

Université de technologie de Compiègne - Proposition de thèse

1^{re} partie : Fiche scientifique	
Intitulé de la thèse	Modélisation et commande de structures magnéto-mécaniques déformables destinées à la robotique souple à actionnement distribué.
Type de financement	Allocation MESR
Laboratoire d'accueil	unité de recherche : Roberval équipe de recherche : site web : https://roberval.utc.fr
Directeur(s) de thèse	Arnaud Hubert (Professeur des Universités, HDR)
Domaines de compétence	Sciences pour l'ingénieur Informatique, électronique Mathématiques appliquées
Description du sujet de thèse	<p>De nombreuses applications en robotique, notamment dans le secteur de la santé, des dispositifs biomédicaux et de la chirurgie mini-invasive, nécessitent la conception de robots toujours plus intégrés, compacts et dextres. Pour ce type d'applications, les robots dits souples sont une alternative prometteuse car ils présentent des avantages indéniables en termes de miniaturisation, de flexibilité et capacité à réaliser des tâches impossibles en robotique conventionnelle. S'ils présentent de nombreux avantages, ces robots présentent aussi des limites qui restreignent leur développement et leur diffusion dans le cadre d'applications réelles. Les limites à leur utilisation reposent essentiellement sur la difficulté à les modéliser correctement et donc, par la même occasion, à la difficulté à les commander/contrôler avec efficacité. Dans ce cadre, cette thèse de doctorat propose un sujet de recherche en lien avec le développement de la robotique souple à actionnement magnétique distribué. Plus précisément, l'objectif est de travailler sur les difficultés et les limites à la diffusion de ces systèmes en proposant des avancées notables, voire des ruptures scientifiques, dans le domaine de la modélisation des robots souples. En particulier, les thématiques de recherche abordées dans ce travail de thèse concerneront la modélisation multiphysique de ces structures souples lors d'un actionnement magnétique distribué dans tout leur corps. Il sera également question de la prise en compte des grands déplacements dans la modélisation de la déformation qui caractérisent cette famille de robot. Ces grands déplacements sont rendus possibles grâce à la souplesse intrinsèque des matériaux utilisés dans la conception. Les résultats et les contributions scientifiques de ce travail de recherche devront permettre de proposer des avancées significatives dans le domaine de la modélisation pour permettre la conception de commandes robotiques plus adaptées et plus performantes. Ces avancées scientifiques permettront alors, dans un second temps, de répondre aux besoins de nouvelles applications de robotique médicale en termes d'intégration, de compacité et de dextérité.</p>
Mots clés	robotique souple, matériaux fonctionnalisés, robotique médicale, actionnement magnétique, modélisation multiphysique, structures déformables en grand déplacement.
Profil et compétences du candidat	<ul style="list-style-type: none"> - Motivation, implication et une certaine autonomie. - Compétences multidisciplinaires en sciences pour l'ingénieur : ingénierie électrique et mécanique. - Intérêt pour la recherche et bonne maîtrise des outils mathématiques. - Connaissance de la modélisation et de la simulation numérique (éléments finis, analyse numérique). - Maîtrise des outils de la programmation et du calcul scientifique : Matlab,

	Python ou C++. - Des connaissances de base en « Intelligence Artificielle/Machine Learning », en « robotique » ou en « théorie du contrôle » seraient un plus. - Bonne maîtrise de l'anglais.
Date de début de la thèse	Octobre 2021
Lieu de travail de thèse	Le(la) candidat(e) à cette thèse de doctorat intégrera le laboratoire Roberval, équipe M2EI (mécatronique, énergie, électricité et intégration) de l'UTC.

