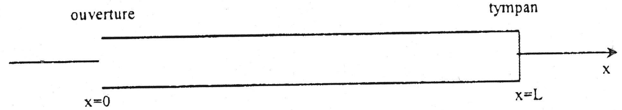
PS10 - A02 - EXAMEN PARTIEL

Durée : 2 heures.
Sans document ; calculatrice autorisée.

Exercice 1
On modélise le conduit auditif de l'oreille externe comme tube rigide de section $A = 60\text{mm}^2$ de longueur $L = 27\text{mm}$ fermé à une extrémité par le tympan. Ce tube contient un fluide parfait de densité $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$ et de célérité $c = 340\text{m/s}$:

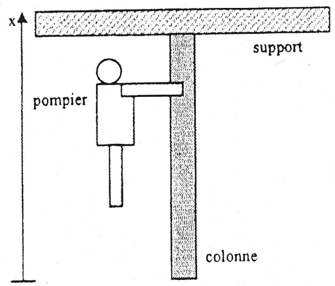


La pression dans le tube est donnée par :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 .$$

1. Écrire les conditions aux limites du problème.
2. Écrire le problème aux valeurs propres associés. Déterminer les fréquences propres (donner les valeurs des 4 premières) et les modes propres normalisés du tube.
3. En $x = 0$ le milieu extérieur impose une pression acoustique donnée par
$$p(t) = P\sin(\Omega t)$$
Trouver la réponse acoustique dans le tube. Exprimer la force exercée sur le fond rigide du tube. Commenter l'évolution des amplitudes modales en fonction de la pulsation Ω.

Exercice 2
Un pompier prend une colonne sèche de descente rapide à partir de l'instant $t = 0$ le long de laquelle il va glisser avec une vitesse constante pendant un temps $T = 3\pi/2$.



La colonne est un cylindre de section circulaire $A = 300\text{cm}^2$ et de longueur $L = 6\text{m}$. Cette colonne est en bronze (module d'Young $E = 1{,}1.10^{11}\text{N/m}^2$, densité $\rho = 8300\text{Kg/m}^3$). La colonne est uniquement fixée au plafond. Le poids du pompier est de 600N.

1. Écrire les équations du mouvement de traction-compression de cette colonne ainsi que les conditions aux limites associées.
2. Écrire le problème aux valeurs propres et déterminer les fréquences propres et modes propres normalisés.
3. Calculer la réponse de la colonne en déplacement et en contrainte.

Rappels
L'équation d'équilibre d'une barre en traction-compression s'écrit :

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f$$

$$\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x}$$

La réponse de l'oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{q} + c\dot{q} + \omega^2 q = f$$

a pour expression :

$$q(t) = \left[\frac{\dot{q}(0) + \xi\omega q(0)}{\omega_R}\sin(\omega_R t) + q(0)\cos(\omega_R t)\right]\exp(-\xi\omega t)$$
$$+\frac{1}{\omega_R}\int_0^t f(\tau)\sin\left[\omega_R(t-\tau)\right]\exp\left(-\xi\omega(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

avec $\omega_R = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ et $\xi = \dfrac{c}{2\omega}$.

Quelques résultats de trigonométrie :

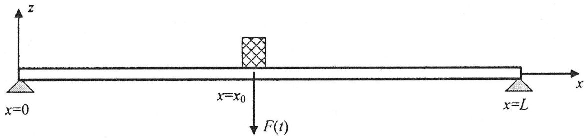
$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} ,$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} .$$

PS10 - A03 - EXAMEN PARTIEL

Durée : 2 heures.
Sans document ; calculatrice autorisée.

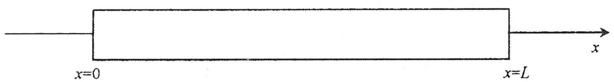
Exercice 1
On considère une passerelle de longueur $L = 6\text{m}$ qui est modélisée comme une poutre en appui simple. Une machine, disposée en $x = x_0$, exerce une force ponctuelle $F(t)$ sur la passerelle.



La masse linéique de la passerelle est m=100kg/m, le moment d'inertie est $I=10^{-4}\text{m}^4$, et le module d'Young $E=7{,}1.10^{+10}\text{N/m}^2$.

