Examen Partiel P14

Durée : 1h, documents autorisés : AUCUN

Exercice 1. Questions de cours

Etant donnés deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ faisant un angle θ.
a. Définir le produit scalaire de ces deux vecteurs.
b. Définir le produit vectoriel de ces deux vecteurs.

Réponse : voir la note Cinématique.pdf

Dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on pose $\vec{A} = 1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$ et $\vec{B} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$.
c. Calculez le produit scalaire et vectoriel.

Réponse : $\vec{A} \cdot \vec{B} = 10$ et $\vec{A} \wedge \vec{B} = -4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$.

Exercice 2. Etude d'une trajectoire

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel et $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le repère cartésien associé. On s'intéresse à la trajectoire d'un point M décrit par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et on note $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs de la base associée. Les coordonnées sont fonctions du temps et sont données par :

$$\rho(t) = 1 + t, \quad \theta(t) = t, \quad \text{et} \quad z(t) = t, \quad t \geq 0.$$

a. Déterminer l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires.

Réponse : $\vec{v} = \vec{e}_\rho + (1+t)\vec{e}_\theta + \vec{e}_z$ et $v = \sqrt{t^2 + 2t + 3}$

b. Déterminer l'expression du vecteur accélération en coordonnées polaires.

Réponse : $\vec{a} = -(1+t)\vec{e}_\rho + 2\vec{e}_\theta$

c. Déterminer l'accélération tangentielle à partir du vecteur tangent unitaire $\vec{T}$.

Réponse : $a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{1+t}{\sqrt{t^2+2t+3}}$

d. Déterminer l'accélération tangentielle à partir de la norme de la vitesse.

Réponse : $a_T = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sqrt{t^2+2t+3})}{\mathrm{d}t} = \frac{1+t}{\sqrt{t^2+2t+3}}$

e. Déterminer l'accélération normale. Comment obtenir le rayon de courbure ?

Réponse : $a_N = \sqrt{||\vec{a}||^2 - a_T^2} = \frac{\sqrt{t^4+4t^3+11t^2+14t+14}}{\sqrt{t^2+2t+3}}$ et $R = v^2/a_N$

f. Indiquer comment calculer la longueur de la trajectoire de $t = 0$ à $t = 1$s.

Réponse : $L = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 2t + 3}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3. Traversée d'une rivière

Un bateau veut traverser une rivière de largeur L. Sa vitesse par rapport à l'eau est de norme constante v, la vitesse du courant est une constante V. On considère deux trajectoires possibles : la première correspond au chemin le plus court (segment AB), la deuxième correspond au temps le plus court (segment AC).

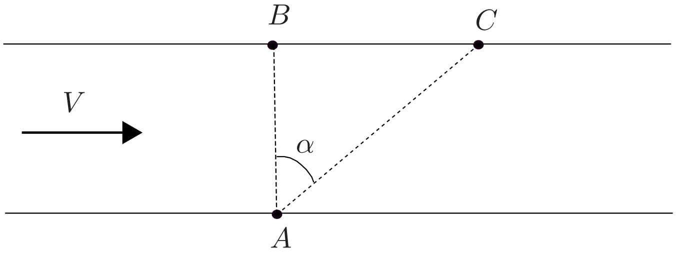

FIGURE 1 – Traversée d'une rivière.

a. Déterminer le temps du trajet AB.

Réponse : Le diagramme des vitesses s'écrit $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{V}$ et $\|\vec{v}_r\| = v$.

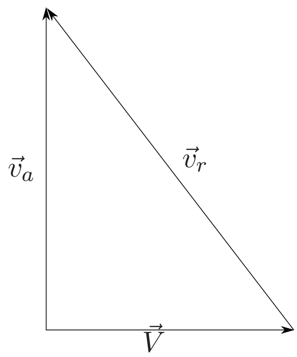

FIGURE 2 – Diagramme des vitesses pour le trajet le plus court en distance, cad $\vec{v}_a$ est **vertical**.

On trouve $v_a = \|\vec{v}_a\| = \sqrt{v^2 - V^2}$ et donc $t_{AB} = L/v_a$.

b. Déterminer le temps du trajet AC.

Réponse : Dans ce cas il faut que $\vec{v}_r$ soit **vertical**.

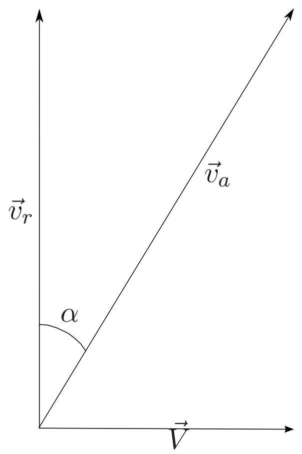

FIGURE 3 – Diagramme des vitesses pour le trajet le plus court en temps.

On trouve directement $t_{AC} = L/v$.

c. Dans ce dernier cas, combien de temps faut-il au bateau pour remonter la rivière et revenir au point B ?

Réponse : On voit que

$$\tan\alpha = \frac{BC}{L} = \frac{V}{v}$$

D'où

$$t_{CB} = \frac{BC}{v-V} = L\frac{V}{v(v-V)}$$

d. Que se passe t-il lorsque V est plus grand que v ?
Dans ce cas, il est impossible d'effectuer le trajet AB et le bateau ne peut pas remonter la rivière. Par contre il peut quand même traverser la rivière.