2^e partie : Fiche de poste

Durée	36 mois
Possibilité missions complémentaires	Possibilité de participer à des missions d'enseignement au sein du département ingénierie mécanique de l'UTC (à définir avec le candidat)
Laboratoire d'accueil	Les activités de recherche du laboratoire Roberval (unité de recherche en mécanique, énergie et électricité) portent sur le développement des méthodes expérimentales et numériques innovantes pour l'analyse, la modélisation et la conception de structures et de systèmes complexes.
Moyens matériels	Bureau individuel ou collectif, ordinateur personnel, moyen de calcul (cluster et licences logiciels de calcul scientifique) + tous les moyens et services communs de l'unité Roberval.
Moyens humains	Le/La doctorant(e) intégrera le laboratoire Roberval et bénéficiera de tous les environnements scientifiques et techniques de cette unité de recherche.
Moyens financiers	En ce qui concerne les frais de fonctionnement de la thèse, un financement sur fonds propres et via un projet obtenu récemment (émergence SU) permettra de couvrir les besoins de la thèse. Ces ressources permettront l'achat des moyens informatiques, logiciels et matériels nécessaires au travail de recherche ainsi que le financement de la dissémination des résultats et des déplacements correspondants (réunions de travail, conférences, présentations scientifiques, écoles d'été, etc).
Modalités de travail	La thèse débutera par une formation du doctorant sur les différentes techniques numériques qui seront utilisées durant ses travaux de recherche. De même, des réunions entre le doctorant et ses encadrants seront planifiées régulièrement tout au long de l'état d'avancement des travaux de thèse.
Projet de recherche lié à cette thèse	Projet émergence SU (accepté à la fin du printemps 2021)
Collaboration(s) nationale(s)	Laboratoire ISIR à Sorbonne Université (Brahim Tamadazte, CR CNRS)
Collaboration(s) internationale(s)	Envisagée avec l'équipe du Prof. B. J. Nelson de l'ETHZ à Zurich, Suisse.
Thèse en cotutelle internationale	Non
Coordonnées de la personne à contacter	Prof. Arnaud Hubert, Tel : 03 44 23 44 20, E-mail : arnaud.hubert@utc.fr

Contactez d'abord le directeur de thèse avant de renseigner
un dossier de candidature en ligne sur <https://webapplis.utc.fr/admissions/doctorants/accueil.jsf>

Appel à sujets de thèse MESR 2021

Laboratoire Roberval

1- Informations générales

Nom et prénom du directeur de thèse : Arnaud Hubert

Intitulé du sujet de thèse : Modélisation et commande de structures magnéto-mécaniques déformables destinées à la robotique souple à actionnement distribué.

Mots clé : robotique souple, matériaux fonctionnalisés, robotique médicale, actionnement magnétique, modélisation multiphysique, structures déformables en grand déplacement.

Résumé du sujet :

De nombreuses applications en robotique, notamment dans le secteur de la santé, des dispositifs biomédicaux et de la chirurgie mini-invasive, nécessitent la conception de robots toujours plus intégrés, compacts et dextres. Pour ce type d'applications, les robots dits *souples* sont une alternative prometteuse car ils présentent des avantages indéniables en termes de miniaturisation, de flexibilité et capacité à réaliser des tâches impossibles en robotique conventionnelle. S'ils présentent de nombreux avantages, ces robots présentent aussi des limites qui restreignent leur développement et leur diffusion dans le cadre d'applications réelles. Les limites à leur utilisation reposent essentiellement sur la difficulté à les modéliser correctement et donc, par la même occasion, à la difficulté à les commander/contrôler avec efficacité. Dans ce cadre, cette thèse de doctorat propose un sujet de recherche en lien avec le développement de la *robotique souple à actionnement magnétique distribué*. Plus précisément, l'objectif est de travailler sur les difficultés et les limites à la diffusion de ces systèmes en proposant des avancées notables, voire des ruptures scientifiques, dans le domaine de la modélisation des robots souples. En particulier, les thématiques de recherche abordées dans ce travail de thèse concerneront la modélisation multiphysique de ces structures souples lors d'un actionnement magnétique distribué dans tout leur corps. Il sera également question de la prise en compte des grands déplacements dans la modélisation de la déformation qui caractérisent cette famille de robot. Ces grands déplacements sont rendus possible grâce à la souplesse intrinsèque des matériaux utilisés dans la conception. Les résultats et les contributions scientifiques de ce travail de recherche devront permettre de proposer des avancées significatives dans le domaine de la modélisation pour permettre la conception de commandes robotiques plus adaptées et plus performantes. Ces avancées scientifiques permettront alors, dans un second temps, de répondre aux besoins de nouvelles applications de robotique médicale en termes d'intégration, de compacité et de dextérité.

