

## Accélération des simulations de Monte Carlo par la méthode SLDL<sup>T</sup>

Pierre Villon, Jean-Luc Dulong, Alban Notin

### Principe SLDL<sup>T</sup>

**Idée :** Modifier la décomposition LDL<sup>T</sup> utilisée par les codes de calcul éléments finis.

**Principe :** Stochastic LDL<sup>T</sup> (**SLDL<sup>T</sup>**) reporte l'aléa sur la diagonale de la décomposition LDL<sup>T</sup>.

**Formulation :**  $\theta$  symbolise l'aléa – Moyenne  $\theta_0$ , Variance  $\Sigma$

✓ Cas Général :

$$\mathbf{K}^{exacte}(\theta) = \mathbf{L}(\theta)\mathbf{D}(\theta)\mathbf{L}^T(\theta)$$

✓ Hypothèse SLDL<sup>T</sup> :

$$\mathbf{K}^{app}(\theta) = \mathbf{L}(\theta_0)\mathbf{D}(\theta)\mathbf{L}^T(\theta_0) = \mathbf{L}_0\mathbf{D}(\theta)\mathbf{L}_0^T$$

**Notation :**  $\mathbf{D}(\theta) = \text{diag}(d(\theta))$

**Problème d'optimisation :** trouver les meilleurs coefficients  $d(\theta)$

$$J(d(\theta)) = \frac{1}{2} \text{Argmin} \|\mathbf{K}^{exacte}(\theta) - \mathbf{K}^{app}(\theta)\|_F^2$$

**Système à résoudre :**

$$\mathbf{A}d(\theta) = \mathbf{b}(\theta)$$

**Remarques :**

- I. Structure matrices **A** et **K** identique;
- II. **A** indépendante de  $\theta$ ;
- III. Solution explicite.

### Justification

**Consistance & ordre de convergence :**

➢ On montre que :

$$\mathbb{E}\{J(d(\theta))\} = (\Sigma, \mathbf{Q})_F$$

➢ Consistance :

$$\Sigma \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbb{E}\{J(d(\theta))\} \rightarrow 0$$

➢ Convergence :

$$O(\|\Sigma\|)$$

**Évaluation des moments statistiques :**

**Moyenne**

$$\bar{\mathbf{u}} = \int_{\theta} \mathbf{u}(\theta) dp \theta$$

$$(\bar{\mathbf{u}})_i = \mathbf{L}_0^{-T} \left( \int_{\theta} \frac{dp \theta}{d_i(\theta)} \right) \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{f}$$

**Variance-covariance**

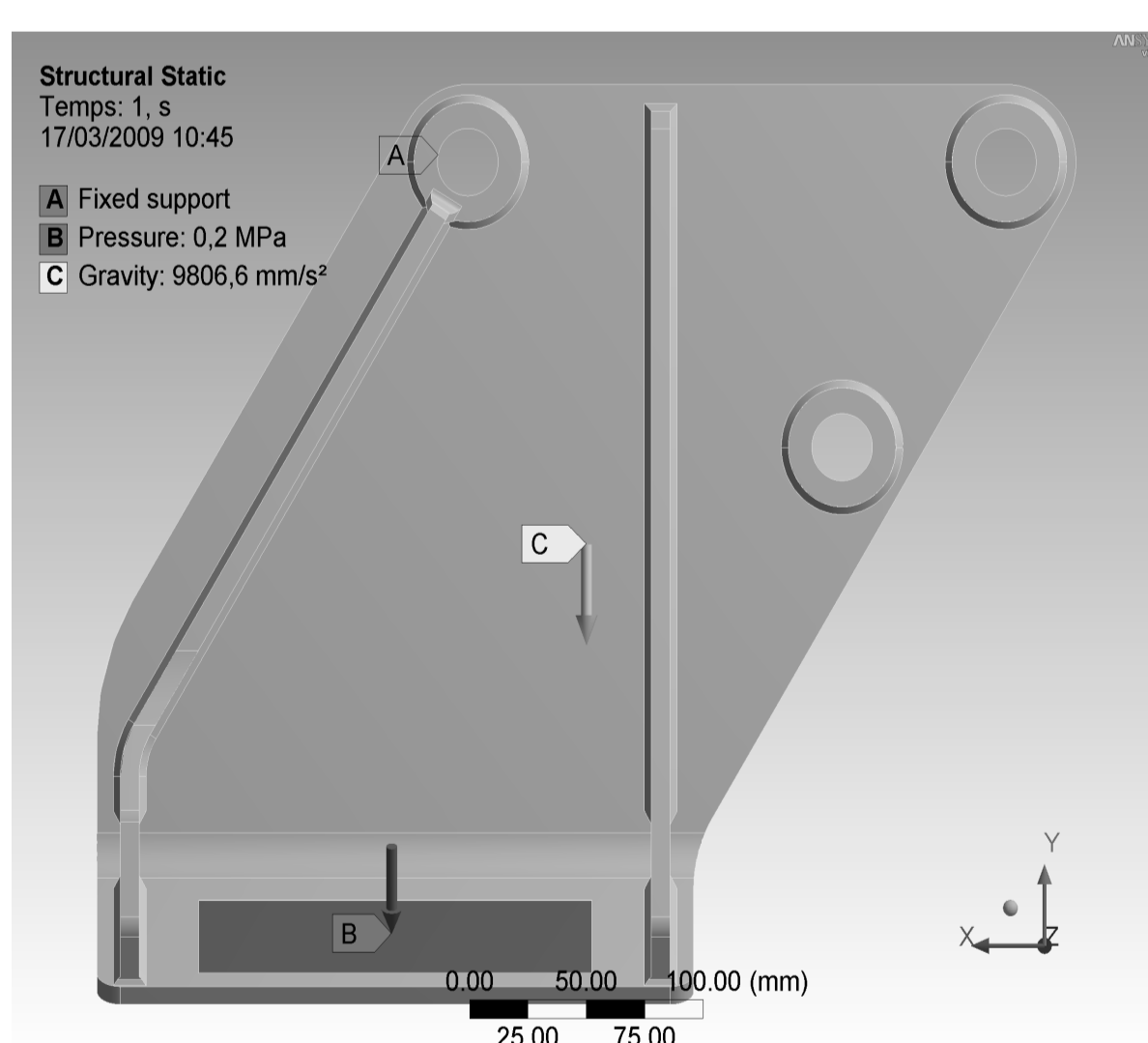
$$\Sigma_u = \int_{\theta} (\mathbf{u}(\theta) - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u}(\theta) - \bar{\mathbf{u}})^T dp \theta$$

