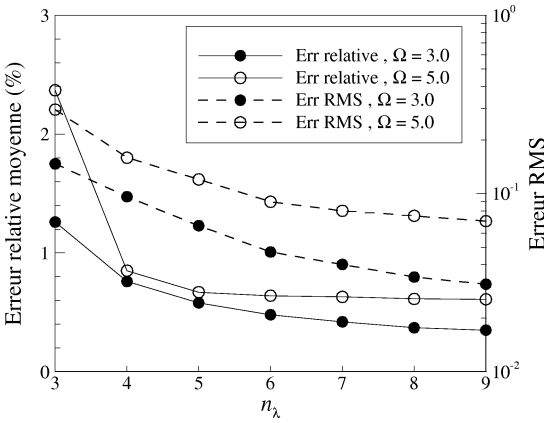


Figure 4. Évolution de l'erreur en fonction de n_λ .

Figure 4. Relative error versus n_λ .

où M et M_y sont les matrices diagonales contenant respectivement le nombre de Mach M (termes convectifs) et sa dérivée par rapport à y (termes de cisaillement). La non-inversibilité éventuelle de la matrice entre crochets de (15) est étroitement liée à l'existence de modes hydrodynamiques pour lesquels l'opérateur de convection (2) n'est pas inversible. Lors d'une analyse modale, ces modes correspondent aux constantes de propagation β qui annulent le dénominateur de (3). Une analyse rigoureuse de ce problème dépasse le cadre de cette étude et nous supposons que nous ne sommes pas dans ces situations particulières.

4. Applications numériques

Le calcul est effectué avec une longueur adimensionnée du conduit de 5, $M_0 = 0,05$ pour un profil d'écoulement de type parabolique $U = 1 - y^2$. Les parois Γ_P sont parfaitement rigides. Le profil de la pression sur Γ_E est donné par (6) et la condition d'impédance $p_x = -i\beta p$ est imposée sur Γ_S pour simuler une conduite de longueur infinie. Dans ces conditions, la solution du problème est, au premier ordre, donnée par (6). La figure 4 donne l'évolution de l'erreur relative du module de la pression moyennée sur l'ensemble des nœuds de calcul ainsi que la norme L^2 de l'erreur (ou erreur RMS) en fonction du paramètre n_λ pour les deux fréquences $\Omega = 3$ et 5. Il faut noter dès à présent que la méthode offre deux types d'erreurs numériques [10] : l'erreur due à la solution de la formulation intégrale dont la mesure est liée à la qualité de l'interpolation sur la frontière, et l'erreur due à l'approximation du terme $b(p, v)$ dont la mesure est liée aux fonctions d'interpolation utilisées, au nombre et à la position des nœuds internes. Etant donnée la faible valeur du nombre de Mach, $b(p, v)$ apparaît comme un terme correctif par rapport à la solution intégrale de l'équation de Helmholtz : les erreurs numériques restent petites même avec peu de points internes. La convergence semble rapidement atteinte (au-delà de $n_\lambda = 6$, l'évolution n'est plus appréciable). Ce comportement ne provient pas de la méthode mais de la solution approchée (6) qui n'est pas parfaitement exacte. Pour s'en convaincre, les figures 5a et 5b comparent les deux champs de pression acoustique (partie réelle) obtenus numériquement et analytiquement (équation (6)) et la figure 6 trace ces mêmes quantités sur l'axe de la conduite ($\Omega = 3$ et 5) montrant le bon agrément entre les deux méthodes de calcul. Le décalage quasi-linéaire (en suivant l'axe du conduit) provient essentiellement de l'incertitude sur la constante de propagation β de (8). Ce décalage est d'autant plus important que la fréquence est élevée.

5. Conclusion

Les résultats numériques semblent confirmer les potentialités de cette nouvelle approche. Des études sont à prévoir pour tester la méthode dans des configurations plus complexes (fort écoulement et modes transverses) où le couplage du système (1,2) est plus fort que dans le cas présent. L'idée de résoudre les

