

**Exercice 1. Bilans de conservation**

On considère le mouvement d'un milieu déformable (un solide ou un fluide) et on s'intéresse à une quantité  $G$  (masse, chaleur, énergie, quantité de mouvement...) dont on note  $g$  la densité par unité de volume. On définit un volume de contrôle  $\Omega$  arbitraire de frontière  $\Gamma$ . La forme générale d'un bilan de conservation peut s'écrire :

$$\frac{dG}{dt} + \int_{\Gamma} p \, d\Gamma = \int_{\Omega} f \, d\Omega .$$

Interprétez le sens physique de chaque terme. En déduire l'expression générale d'une loi de conservation.

Démontrez l'expression suivante utilisée en cours :

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div}(\mathbf{V}) .$$

Démontrez la symétrie du tenseur des contraintes :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

**Exercice 2. Lois de comportement**

Pour un solide, la loi de comportement la plus simple est l'élasticité linéaire. Formulez la loi de comportement et les hypothèses associées à ce modèle.

Pour un fluide, rappelez la définition d'un fluide newtonien et donnez la loi de comportement.

1. Demo loi cons.
2. Exemple
3. Calcul indicial /  $\nabla$
4.  $\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div}(\mathbf{V})$

TD2

**Exercice 1. Équation des ondes**

On s'intéresse aux ondes acoustiques dans un fluide. Rappelez les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ainsi que la loi de comportement d'un fluide newtonien.

Indiquez la signification des hypothèses suivantes et modifiez les équations précédentes en conséquence :

- fluide parfait,
- transformation isentropique,
- petites perturbations.

Formulez l'hypothèse des petites perturbations pour un fluide en écoulement uniforme. Linéarisez les équations générales afin d'aboutir à l'équation des ondes dans un écoulement uniforme.

Pour l'équation des ondes classique (sans écoulement), formulez les conditions aux limites suivantes

- pression imposée,
- vitesse ou déplacement imposés,
- impédance.

Pour un conduit acoustique, on peut utiliser un modèle uni-dimensionnel où la pression acoustique n'est plus fonction que d'une seule variable d'espace, par exemple  $p(x, t)$  (cette approximation est valable en basse fréquence et lorsque le domaine acoustique possède une direction beaucoup plus grande que les autres). Écrivez l'équation des ondes pour ce cas particulier ainsi que les conditions aux limites associées.

**Exercice 2. Vibrations d'une barre**

Une barre est une structure uni-dimensionnelle (de section  $A$  et de longueur  $L$ ) où seuls les déplacements et déformations longitudinaux sont possibles (c'est-à-dire que les déplacements transversaux, les efforts tranchant et les moments de flexion sont considérés nuls). Le matériau considéré est élastique linéaire de module d'Young  $E$ .

Appliquez le Principe Fondamental de la Dynamique à un morceau de barre situé entre  $x$  et  $x + dx$ . En déduire l'équation différentielle régissant les vibrations dans la barre.

Formuler les conditions aux limites possibles.

Comparez les résultats obtenus avec ceux d'un conduit acoustique.

Stop

**Exercice 3. Vibrations d'une poutre**

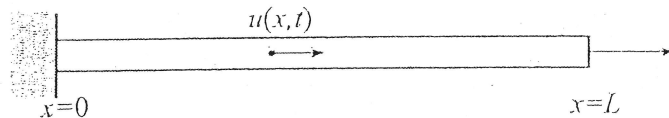
Une poutre est une structure uni-dimensionnelle (de section  $A$  et de longueur  $L$ ) où seuls les déplacements et déformations longitudinaux sont possibles (c'est-à-dire que les déplacements et les efforts longitudinaux sont considérés nuls). Le matériau considéré est élastique linéaire de module d'Young  $E$ .

Appliquez le Principe Fondamental de la Dynamique à un morceau de poutre situé entre  $x$  et  $x + dx$ . En déduire l'équation différentielle régissant les vibrations dans la poutre.

Formuler les conditions aux limites possibles.

**Exercice 1. Modes propres d'une barre fixe-libre**

On considère une barre de longueur  $L$  et de section  $A$ . On note la masse volumique  $\rho$  et le module d'Young  $E$ . L'extrémité  $x = 0$  est fixée et l'extrémité  $x = L$  est libre.