2- Description du sujet

Contexte de la thèse :

La dernière décennie a vu naître toute une famille de robots dont les traditionnelles articulations rigides sont progressivement remplacées par des articulations souples [Rus et al., 2015, Burgner-Kahrs et al., 2015]. Les avantages qui en découlent sont multiples : espace de travail augmenté, coût de fabrication limité, capacité de miniaturisation, possibilité de concevoir de nouvelles architectures cinématiques, multiplication des applications, notamment en chirurgie mini-invasive. Bien que le concept de robot souple (ou robot *continu*) crée un nouveau paradigme dans le monde de la robotique dextre, il pose encore de nombreux problèmes scientifiques en termes d'intégration, de modélisation et de commande.

Une des limites majeures au développement de cette « nouvelle famille » de robots est le problème de la miniaturisation/intégration des mécanismes d'actionnement. De ce fait, les quelques robots continus existants sont souvent limités à des échelles millimétriques ou centimétriques. Cependant, une innovation de rupture récente dans le domaine des matériaux est venue changer la donne (cf. Figure 1 issue de [Kim et al., 2019]). Cette avancée technologique utilise des composites actifs issus d'un mélange de microparticules ferromagnétiques et de résines polymères pour construire une structure à rigidité contrôlable permettant un actionnement magnétique continûment distribué sur l'ensemble du corps du robot. Une conception robotique fondée sur cette technologie apporte une grande flexibilité et

la capacité d'atteindre des endroits difficilement accessibles avec les robots souples actuels. Bien que très attractive d'un point de vue science des matériaux, cette nouvelle technologie n'est pas encore suffisamment étudiée au niveau modélisation et commande pour pouvoir en évaluer tout son potentiel pour des applications de robotique souple. Un important travail de modélisation/simulation au niveau multi-physique est encore nécessaire pour pouvoir proposer des structures, des systèmes et des commandes réellement utilisables en pratique dans le cadre d'applications réalistes.

