CM08/P18/TD - Introduction à l'optimisation : problèmes avec contraintes

1 Introduction

Ces premiers exercices préliminaires ont pour but de vous faire démarrer avec des programme MATLAB déjà écrits et qui vous serviront de modèle pour la section suivante.

1.1 Programme linéaire

On considère le programme linéaire suivant :

$$\underset{x\in\mathbb{R}^2}{\text{minimiser}}\, f(x) = x_1 + 3x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{sous les contraintes : } -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ouvrez MATLAB et sélectionnez New/Script dans le menu, puis recopiez le programme suivant (n'hésitez pas à poser des questions sur le code) :

```
A=[-1 1;1 1];
b=[1;2];
Aeq=[];
beq=[];
lb=[0;0];
ub=[];
f=[-1;-3];

opt=optimoptions('linprog','display','iter');

x=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,opt)
```

Sauvez le script sous le nom `linearprogram.m` puis exécutez le à l'aide du bouton ▷. En représentant le domaine admissible K (à faire sur papier), ainsi que les courbes iso-valeurs de $f(x)$, vérifiez la solution obtenue avec `linprog`.

1.2 Programme non linéaire

On reprend l'exemple du td précédent sur l'optimisation des dimensions d'un réservoir, mais cette fois on n'élimine pas une des deux variables et on conserve en temps que telle la contrainte de volume, ainsi que les contraintes de positivité des variables :

$$\underset{d,L\in\mathbb{R}}{\text{minimiser}}\, f(d,L) = c_1\pi dL + c_2\pi\frac{d^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{sous les contraintes : } \pi\frac{d^2L}{4} &= V, \\ d &\geq 0, \\ L &\geq 0 \end{aligned}$$

Ouvrez MATLAB et sélectionnez New/Script dans le menu, puis recopiez le programme suivant (n'hésitez pas à poser des questions sur le code) :

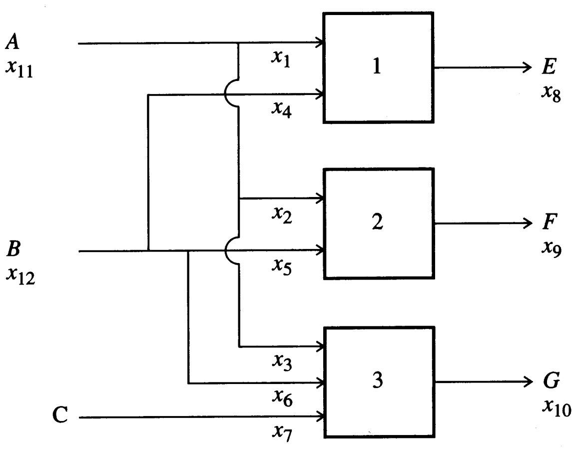
```
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb = [0;0];
ub = [];

opt = optimoptions('fmincon','display','iter');
x0 = [0;0];
V=330;
c=[1/2 1];
x = fmincon(@(x) cost(x,c),x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@(x) nonlcon(x,V),opt)

function out=cost(x,c)
  d=x(1);
  L=x(2);
  out = pi*(c(1)*d*L+c(2)*d^2/2);
end

function [cineq,ceq]=nonlcon(x,V)
  d=x(1);
  L=x(2);
  cineq = [];
  ceq = pi*d^2*L/4-V;
end
```

Sauvez le script sous le nom `nonlinearprogram.m` puis exécutez le à l'aide du bouton ▷. Vérifiez que la solution obtenue est la même que lors du TD précédent. Dans les informations affichées par `fmincon`, que remarquez-vous sur les valeurs successives de `f(x)` et de `Feasibility` (satisfaction des contraintes) ?

2 Deux problèmes en génie des procédés

2.1 Optimisation de production

On reprend le premier exemple du cours :



$$A = x_{11} = x_1 + x_2 + x_3$$
$$B = x_{12} = x_4 + x_5 + x_6$$
$$C = x_7 = \frac{1}{3} x_{10}$$
$$x_1 = \tfrac{2}{3} x_8,\ x_2 = \tfrac{2}{3} x_9, x_3 = \tfrac{1}{2} x_{10}$$
$$x_4 = \tfrac{1}{3} x_8,\ x_5 = \tfrac{1}{3} x_9, x_6 = \tfrac{1}{6} x_{10}$$

Contraintes sur les réactants : $x_{11} \leq 40000$, $x_{12} \leq 30000$, $x_7 \leq 25000$

Demande du marché : $x_8 \geq 10000$, $x_9 \geq 10000$, $x_{10} \geq 10000$

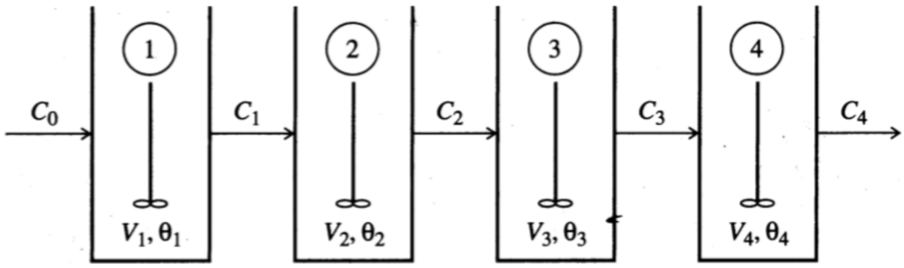
Profit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (4E + 3.3F + 3.8G) - (1.5A + 2B + 2.5C) - (1.5E + 0.5F + G) \\ &= 2.5x_8 + 2.8x_9 + 2.8x_{10} - 1.5x_{11} - 2x_{12} - 2.5x_7 \end{aligned}$$

Ecrire un programme MATLAB permettant de déterminer A, B, C donnant le profit maximum.

2.2 Optimisation de réacteurs

On reprend le deuxième exemple du cours :



Réacteurs parfaitement mélangés et à l'état stationnaire. L'espèce dont la concentration est notée C réagit à la vitesse $r = -kC^\alpha$ dans chaque réacteur.

$$\underset{C,V \in \mathbb{R}^4}{\text{minimiser}} f(C,V) = C_4,$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} &V_i \geq 0, C_i \geq 0, i = 1 \ldots 4, \\ &\sum_{i=1}^{4} V_i = 20, \\ &q(C_{i-1} - C_i) - kV_i C_i^\alpha = 0, i = 1 \ldots 4 \end{aligned}$$

On prend $\alpha = 2.5$ et $C_0 = 10$. Ecrire un programme MATLAB permettant de déterminer les volumes des réacteurs minimisant la concentration C_4. On pourra représenter les volumes et les concentrations obtenus avec `bar`. Etudiez la solution obtenue en fonction de l'ordre de la réaction et du nombre de réacteurs.