SY15/P15 - Travaux dirigés

Systèmes dynamiques non linéaires

1 Pendule

On considère l'équation du pendule

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0,$$

avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$.

1. Mettre cette équation différentielle sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre en temps
$$X' = f(t, X),$$
où $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$ puis écrire le système linéaire tangent au point d'équilibre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la solution exacte du système linéaire tangent.
3. Calculer la solution approchée du système non linéaire à l'aide de la fonction `ode45` de Matlab. Superposer la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs de θ_0, et commenter les résultats observés.

2 Equation de Duffing

2.1 Système autonome

On considère l'équation différentielle

$$x'' + kx' - x + x^3 = 0,$$

avec $k = 0.15$.

1. Mettre cette équation différentielle sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre en temps
$$X' = f(t, X),$$
où $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ puis déterminer les points d'équilibre de ce système. Ces points d"équilibre sont-ils stables ou instables ?
2. Utiliser la fonction `ode45` de Matlab pour calculer la solution de l'équation différentielle avec des conditions initiales $X(0)$ choisies de manière à illustrer les résultats établis à la question précédente. On pourra par exemple représenter les solutions obtenues dans le plan de phase (O, X_1, X_2).

2.2 Système non autonome

On considère maintenant l'équation différentielle

$$x'' + kx' - x + x^3 = b\cos t,$$

avec $b = 0.3$ et pour conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$.

1. Calculez avec `ode45` la solution de l'équation différentielle pour $t \in [0, 40\pi]$.
2. Calculez la solution en prenant les conditions initiales $x(0) = 10^{-6}, x'(0) = 0$.
3. Superposer les deux solutions obtenues et commentez le phénomène observé.

3 Equation de Van der Pol

On considère l'équation différentielle

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0.$$

1. Calculer les points d'équilibre et déterminer leur stabilité.
2. Illustrer le résultat obtenu à la question précédente en approchant la solution de l'équation différentielle pour un choix adéquat de condition initiale. On pourra prendre des valeurs de μ comprises entre 0.01 et 5.
3. Commenter les résultats obtenus.