Examen Médian P14

Durée : 2h, documents autorisés : AUCUN

CHAQUE EXERCICE DOIT ÊTRE RÉDIGÉ SUR UNE COPIE SÉPARÉE !

Exercice 1. Tir ballistique sans et avec frottement ($\approx$ 7 points)

Un obus sphérique de masse m assimilé à un point matériel M est lancé dans l'air avec une vitesse $\vec{v}_0$ depuis le point O, origine du cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel terrestre supposé galiléen. La vitesse $\vec{v}_0$ fait un angle α avec l'horizontale Ox dans le plan Oxz. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme et Oz est la verticale ascendante.

Pour l'instant on néglige tout frottement.

a. Déterminer l'équation de la trajectoire.

b. Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle α la flèche est-elle maximale ?

c. Déterminer la portée D (distance entre O et le point de chute sur le plan horizontal $z = 0$). Pour quel angle α la portée D est-elle maximale ?
Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

Données : $g = 9,81 m.s^{-2}$, $\|\vec{v}_0\| = 30 m.s^{-1}$ et $m = 1 kg$.

On suppose, cette fois, que l'obus est soumis à une force de frottement (traduisant la résistance de l'air) du type : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ *en plus de son poids.*

d. Déterminer les composantes $(v_x(t), v_z(t))$ du vecteur vitesse $\vec{v}$.

e. Déterminer les composantes $(x(t), z(t))$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

f. Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.

g. Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.

h. Tracer l'allure de la trajectoire.

Données : $g = 9,81 m.s^{-2}$, $\|\vec{v}_0\| = 30 m.s^{-1}$, $m = 1 kg$, $\alpha = 45$ degrés et $\lambda = 0,1 kg.s^{-1}$.

Exercice 2. Electromagnétisme ($\approx$ 7 points)

Les 3 problèmes d'électromagnétisme qui suivent sont **indépendants**.
Les Problèmes 1 et 2 sont traités directement sur la feuille d'énoncé.
Dans tous les cas, les forces de frottement sont négligées.

Problème 1 :

La trajectoire parabolique représentée **figure 1** peut correspondre au déplacement :

i) d'un électron dans un champ électrique uniforme.
ii) d'un électron dans un champ magnétique uniforme.
iii) d'un proton dans un champ électrique uniforme.
iv) d'un proton dans un champ magnétique uniforme.

a. Entourer la (ou les) réponse(s) possible(s).
b. Représenter **sur la figure 1** la force subie par la particule en un point quelconque de la trajectoire.
c. Ecrire ci-dessous l'expression vectorielle de la force responsable de cette trajectoire parabolique :

$$\vec{F} =$$

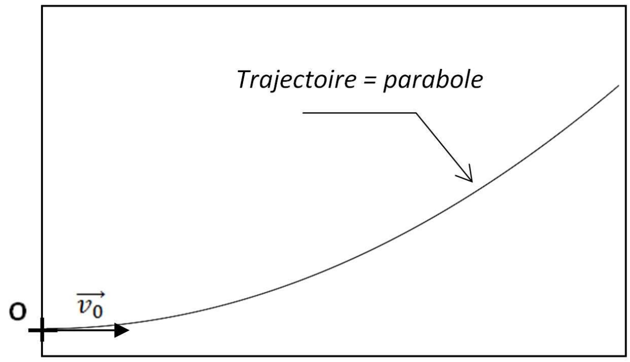

FIGURE 1 – Trajectoire parabolique.

Problème 2 :

La trajectoire parabolique représentée **figure 2** peut correspondre au déplacement :

i) d'un électron dans un champ électrique uniforme.
ii) d'un électron dans un champ magnétique uniforme.
iii) d'un proton dans un champ électrique uniforme.
iv) d'un proton dans un champ magnétique uniforme.

a. Entourer la (ou les) réponse(s) possible(s).
b. Représenter **sur la figure 2** la force subie par la particule en un point quelconque de la trajectoire.
c. Ecrire ci-dessous l'expression vectorielle de la force responsable de cette trajectoire circulaire :

$$\vec{F} =$$

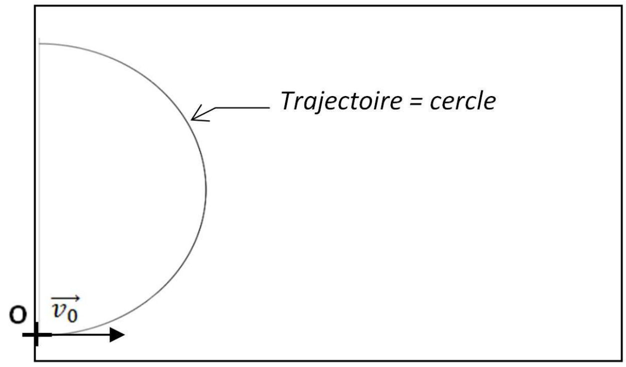

FIGURE 2 – Trajectoire circulaire.