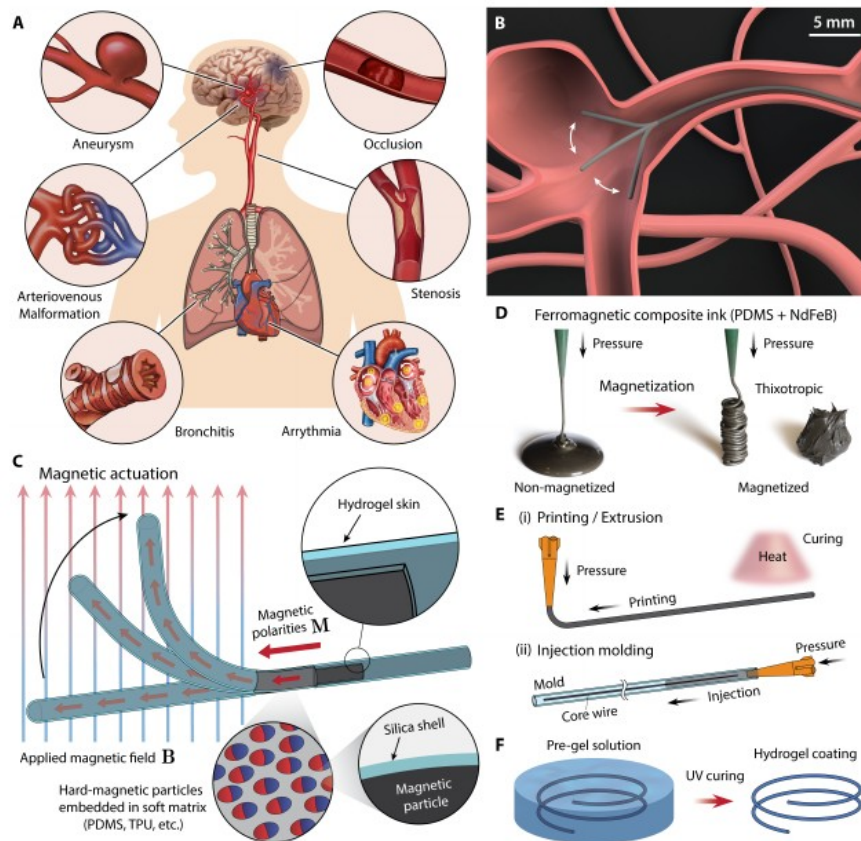


Fig. 1. Schematic illustration of ferromagnetic soft continuum robots with hydrogel skins. (A) Pathologic conditions in hard-to-reach areas across the human body where small-scale soft continuum robots with active steering and navigating capabilities have utility. (B) Illustration of the active steerability of a submillimeter-scale soft continuum robot navigating a complex vasculature with an aneurysm. (C) Schematic illustration of the magnetically responsive tip of the continuum robot with programmed magnetic polarities resulting from the hard magnetic particles embedded in the robot's body made of soft polymer matrix. The hydrogel skin provided a hydrated, self-lubricating layer on the robot's surface, and the silica shell coated around the embedded magnetic particles prevented their corrosion at the hydrated interface. (D) Ferromagnetic composite ink based on PDMS + NdFeB (20 volume %) before and after magnetization. When magnetized, the previously freely flowing ink became a thixotropic paste with shear yield stress due to the interaction between embedded magnetic particles. (E) Fabrication methods based on (i) printing/extrusion and (ii) injection molding. For printing, the magnetized ink was extruded through a micronozzle. For injection modeling, the ink was injected into a micromold in which a concentric functional core is placed. (F) Schematic illustration of hydrogel skin formation onto the outer surface of the fabricated ferromagnetic soft continuum robot.

Figure 1 : Innovation proposée par [Kim et al., 2019] pour concevoir des robots souples magnétiques.

Description et positionnement du sujet de thèse vis-à-vis des enjeux scientifiques et des thématiques de recherche du laboratoire Roberval

Au-delà du défi technologique que constitue la conception d'un robot magnétique souple basé sur la technologie proposée par l'équipe de [Kim et al., 2019], les enjeux scientifiques ciblés par cette thèse se positionnent sur une thématique de « modélisation » complémentaire aux aspects « matériaux » développés et étudiés par cette équipe. De plus, le sujet de cette thèse est proposé en parallèle d'un projet émergence SU déposé conjointement et récemment (fin 2020) par les laboratoires Roberval de l'UTC et l'ISIR de SU¹. Du côté du laboratoire Roberval, ce projet émergence SU a été déposé dans le cadre de l'axe transverse « matériaux fonctionnalisés » avec une participation inter-équipes (A. Hubert et F. Bedoui). Pour information, ce projet SU se positionne sur des aspects plus globaux de

¹ Titre du projet émergence SU déposé : *Design, fabrication and control of fully continuum magnetic soft robots. Applications for dexter and mini-invasive tasks in the field of medical robotics and health technologies*. Porteur : A. Hubert. Autre participant de Roberval : F. Bedoui. Dans ce projet, des demandes de financement pour un(e) post-doctorant(e) et deux stagiaires master ont été faites. Ce projet a été accepté pour financement à la fin du printemps 2021.

conception/fabrication de ces structures pour des applications de robotique médicale que le sujet de thèse faisant l'objet de cette demande MESR. En effet, et de manière complémentaire à ce projet SU, le sujet de recherche proposé dans cette thèse s'intéressera en priorité à la modélisation multi-physique des structures souples magnéto-mécaniques en robotique. En fonction des avancées sur ce thème de recherche principal, des problématiques scientifiques plus axées *robotique* et *contrôle/commande* pourront également être envisagées dans une deuxième partie de la thèse.