1. Rappelez les hypothèses du modèle de poutre
2. Ecrivez l'équation du mouvement de flexion de la passerelle ainsi que les conditions aux limites associées.
3. Formulez le problème aux valeurs propres. Déterminez les expressions des modes propres normalisés.
4. Calculez la réponse de la passerelle pour une force ponctuelle harmonique $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$. Mettre en évidence les fréquences propres des modes (donnez les valeurs des 4 premières).
5. En réalité, la force exercée est aléatoire et son spectre est compris entre 30 et 150Hz Indiquez, par un raisonnement qualitatif, quels modes propres seront sollicités.
6. Pour ces modes propres, proposez des emplacements x_0 pour positionner la machine afin de réduire les vibrations.

Exercice 2
On considère un conduit acoustique de longueur L fermé aux deux extrémités. Ce conduit est rempli d'un fluide parfait de densité ρ et la célérité du son est c.



A partir de l'instant t=0, l'ensemble du tube subit une accélération $a(t)$ harmonique de pulsation Ω et d'amplitude A :

$$a(t) = A\sin(\Omega t) .$$

1. Écrivez l'équation qui caractérise la pression $p(x,t)$ dans le tube et donnez les conditions aux limites associées.
2. Formuler le problème aux valeurs propres associés. Déterminez les fréquences propres et les modes propres normalisés du tube.
3. Exprimez les conditions initiales en sachant qu'à l'instant initial t=0 le fluide n'est pas déformé et que $p(x,0)$=0.
4. Déterminez la réponse acoustique dans le conduit.

Rappels
L'équation d'équilibre d'une poutre s'écrit :

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f$$

$$T = -\frac{\partial M}{\partial x} \ , M = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

La réponse de l'oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{q} + c\dot{q} + \omega^2 q = f$$

a pour expression :

$$q(t) = \left[\frac{\dot{q}(0) + \xi\omega q(0)}{\omega_R}\sin(\omega_R t) + q(0)\cos(\omega_R t)\right]\exp(-\xi\omega t)$$

$$+\frac{1}{\omega_R}\int_0^t f(\tau)\sin\left[\omega_R(t-\tau)\right]\exp(-\xi\omega(t-\tau))\mathrm{d}\tau$$

avec $\omega_R = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ et $\xi = \dfrac{c}{2\omega}$.

Quelques résultats de trigonométrie :

$$\int \sin(ax)\sin(bx+c)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax-bx-c)}{2(a-b)} - \frac{\sin(ax+bx+c)}{2(a+b)} ,$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx+c)\mathrm{d}x = -\frac{\cos(ax-bx-c)}{2(a-b)} - \frac{\cos(ax+bx+c)}{2(a+b)} .$$

$$\int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax) + ax\sin(ax)}{a^2}$$

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{a^2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

Examen Médian PS10 - A08

Durée : 2 heures.
Sans document; calculatrice autorisée.

Exercice 1

On considère une barre de longueur L et de section A. On note ρ la masse volumique et E le module d'Young. La barre est encastrée en $x = L$ (Fig. 1). A partir de l'instant $t = 0$, la barre est soumise à un déplacement imposé $U(t)$ à l'extrémité gauche $x = 0$. On rappelle l'équation dynamique d'une barre en traction-compression (sans terme source):

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Le champ de contrainte longitudinal est donné par $\sigma = E\partial u/\partial x$.

(1) Donner l'expression de la célérité c des ondes longitudinales.

(2) Écrire le Problème aux Valeurs Propres (PVP) pour la barre encastrée-encastrée. Déterminer les fréquences propres et les modes propres normalisés $v_n(x)$.
Montrez l'orthogonalité des modes.

Afin de vérifier les conditions aux limites non homogènes, on introduit une fonction auxiliaire $g(x,t)$ et on cherche la solution du problème sous la forme:

$$u(x,t) = \sum_n v_n(x) q_n(t) + g(x,t)$$

(3) Déterminer $g(x,t)$.

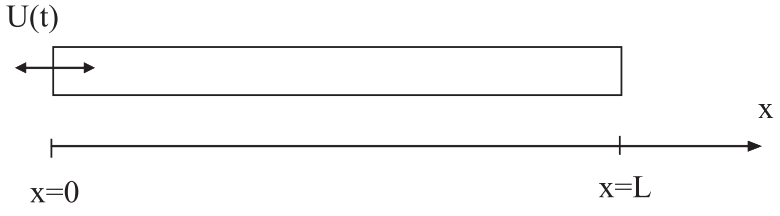


Fig. 1.