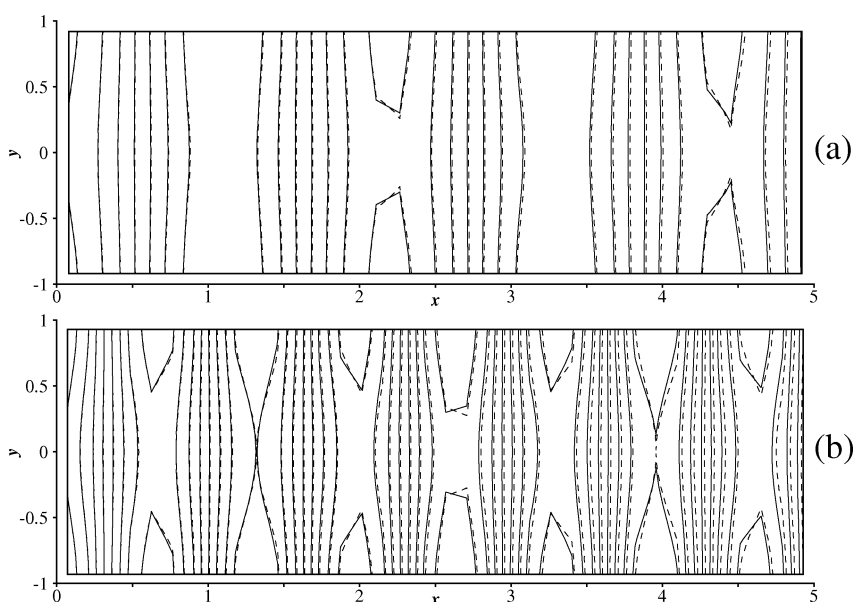
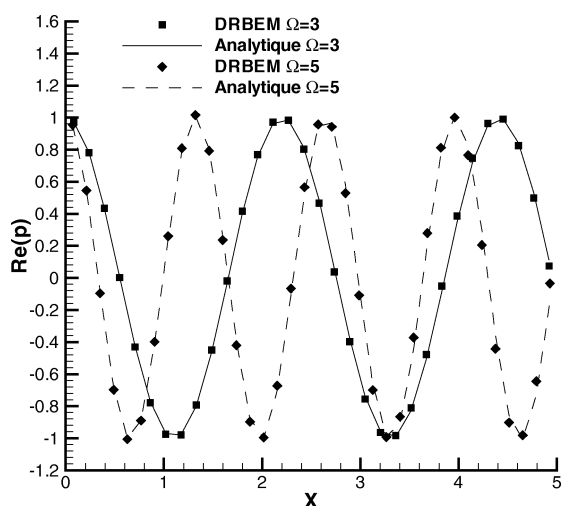


Figure 5. Partie réelle de la pression, —, numérique, - - - -, analytique. (a) $\Omega = 3$, $n_\lambda = 13$; (b) $\Omega = 5$, $n_\lambda = 9$.

Figure 5. Real part of the pressure —, numerical, - - - -, analytical. (a) $\Omega = 3$, $n_\lambda = 13$; (b) $\Omega = 5$, $n_\lambda = 9$.

Figure 6. Partie réelle de la pression sur l'axe de la conduite, —, numérique, - - - -, analytique.

Figure 6. Real part of the pressure on the duct axis —, numerical, - - - -, analytical.



équations d'Euler linéarisées sous la forme d'une équation intégrale pour la pression peut s'avérer très efficace à terme pour calculer des champs acoustiques dans des domaines infinis (jet libre, présence d'un écoulement uniforme à l'infini pour simuler un réacteur en vol stationnaire. . .), et se placer comme un outil tout à fait complémentaire des méthodes numériques traditionnelles (éléments finis, différences finies).

Références bibliographiques

- [1] Partridge P.W., Brebbia C.A., Wrobel L.C., The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, Applied Science, Elsevier, London, 1992.

- [2] Lee L., Wu T.W., Zhang P., A dual reciprocity method for acoustic radiation in a subsonic non-uniform flow, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 13 (1994) 365–370.
- [3] Perrey-Debain E., Gervais Y., Guilbaud M., Calcul de la propagation acoustique en milieux non homogènes infinis par la DRBEM, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIB* 326 (1998) 649–656.
- [4] Perrey-Debain E., Gervais Y., Guilbaud M., Development and application of the Dual Reciprocity Boundary Element Method for acoustic propagation in inhomogeneous axisymmetric domains, *Acustica united with Acta Acustica* 86 (2000) 83–92.
- [5] Lilley G.M., *The Generation and Radiation of Supersonic Jet Noise*, Vol. IV – Theory of Turbulence Generated Jet Noise, Noise Radiation from Upstream Sources and Combustion Noise, Part II : Generation of Sound in a Mixing Region, Air Force Aero Propulsion Laboratory, AFAPL-TR-72-53, Vol. 4, 1972.
- [6] Kansa E.J., Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics – II, solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Comp. Math. Appl.* 19 (1990) 147–161.
- [7] Pridmore-Brown D.C., Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct, *J. Fluid Mech.* 4 (1958) 393–406.
- [8] Peube J.L., Jallet M.F., Propagation d’ondes acoustiques dans un écoulement en conduite cylindrique, *Acustica* 29 (1973) 85–92.
- [9] Wang M., Kassoy D.R., Transient acoustic processes in a low Mach-number shear flow, *J. Fluid Mech.* 238 (1992) 509–536.
- [10] Jumarhon B., Amini S., Chen K., On the boundary element dual reciprocity method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 20 (3) (1997) 205–211.
- [11] Duchon J., Splines minimising rotation-invariant semi-norms in the Sobolev spaces, in: *Constructive Theory of Several Variables*, Lecture Notes Math., Vol. 571, W. Schempp, K. Zeller (Eds.), Springer, Berlin, 1977, pp. 85–100.