$$= \mathbf{L}_0^{-T} \mathbf{C}_d \mathbf{L}_0^{-1} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T$$

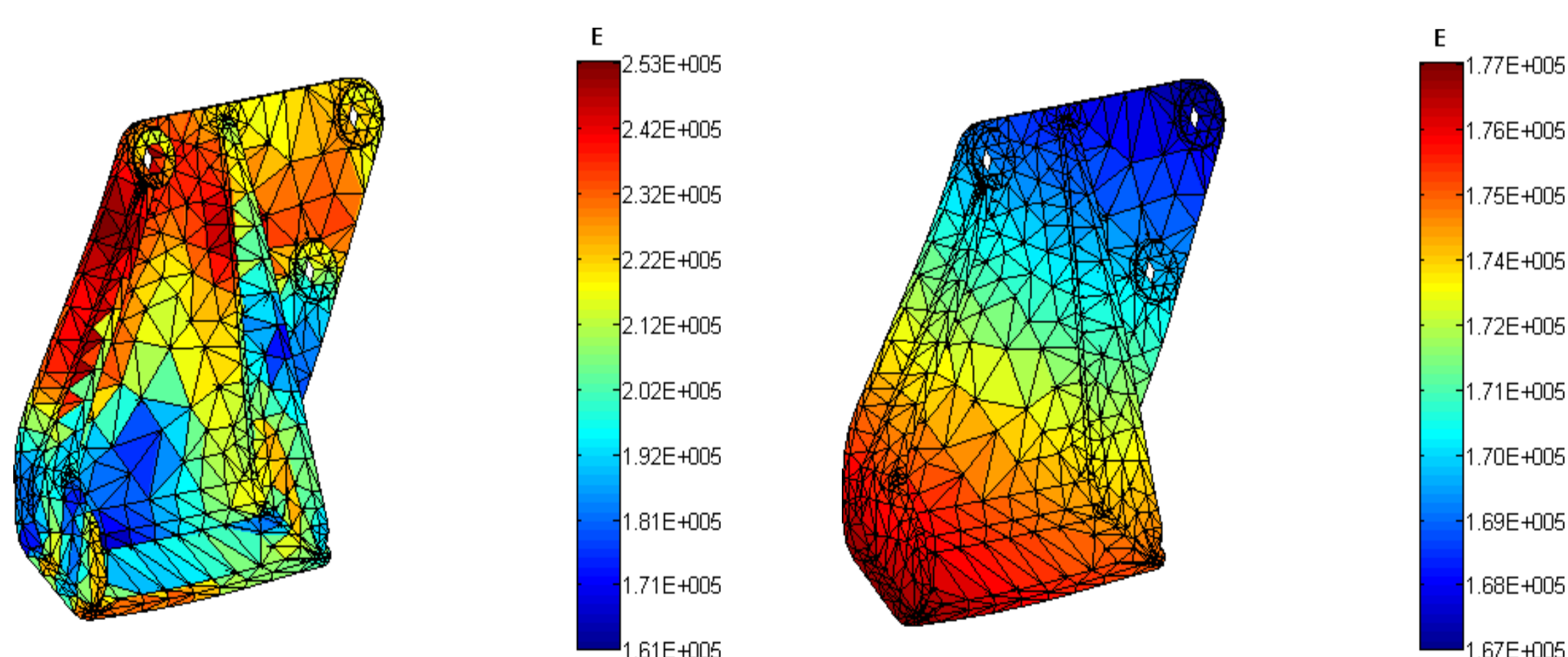
### STATIQUE : Champ de module d'Young aléatoire