Dans ce travail de recherche doctorale, nous proposons d'investiguer la modélisation multiphysique des structures souples magnéto-mécaniques en utilisant des méthodes numériques avancées spécialement développées dans ce cadre et adaptées à la prise en compte des grands déplacements. Une analyse poussée de la littérature scientifique montre que même s'il existe actuellement de nombreux travaux dans ce domaine, ces derniers ne couvrent en général que l'un des aspects de cette thématique et non la problématique de recherche envisagée ici. Certaines équipes proposent par exemple des résultats originaux sur la modélisation numérique des structures souples pour la robotique mais ils ne prennent pas (ou peu) en compte les aspects d'actionnement distribué [Childs et al., 2020, Morales Bieze et al., 2020, Coevoet et al., 2017, Koehler et al., 2019]. A l'inverse, d'autres équipes se concentrent sur la problématique de l'actionnement magnétique dans le cadre de la robotique flexible mais ils utilisent, en général, des actionnements localisés ponctuellement plutôt que distribués comme nous proposons de le faire dans cette thèse [Kratchman et al., 2017, Charreyron et al., 2020, Dupont et al., 2009, Usevitch et al., 2020]. Enfin, des travaux réalisés au sein du *Multibody & Mechatronic Systems laboratory* de l'Université de Liège proposent également des résultats très intéressants dans le cadre des éléments finis mixtes et de la géométrie différentielle pour la prise en compte des grands déplacements, mais uniquement d'un point de vue mécanique [Sonneville et al., 2017, Lismonde et al., 2019, Ronga et al., 2020]. On notera que les méthodes *géométriques* proposées par cette équipe de Liège semblent particulièrement bien adaptées pour la modélisation des grands déplacements inhérents aux structures robotiques souples faisant l'objet de cette thèse.

En termes de formulation numérique, des méthodes d'éléments finis extérieurs [Arnold et al., 2006] sont envisagées. Ces méthodes constituent des outils méthodologiques de modélisation et de simulation développés dans l'esprit des éléments finis de Whitney [Bossavit, 1988, Moreno-Navarro et al., 2020], du calcul extérieur discret [Debrun et al., 2005, 2008] et des Cell-Method [Alotto et al., 2013, Tonti, 2013]. Concernant l'aspect numérique, l'un des verrous scientifiques de cette thèse sera en particulier d'étendre ces méthodes dans le cas de la magnéto-mécanique avec prise en compte des grands déplacements.

Un autre objectif scientifique sera de poursuivre les premiers résultats de [Tratkanov et al., 2018] sur la réduction de modèles dans le cadre du calcul extérieur discret pour proposer des modèles réduits utilisables pour la commande en temps-réel de structures robotiques souples, ce qui reste à l'heure actuelle un vrai défi scientifique. Les méthodes de réduction proposées dans [Tratkanov et al., 2018] sont actuellement fondées sur de approches dites de *clustering* issues de l'intelligence artificielle (notamment l'algorithme DBSCAN). Cependant, d'autres méthodes peuvent être envisagées, si nécessaire, pour d'une part lever certains verrous scientifiques relatifs au caractère multi-physique des robots souples, et d'autre part pour dépasser certaines limites relatives au temps de calculs à *maîtriser* pour les besoins de la commande temps réel. Les contributions scientifiques de [Tratkanov, 2020] (cf. Figure 2) ont permis de lever certains verrous scientifiques dans le cas d'un problème magnéto-statique. Cependant, dans le cadre de cette proposition de thèse, il faudra étendre ces premiers résultats à l'élastostatique, puis à l'élastodynamique avec prise en compte de grands déplacements. Cette extension constituera aussi un important verrou scientifique à lever dans ce travail de doctorat.

En résumé, les principaux enjeux scientifiques de cette thèse seront de pouvoir faire une synthèse scientifique des différents résultats identifiés dans la littérature pour proposer des méthodes à la fois originales et adaptées à la modélisation de systèmes robotiques souples à actionnement magnétique distribué. De plus, les résultats de ces travaux devront également conduire à des modélisations suffisamment *légères* (en termes de temps de calcul) pour pouvoir être utilisées dans un second temps dans la composante commande de ce travail. Pour ce dernier point, l'utilisation de méthodes de réduction de modèles semble inévitable.