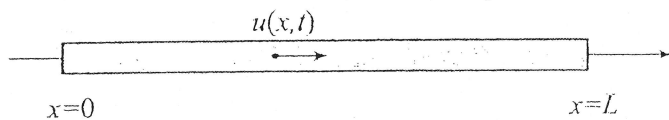


Calculez les déformées des modes propres de cette barre en suivant les étapes suivantes :

- Donnez l'équation du mouvement de la barre.
- Formulez les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $L$ .
- Cherchez une solution de la forme  $u(x, t) = v(x)q(t)$  (séparation des variables), en déduire le Problème aux Valeurs Propres (P.V.P.).
- Calculez les solutions du Problème aux Valeurs Propres.
- Normalisez les modes propres.
- Vérifiez l'orthogonalité des modes propres.

**Exercice 2. Modes propres d'une barre libre-libre**

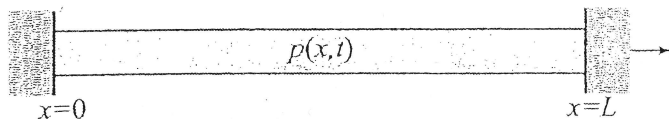
On considère une barre de longueur  $L$  et de section  $A$ . On note la masse volumique  $\rho$  et le module d'Young  $E$ . Les deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  sont libres.



Calculez les modes propres de cette barre et identifier les modes de corps rigide.

**Exercice 3. Modes propres d'un conduit acoustique fermé**

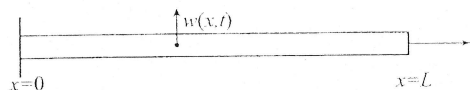
On considère un conduit acoustique de longueur  $L$  et de section  $A$ . Les deux extrémités du conduit sont fermées. On note  $\rho_0$  la densité du fluide et  $c_0$  la célérité du son.



Calculez les modes propres de ce conduit acoustique.

**Exercice 1. Modes propres d'une poutre encastrée-libre**

On considère une poutre de longueur  $L$ , de section  $A$  et de moment quadratique  $I$ . On note la masse linéique  $\rho$  et le module d'Young  $E$ . L'extrémité  $x = 0$  est encastrée et l'extrémité  $x = L$  est libre.

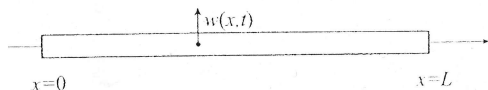


Calculez les déformées des modes propres de cette poutre en suivant les étapes suivantes :

- Donnez l'équation du mouvement.
  - Formulez les conditions aux limites.
  - Chercher une solution de la forme  $w(x,t) = v(x)q(t)$  (séparation des variables), en déduire le Problème aux Valeurs Propres (P.V.P.).
  - Calculez les solutions du Problème aux Valeurs Propres.
  - Normalisez les modes propres.
  - Vérifiez l'orthogonalité des modes propres.
- formellement* ✓

**Exercice 2. Modes propres d'une poutre libre-libre**

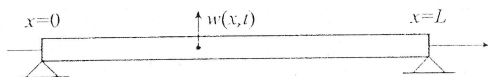
On considère une poutre de longueur  $L$ , de section  $A$  et de moment quadratique  $I$ . On note la masse linéique  $\rho$  et le module d'Young  $E$ . Les deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  sont libres.



Calculez les modes propres de cette poutre et identifier les modes de corps rigide.

**Exercice 3. Modes propres d'une poutre simplement appuyée**

On considère une poutre de longueur  $L$ , de section  $A$  et de moment quadratique  $I$ . On note la masse linéique  $\rho$  et le module d'Young  $E$ . Les deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  sont simplement appuyées.



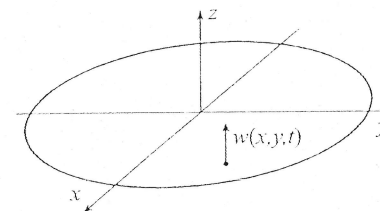
Calculez les modes propres de cette poutre et identifier les modes de corps rigide.

