Examen Final P14

Durée : 2h, documents autorisés : 1 FEUILLE RECTO-VERSO

CHAQUE EXERCICE DOIT ÊTRE RÉDIGÉ SUR UNE COPIE SÉPARÉE !

Exercice 1. Montagnes Russes ($\approx$ 6 points)

Un chariot de manège, appelé Montagnes Russes, de masse m roule sans frottement sur une glissière située dans un plan vertical. La glissière permet au chariot de rester accroché aux rails. Elle est constituée de plusieurs parties :
- Un arc de cercle (AB) de rayon R et de centre O_1.
- Un segment incliné $[BC]$.
- Un segment horizontal $[CD]$ de longueur R.
- Un arc de cercle (DE) de rayon $2R$ et de centre O_2.
- Les points O_1, E et E' sont sur la même ligne horizontale et on prendra θ=60°
- Au point C du manège, on supposera que la pente de la glissière ne varie pas trop brutalement afin de considérer que l'énergie ne se dissipe pas au moment du choc sur la glissière horizontale.

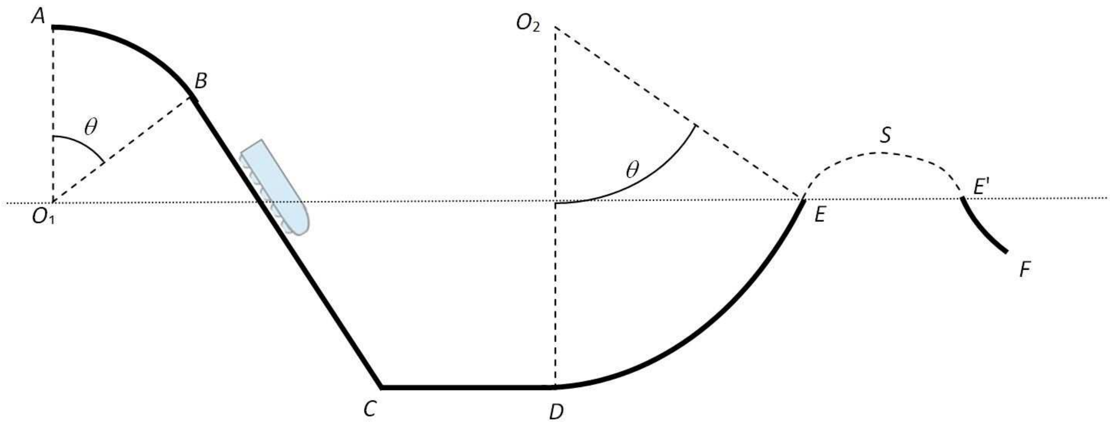

FIGURE 1 – Montagnes Russes. (schéma pas parfaitement à l'échelle)

Le chariot est initialement à l'arrêt en A. Il se laisse rouler sans vitesse initiale.

1. Quelle est sa vitesse en B, C, D et E ?
2. Donner le module de la réaction exercée par la glissière sur le chariot aux points B et D.
3. Pour quelle valeur de θ le chariot quitterait-il la piste entre A et B s'il n'était pas retenu par les rails ?
4. Quelle force constante de freinage doit-on appliquer entre C et D pour que le chariot s'arrête en D ?

5. La piste est interrompue entre E et E', situés à la même hauteur. Entre ces deux points, le chariot a une trajectoire parabolique ESE' (pas de frottement fluide), S étant le sommet de la trajectoire. Trouver la hauteur h_S du point S au dessus de la ligne (EE') en fonction de la vitesse au point E, de g (intensité de la pesanteur) et de θ (utiliser les théorèmes d'énergie).

Exercice 2. Force élastique et oscillateur ($\approx$ 7 points)

Soit un référentiel galiléen de repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une bille quasi-ponctuelle de masse M est repérée par le point P. Elle se déplace sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a. Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est attaché entre le point P et un point O' fixe $(OO' = a)$. Le point P est repéré par l'angle $\theta = (Ox, OP)$. Cet angle permet de définir la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{O'P}/||\overrightarrow{O'P}||$ est le vecteur unitaire dont la direction est la direction du ressort. Dans la configuration du schéma, le ressort est en extension.

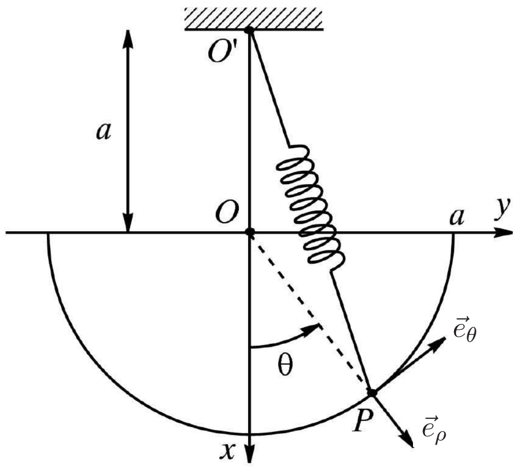

FIGURE 2 – Schéma de l'oscillateur.