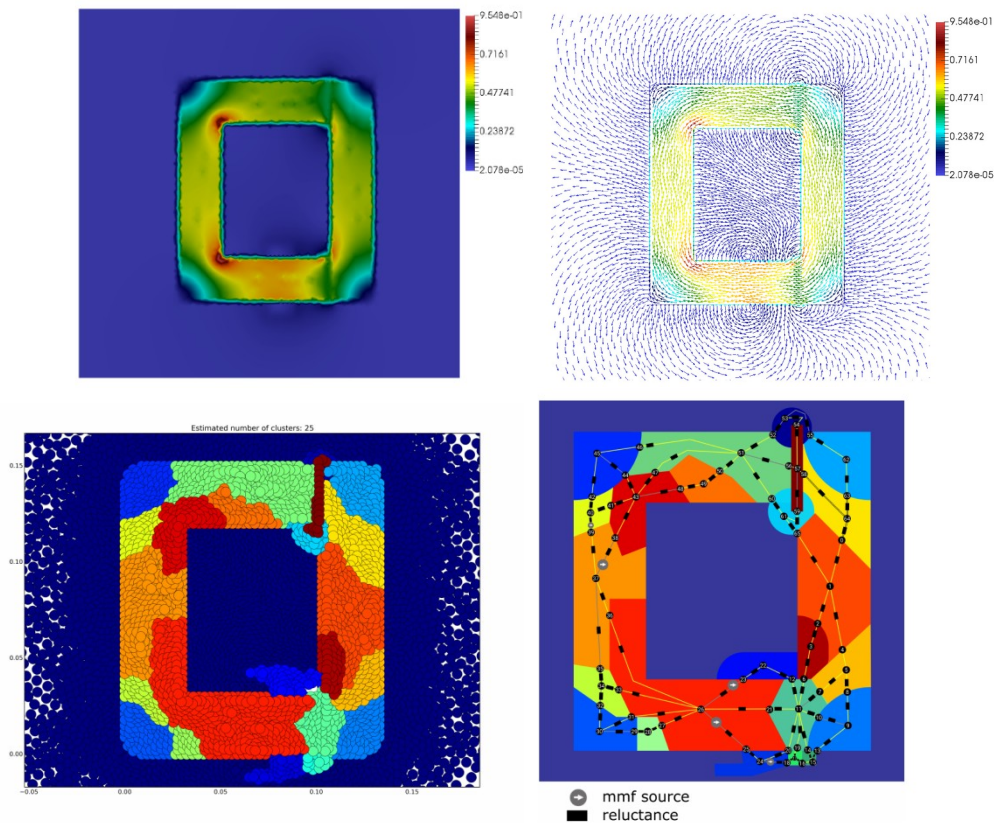


Figure 2 : Exemple de réduction de modèle sur un problème magnétostatique : (a) Calcul magnétostatique à l'aide du calcul extérieur discret, (b) Interpolation à l'aide d'éléments de Whitney, Clustering à l'aide de l'algorithme DBSCAN, (d) Génération automatique d'un modèle réduit, en l'occurrence un réseau de reluctance dans le cas de la magnétostatique [Tratkanov, 2020].

Programme de travail, profil et compétences du candidat

Plan de travail :

Le(la) candidat(e) à cette thèse de doctorat intégrera l'équipe 4 (énergie, électricité et intégration) du laboratoire Roberval de l'UTC. Au cours de sa thèse, le(la) candidat(e) doctorant(e) aura à répondre aux objectifs suivants :

- Prise en main des techniques de modélisation numérique dans un cadre multiphysique.
- Développement de modèles originaux aptes à simuler numériquement des structures magnéto-mécaniques souples en grands déplacements.
- Proposition de techniques de réduction de modèle permettant d'obtenir des modélisations à la fois suffisamment précises et suffisamment légères pour être utilisables dans le cadre d'une commande temps réel pour robots souples.
- Développement d'un outil logiciel de modélisation et de simulation numérique pour regrouper l'ensemble des contributions dans une seule plateforme informatique.
- Validation des méthodes et modèles proposés sur une plateforme expérimentale (plate-forme de robot souple magnétique développée en collaboration avec des partenaires de l'ISIR à SU).