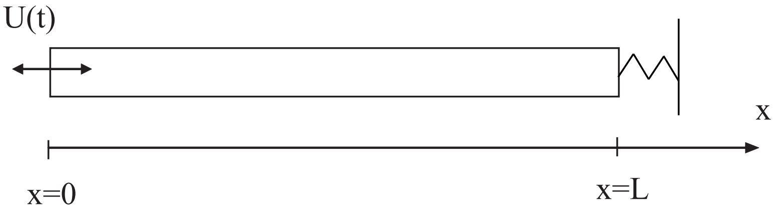


Fig. 2.

(4) Le déplacement imposé est sinusoidal de pulsation Ω, $U(t) = U_0 \sin(\Omega t)$. Initialement, on considère que la barre est au repos et non deformée. Calculer la réponse de la barre. Que se passe t-il lorsque la pulsation imposée est très voisine d'une des pulsations propres de la barre ?

On suppose maintenant que Ω est très proche de la première pulsation propre. Pour évitez la résonance, on rajoute un ressort de raideur K à l'extremité droite de la barre $(x = L)$(Fig. 2). Lorsque la barre n'est pas deformée, le ressort n'est pas contraint.

(5) Montrez que cela revient à imposer une condition au limite du type:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -\alpha\, u(L,t)$$

ou α est une constante (positive) dépendante des paramètres du problème.

(6) Écrire le nouveau Problème aux Valeurs Propres en tenant compte de cette relation. Montrez graphiquement que la première fréquence propre est nécessairement inférieure à celle de la barre encastrée-encastrée. Commentez l'intérêt de ce dispositif.

Exercice 2

On considère un pont de longueur L que l'on peut modéliser comme une poutre en appui simple de section A et de moment quadratique I. On note ρ_L et E la masse linéique et le module d'Young. On rappelle l'équation dynamique de la poutre:

$$\rho_L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f.$$

L'effort tranchant et le moment sont donnés respectivement par $T = -\partial M/\partial x$ et $M = EI\partial^2 w/\partial x^2$. Une voiture roule avec une vitesse constante V, elle passe en $x = 0$ à l'instant $t = 0$ (Fig. 3). Le poids de la voiture (de masse m) éxerce sur le pont une force F considérée ponctuelle (au point noté $x_0(t)$).

(1) Écrire le Problème aux Valeurs Propres pour la poutre en appui simple. Déterminer les fréquences propres et montrez que les modes propres normalisés $v_n(x)$ sont identiques à ceux de l'Exercice 1.

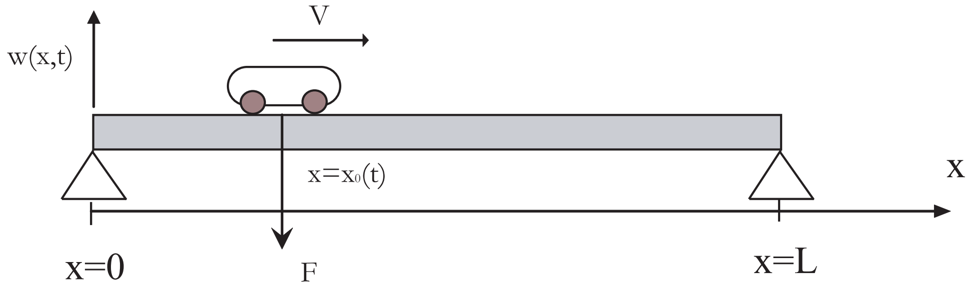


Fig. 3.

(2) Donner l'expression du terme de droite f en fonction des données du problème.

(3) Calculer la réponse du pont. Quelles sont les vitesses V à éviter ?

On suppose maintenant que la chaussée est légèrement déformée (en forme de tôle ondulée de période Λ). Ceci a pour effet d'ajouter à la force F une force oscillatoire de la forme $F_0 \sin(\Omega t)$.

(4) Calculer la nouvelle réponse du pont (dans ce cas, ne pas calculer explicitement les intégrales de Duhamel).

Rappels

La réponse de l'oscillateur harmonique $\ddot{q} + \omega^2 q = h$ a pour expression:

$$q(t) = q(0)\cos\omega t + \dot{q}(0)\frac{\sin\omega t}{\omega} + \int_0^t h(\tau)\frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega}\,d\tau$$

Quelques résultats de trigonométrie:

$$\int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\left(\sin(ax) - ax\cos(ax)\right)$$

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\left(\cos(ax) + ax\sin(ax)\right)$$

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\omega(t-\tau))d\tau = \frac{\Omega\sin(\omega t) - \omega\sin(\Omega t))}{\Omega^2 - \omega^2}$$

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \quad , \quad \sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$