1. Exprimer $\overrightarrow{O'P}$ dans la base polaire en fonction de a et θ. En déduire le module de $\overrightarrow{O'P}$.
2. Exprimer $\vec{F}$ la force exercée par le ressort sur la masse M en fonction de a, k, l_0 et θ dans la base polaire.
3. Exprimer le vecteur vitesse du point P dans la base polaire. En déduire l'expression de l'énergie cinétique.
4. Le système est-il conservatif ? Justifier. Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

Dorénavant on pose que $a = 2Mg/k$ et $l_0 = \sqrt{3}(a - Mg/k)$.

5. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
6. Donner l'expression de l'énergie potentielle du ressort. En déduire que l'énergie potentielle totale vaut (à une constante près) [1] :

$$E_p = Mga(\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta/2).$$

(note : si vous n'arrivez pas à démontrer ce résultat, vous pouvez passer aux questions d'après.)
7. Dans l'intervalle $\theta \in [0, \pi/2]$, quelles sont les 2 positions d'équilibre θ_1 et θ_2 ? identifier la position stable.
8. En dérivant par rapport au temps l'énergie mécanique, déterminer l'équation différentielle du mouvement de P.
9. On se place maintenant dans le contexte d'une petite variation angulaire α autour de la position d'équilibre stable θ_e (voir question 6). La position angulaire θ est donc définie telle que $\theta(t) =$

1. On pourra utiliser les relations $\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$ et $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

$\theta_e + \alpha(t)$. Montrer que l'équation différentielle du mouvement est de la forme [2] :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = A.$$

Montrez à l'aide des questions précédentes que $A = 0$. Donnez la pulsation ω_0 et en déduire la période des oscillations T_0.
10. On considère maintenant que le mécanisme est plongé dans un fluide visqueux exerçant sur P une force : $\vec{F} = -K\vec{V}_P$ où K est le coefficient de viscosité du fluide et $\vec{V}_P$ le vecteur vitesse du point P. L'équation différentielle du mouvement devient alors de la forme : $\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$. Donnez l'expression de b. En considérant que le mouvement a lieu en régime pseudo-périodique, donner l'expression de $\alpha(t)$.

Exercice 3. Barrière et puits de potentiel ($\approx$ 7 points)

Question de cours :
1. Ecrire l'expression vectorielle générale de la force électrostatique existant entre deux particules chargées quelconques q_1 et q_2 séparées d'une distance r. Faire un schéma clair en indiquant le vecteur unitaire utilisé.
2. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à cette force. On rappelle que E_p tend vers 0 quand r tend vers l'infini.
3. Représenter l'allure de $E_p(r)$ dans le cas de charges de signes contraires.

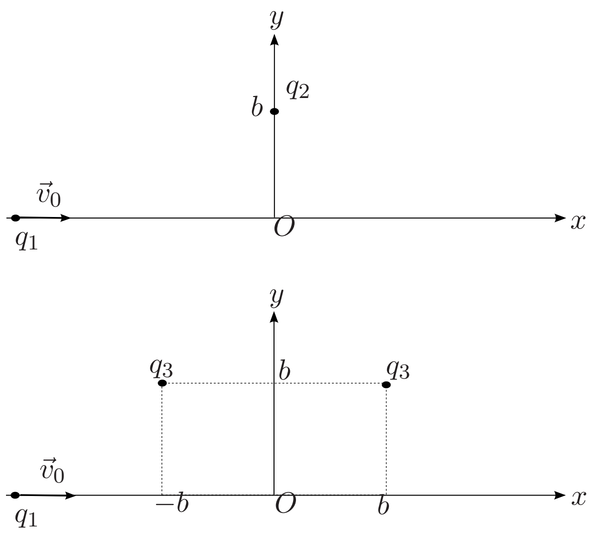

FIGURE 3 – Figure du haut : **Application n°1**. Figure du bas : **Application n°2**.