Un travail en collaboration avec des chercheurs et ingénieurs engagés dans d'autres projets traitant de thématiques similaires sera encouragé. Ces échanges permettront non seulement de partager les connaissances et compétences acquises au cours de cette recherche mais également de s'assurer de la pertinence des modèles proposés pour les applications envisagées. Les thèmes concernés possibles pour une collaboration sont les suivants : modélisation multiphysique et réduction de modèles (projet ANR-PRCI et équipe 1 de Roberval), robotique souple, commande temps réel et applications médicales mini-invasives (laboratoire ISIR de SU et un laboratoire de l'ETHZ à Zurich en Suisse).

Profil, aptitudes et compétences du (de la) candidat(e) :

- Motivation, implication et une certaine autonomie.
- Compétences multidisciplinaires en sciences pour l'ingénieur : ingénierie électrique et mécanique.
- Intérêt pour la recherche et bonne maîtrise des outils mathématiques.
- Connaissance de la modélisation et de la simulation numérique (éléments finis, analyse numérique).
- Maîtrise des outils de la programmation et du calcul scientifique : Matlab, Python ou C++.
- Des connaissances de base en « Intelligence Artificielle/Machine Learning », en « robotique » ou en « théorie du contrôle » seraient un plus.
- Bonne maîtrise de l'anglais.

3- Collaborations, budgets et financements prévus pour ce projet de recherche

Bien que proposé parallèlement au projet émergence SU (et assez indépendamment), cette thèse se déroulera en interaction avec lui. Ce projet SU permettra en particulier d'apporter un support financier à cette thèse, en complément des ressources propres de l'équipe M2EI de Roberval issues de reliquats de projet UTEAM.

Des collaborations sont également envisagées avec l'équipe du Prof. B. J. Nelson de l'ETHZ à Zurich en Suisse dans ce cadre².

Le(la) doctorant(e) pourra également interagir avec des partenaires impliqués dans le cadre de l'ANR *Decision Support Tool for Robust Design of Adaptive Meta-Composite Structures* obtenue au cours de l'été 2021. Bien que la multiphysique étudiée dans cette thèse concerne des couplages magnéto-mécaniques alors que celle de cette ANR concerne des couplages piézoélectriques, des similarités devraient exister au niveau de la modélisation. En effet, ces deux projets de recherche se proposent d'utiliser des méthodes d'éléments finis extérieurs et de ce fait, les modèles développés partageront nécessairement de nombreux points communs, ce qui permettra de créer une vraie synergie autour de ces problématiques scientifiques.