**Exercice 4. Modes propres d'une membrane circulaire**

On considère une membrane circulaire de rayon  $R$  dont le bord est fixé. Les vibrations transversales de cette membrane sont caractérisées par l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0.$$

La vitesse des ondes est fonction de la densité du matériau et de la tension exercée dans la membrane. Calculez les modes propres de cette membrane.

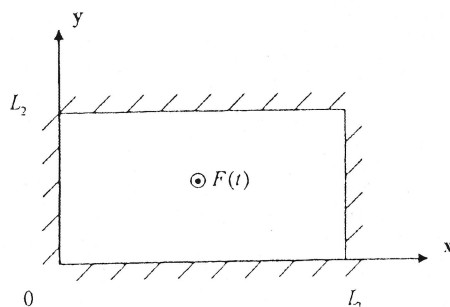


TD 4

## Exercice 4. Vibrations d'une membrane

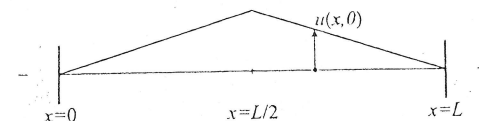
On considère une membrane rectangulaire fixée sur tout le contour  $S$  et soumise à une tension constante  $T$ . Un effort normal au plan est appliqué en un point  $\vec{x}_0$ , situé au centre de la membrane. On considère que la force  $F(t)$  exercée, est ponctuelle et périodique :

$F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ . Calculez la réponse de la membrane à cette sollicitation.



## Exercice 1. Vibrations d'une corde

On considère une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités. Cette corde est tendue en son centre où le déplacement est  $A$ . La corde est lâchée à l'instant  $t = 0$ .

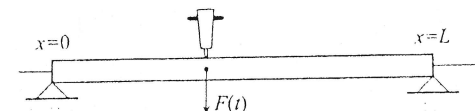


Calculez le mouvement de la corde en suivant les étapes suivantes :

- Donnez l'équation du mouvement, les conditions aux limites et les conditions initiales.
- Formulez et résolvez le problème aux valeurs propres.
- En utilisant la décomposition modale, obtenez les équations caractérisant les amplitudes modales.
- Calculez les amplitudes modales et donnez l'expression générale de la solution.

## Exercice 2. Un marteau-piqueur sur un pont

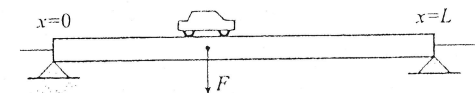
On considère un pont de longueur  $L$  que l'on modélise comme une poutre en appui simple de section  $A$  et de moment quadratique  $I$ . On note  $\rho$  et  $E$  la masse linéique et le module d'Young du béton. Un marteau-piqueur est utilisé sur le pont en  $x = x_0$ . On considère que ce marteau-piqueur exerce une force ponctuelle périodique de pulsation  $\omega_0$  et d'amplitude  $F_0$ , c'est-à-dire  $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ .



Calculez les vibrations du pont et discutez les propriétés de la solution en fonction de la position  $x_0$  du marteau-piqueur et de sa fréquence  $\omega_0$ .

## Exercice 3. Une voiture sur un pont

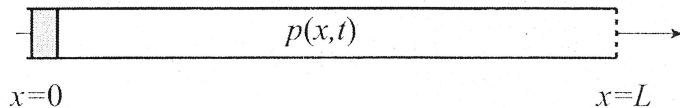
On considère un pont de longueur  $L$  que l'on modélise comme une poutre en appui simple de section  $A$  et de moment quadratique  $I$ . On note  $\rho$  et  $E$  la masse linéique et le module d'Young du béton. Une voiture roule sur le pont avec une vitesse constante  $V$  (elle passe en  $x = 0$  à l'instant  $t = 0$ ). Le poids de la voiture exerce sur le pont une force  $F$  considérée ponctuelle.



Calculez la réponse du pont au passage de la voiture. Discutez les propriétés de la solution en fonction de la vitesse  $V$  du véhicule.