**Cas d'étude :**

➢ Support de fixation de bogie



➢ Illustration du champ de module d'Young



**Résultats solveur:**

➢ Monte Carlo SLDL<sup>T</sup> / Monte Carlo classique

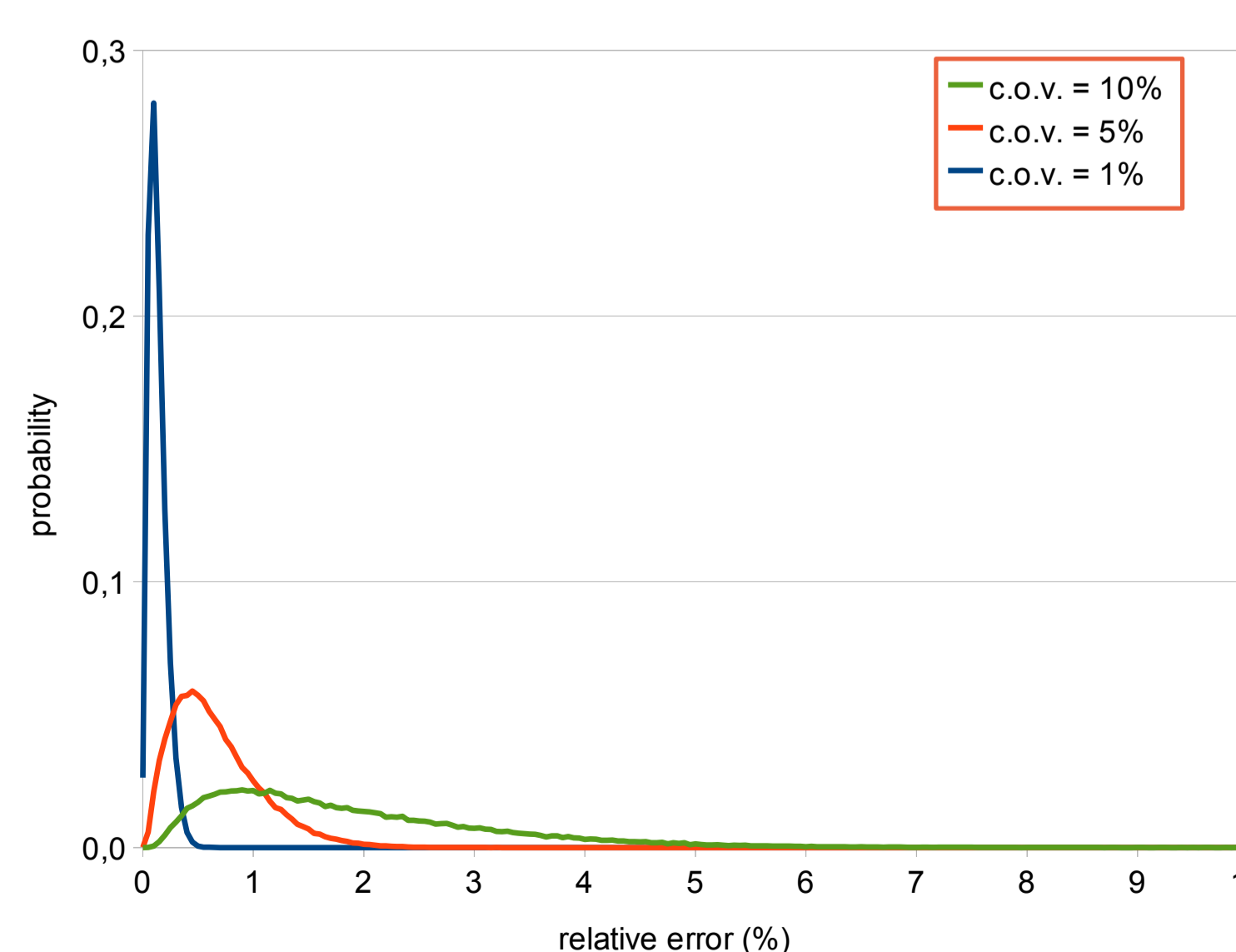
**Moyenne et écart-type**

Err (%)	$C_v = 1\%$	$C_v = 5\%$	$C_v = 10\%$
$m(u)$	0.0	0.05	0.18
$\sigma(u)$	2.8	3.14	3.25

**Temps de calcul**

Monte Carlo	SLDL <sup>T</sup>	Gain
5 h 30 min	2 min	180

➢ Distribution de l'erreur relative (%)



SUPPORTED BY  
**ANR**

MatetPro 2007  
Projet APPRoFi