Application n°1 (Figure 3 haut)
On considère une particule M, de masse m et de charge $q_1 = +2e$, lancée suivant un axe (Ox) horizontal avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ à partir d'un point d'abscisse $-a$ ($a > 0$). Celle-ci est soumise à l'action d'une autre charge ponctuelle, de charge $q_2 = -2e$, située sur l'axe (Oy) à la distance b de O comme indiqué sur la Figure 3 (haut). La charge q_2 reste immobile tandis que M est astreinte, par un système de guidage électromagnétique, à se déplacer uniquement sur l'axe (Ox). Aucun frottement ne s'exerce sur M au cours de son mouvement.

2. En utilisant les relations trigonométriques pour α petit :
$\sin(\theta_e + \alpha) = \alpha\cos\theta_e + \sin\theta_e$ et $\cos(\theta_e + \alpha) = \cos\theta_e - \alpha\sin\theta_e$.

4. Etablir l'expression de l'énergie potentielle E_{p1} de la particule mobile M le long de l'axe (Ox), en fonction de son abscisse x et des paramètres du problème. Tracer l'allure de $E_{p1}(x)$.
5. Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} de M. Comment évolue cette énergie au cours du temps ? Justifier.
6. Quelle est la vitesse minimale initiale permettant à la particule M de s'éloigner indéfiniment de la charge q_2 ?

Application n°2 (Figure 3 bas)
On lance à présent la particule M de charge $q_1 = +2e$ de manière analogue à l'expérience précédente mais celle-ci est maintenant soumise à l'action de deux autres charges ponctuelles, de charges $q_3 = +3e$, situées comme indiqué sur la Figure 3 (bas).

7. Les charges q_3 étant contraintes à rester immobiles et la charge q_1 étant toujours astreinte à ne pouvoir se déplacer que sur l'axe (Ox) , établir la nouvelle expression de l'énergie potentielle totale E_{p2} de la particule mobile M le long de l'axe (Ox), en fonction de son abscisse x et des nouvelles données du problème.
8. Parmi les différents profils énergétiques proposés ci-dessous, retracez sur votre copie celui qui correspond au problème posé ici et indiquez sur votre graphique les positions d'équilibres stables et instables. Justifiez brièvement.

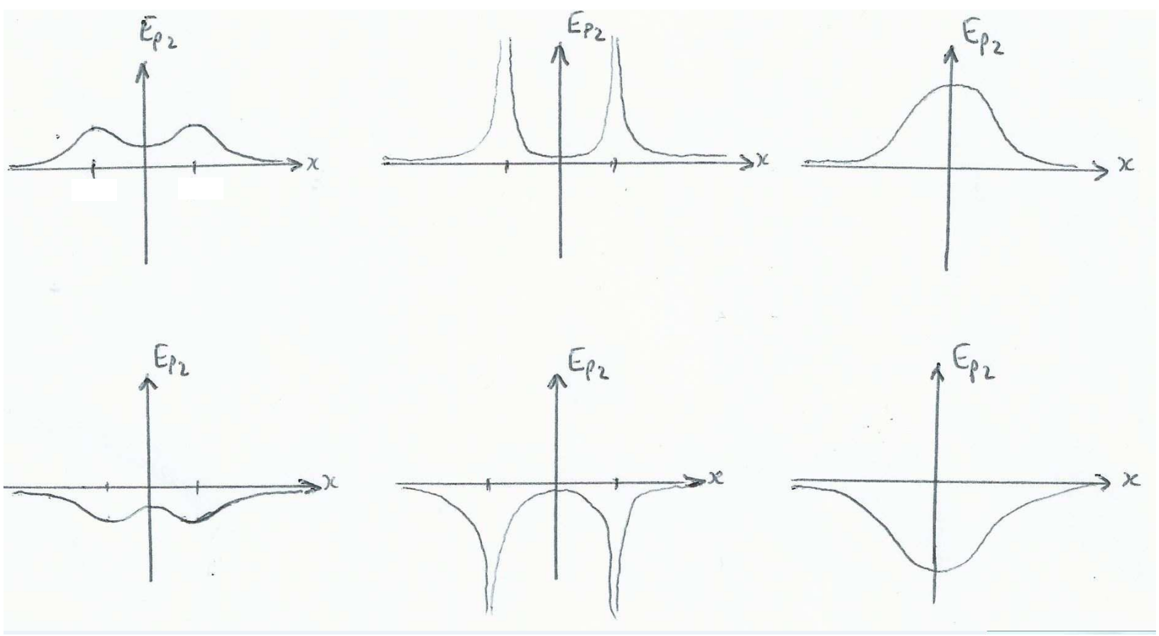

FIGURE 4 – Différents profils énergétiques.

9. A partir de ce profil, donnez la condition (faisant intervenir l'énergie potentielle et la vitesse initiale) pour que la particule M puisse passer dans les valeurs positives de x et s'éloigner indéfiniment des deux charges fixes.