Références bibliographiques

- [Rus et al., 2015] D. Rus and M. T. Tolley (2015), "Design, fabrication and control of soft robots," *Nature*, vol. 521, no. 7553, pp. 467–475, May 2015.
- [Burgner-Kahrs et al., 2015] J. Burgner-Kahrs, D. C. Rucker, H. Choset (2015). Continuum robots for medical applications: A survey. *IEEE Trans. on Robotics*, 31(6), 1261-1280.
- [Kim et al., 2019] Y. Kim, G A. Parada, Shengduo Liu and V Xuanhe Zhao (2019), Ferromagnetic soft continuum robots, *Science Robotics*, 28 Aug 2019: Vol. 4, Issue 33.
- [Childs et al., 2020] J. A. Childs, C. Rucker (2020). Concentric Precurved Bellows: New Bending Actuators for Soft Robots. *IEEE Rob. and Automation Letters*, 5(2), 1215-1222.
- [Morales Bieze et al., 2020] T. Morales Bieze, A. Kruszewski, B. Carrez, C. Duriez (2020). Design, implementation, and control of a deformable manipulator robot based on a compliant spine. *The International Journal of Robotics Research*, 0278364920910487.
- [Coevoet et al., 2017] E. Coevoet, T. Morales-Bieze, F. Largilliere, Z. Zhang, M. Thieffry, M. Sanz-Lopez, B. Carrez, D. Marchal, O. Goury, J. Dequidt et al. (2017), "Software toolkit for modeling, simulation, and control of soft robots," *Advanced Robotics*, vol. 31, no. 22, pp. 1208–1224.
- [Koehler et al., 2019] M. Koehler, A. Okamura, C. Duriez (2019), Stiffness Control of Deformable Robots Using Finite Element Modeling. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 4(2), pp.469-476.
- [Kratchman et al., 2017] L.B. Kratchman, T. L. Bruns, J. J. Abbott, R. J. Webster (2017), Guiding elastic rods with a robot-manipulated magnet for medical applications. *IEEE Trans. Robot.* 33, 227–233.
- [Charreyron et al., 2020] S. L. Charreyron, Q Boehler, A. Danun, A. Mesot, M. Becker, B. J. Nelson, (2020). A Magnetically Navigated Microcannula for Subretinal Injections. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*.
- [Dupont et al., 2009] P. E. Dupont, J. Lock, B. Itkowitz, E. Butler (2009), Design and control of concentric-tube robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(2), 209-225.
- [Usevitch et al., 2020] N. S. Usevitch, Z. M. Hammond, Mac Schwager, A. M. Okamura, E. W.

² Le dépôt d'une ANR internationale est en cours de réflexion en collaboration avec l'ISIR de SU et l'ETHZ, Zurich Suisse pour l'AAP ANR 2022 ou 2023.

- Hawkes, and S. Follmer (2020) « An untethered isoperimetric soft robot » *Science Robotics*, Vol. 5, Issue 40.
- [Sonneville et al., 2019] V. Sonneville, O. Brüls, and O.A. Bauchau (2019), Interpolation schemes for geometrically exact beams: A motion approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 112: 1129–1153.
- [Lismonde et al, 2019] A. Lismonde, V. Sonneville, O. Brüls (2019), A geometric optimization method for the trajectory planning of flexible manipulators. *Multibody Syst Dyn* 47, 347–362.
- [Ronga et al, 2020] J. Ronga, Z. Wua, C. Liua, O. Brüls (2020), Geometrically exact thin-walled beam including warping formulated on the special Euclidean group $SE(3)$, *Methods Appl. Mech. Engrg.* 369.
- [Arnold et al., 2006] D. N. Arnold, R.S. Falk, R. Winther (2006), Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta Numerica* 15:1–155.
- [Bossavit, 1988] A. Bossavit (1988), Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proc*, 135(8):493–500.
- [Moreno-Navarro et al., 2020] P. Moreno-Navarro, A. Ibrahimbegovic, A. Ospina (2020), Multi-field variational formulations and mixed finite element approximations for electrostatics and magnetostatics, *Computational Mechanics*, 65:41–59.
- [Debrun et al., 2005] M. Debrun, A.N. Hirani, M. Leok, J.E. Marsden (2005), Discrete Exterior Calculus, arXiv:math/0508341v2.
- [Debrun et al., 2008] M. Desbrun, E. Kanso, E. Y. Tong (2008), Discrete differential forms for computational modeling. In: *Discrete differential geometry*, pp 287–324. Springer.
- [Alloto et al., 2013] P. Alotto, F. Freschi, M. Repetto, C. Rosso (2013), The cell method for electrical engineering and multiphysics problems: an introduction, vol 230. Springer.
- [Tonti, 2013] E. Tonti (2013), *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics. A General Classification Diagram*, Birkhauser.
- [Tratkanov et al., 2018] D. Tratkanov, P. Prokopenko, A. Ospina-Vargas, A. Hubert (2018), A concept of automated lumped model generation from Cell-Method models using unsupervised clustering, *EMF'2018 Conference*, 10-12 April.
- [Tratkanov, 2020] D. Tratkanov (2020), Geometric and energetic methods for modelling and simulation of multiphysics systems in electrical engineering, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France.