Problème 3 :

Dans le référentiel du laboratoire $Oxyz$, on considère une particule de masse m et de charge q, ayant une vitesse initiale nulle et se trouvant au point O à l'instant $t = 0$. On établit à cet instant deux champs uniformes et indépendants du temps : $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

a. Ecrire la formule de Lorentz donnant la force subie par la particule lorsqu'elle est soumise aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

b. Ecrire le PFD (Principe Fondamental de la Dynamique) appliqué à cette particule (négliger le poids).

c. En déduire le système d'équations différentielles suivantes :

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}$$
$$\ddot{y} = K - \omega\dot{x}$$
$$\ddot{z} = 0$$

avec K et ω **deux constantes à écrire en fonction de** q,m, E et B.

d. Montrer que le mouvement de la particule se fait dans le plan $z = 0$.

e. Montrer que les solutions des deux premières équations différentielles couplées sont :

$$x(t) = L(\omega t - \sin(\omega t))$$
$$y(t) = L(1 - \cos(\omega t))$$

avec L **une constante à écrire en fonction de** K et ω.

f. La trajectoire correspondant à ces équations paramétriques est une cycloïde représentée sur la **figure 3**. Quelles sont les coordonnées du point P (repéré sur la **figure 3**) en fonction de L ?

g. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la particule.

h. Représenter sur la **figure 3** le vecteur vitesse de la particule à l'instant $t = \pi/\omega$.

i. Déterminer l'expression de la norme de la vitesse de la particule. Pour quelles valeurs de t la norme est-elle maximum ?

j. Exprimer la valeur de la vitesse à l'instant $t = \pi/\omega$ en fonction de L et ω puis en fonction de E et B.

k. Mais au fait !... La trajectoire représentée **figure 3** correspond-elle à celle d'une charge positive ou négative ? (justifier très brièvement la réponse).

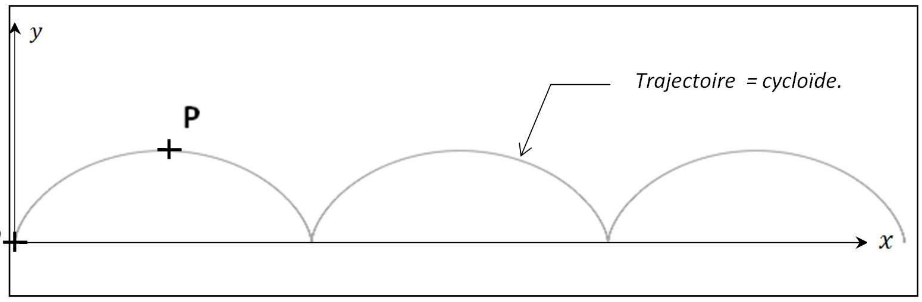

FIGURE 3 – Cycloïde.

Exercice 3. Masse sur une tige oblique en rotation ($\approx$ 6 points)

Une tige OP rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire **constante** ω. Cette tige forme un angle constant α avec l'axe vertical. Un point matériel de masse m pouvant glisser **sans frottement** est en équilibre sur la tige : la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$ **est constante** et on note $d = \|\overrightarrow{OM}\|$.

a. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
b. En déduire la vitesse et l'accélération dans la base cylindrique.
c. En utilisant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen : déterminer l'expression de la distance d en fonction de la gravité g, l'angle α et de la vitesse de rotation ω.
d. Déterminer l'expression de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur la masse dans la base cylindrique.

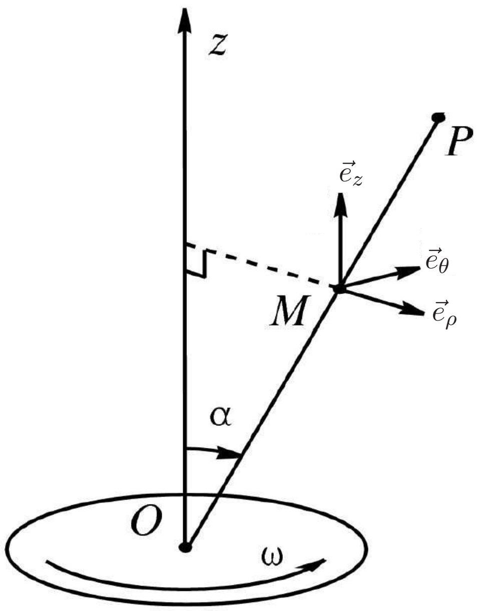

FIGURE 4 – Masse ponctuelle M sur une tige oblique en rotation uniforme.