**Exercice 1. Un piston dans un conduit acoustique**

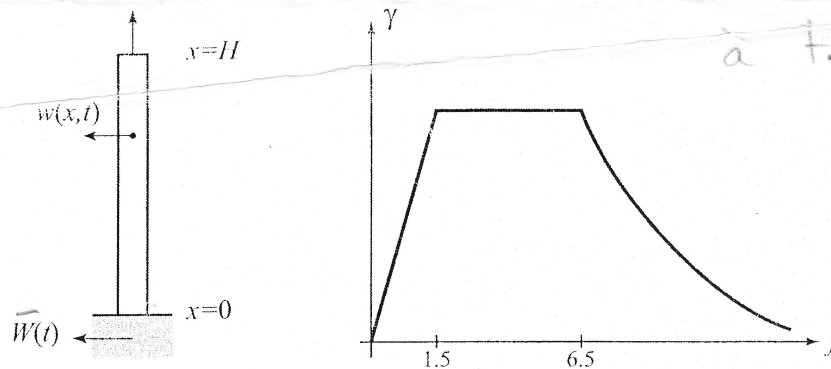
On considère un conduit acoustique de longueur  $L$ . On note  $\rho_0$  et  $c_0$  la densité du fluide et la vitesse du son dans le fluide. L'extrémité droite ( $x = L$ ) du conduit est ouverte sur un volume infini de fluide. À l'extrémité gauche ( $x = 0$ ), le conduit est fermé par un piston mobile dont le mouvement est caractérisé par son accélération  $\gamma(t)$ . À l'instant initial, le système est au repos et on considère que le mouvement du piston débute à  $t = 0$ , c'est-à-dire  $\gamma(t) = 0$  pour  $t < 0$ .



Calculez le champ de pression acoustique généré par le mouvement du piston. Donnez la solution générale pour un mouvement harmonique  $\gamma(t) = A \sin(\Omega t)$ .

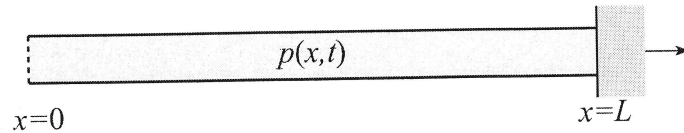
**Exercice 2. Un tremblement de terre**

Un immeuble est modélisé comme une poutre de hauteur  $H$  de section  $A$  et de moment quadratique  $I$ . On note  $\rho$  et  $E$  la masse linéique et le module d'Young équivalents du bâtiment. On considère que le bâtiment est encastré dans le sol. Un tremblement de terre génère un mouvement horizontal du sol caractérisé par son déplacement aléatoire  $W(t)$  dont le spectre de l'accélération est donné ci-dessous. Calculez les vibrations du bâtiment. Quels sont les modes les plus sollicités (cf. figure).



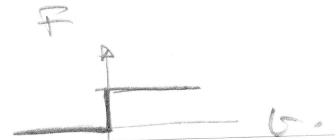
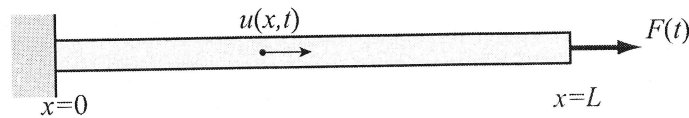
### Exercice 3. Le conduit auditif

On modélise le conduit auditif de l'oreille externe comme un tube rigide de section  $A = 60 \text{ mm}^2$ , de longueur  $L = 27 \text{ mm}$ , et fermé à une extrémité par le tympan. On note  $\rho_0$  et  $c_0$  la densité du fluide et la vitesse du son dans le fluide. À l'extrémité ouverte, le milieu extérieur impose une pression acoustique définie par  $P \sin(\Omega t)$ . Calculez le champ de pression dans le conduit auditif.



### Exercice 4. Choc sur une barre

On considère une barre de longueur  $L$  et de section  $A$ . Cette barre est fixée en  $x = 0$ , une force  $F(t)$  est exercée sur l'autre extrémité. On note  $\rho$  et  $E$  la masse linéique et le module d'Young du matériau. La force correspond à un chargement brutal de la barre :  $F(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $F(t) = F_0$  pour  $t \geq 0$ . Calculez le champ de déplacement dans la barre.



$\partial^2 u(x,t)$