SY15/P15 - Travaux dirigés

Contrôle LQR de systèmes non linéaires

1 Pendule

On considère l'équation du pendule contrôlé par un couple $v(t)$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = \frac{1}{mL^2}v(t),$$

avec $\theta(0) = \pi$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

1. Mettre cette équation différentielle sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre en temps
$$X' = f(X, v),$$
où $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ puis écrire le système linéaire tangent au point d'équilibre $\hat{X} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{v} = 0$ sous la forme
$$\dot{Z} = AZ + Bv.$$
2. On prend $L = 1$, $m = 1$ et $g = 9.81$. Vérifier que le système est instable en boucle ouverte et que la paire (A, B) est contrôlable.
3. On prend $Q = \mathrm{diag}(1, 0)$ et $R = 0.1$. Calculer la matrice de retour d'état K avec la macro `lqr` et vérifier les valeurs propres de $A - BK$.
4. A l'aide de la macro `ode45` simulez le système bouclé
$$\begin{aligned} X' &= f(X, v), \\ v &= -K(X - \hat{X}), \end{aligned}$$
pour $t \in [0, 3]$. Vérifiez que si $X(0)$ est proche de $\hat{X}$ alors ce système est asymptotiquement stable. Est-ce toujours le cas si $X(0) = 0$? Que pensez-vous du résultat observé ?
5. Calculez le contrôle $v(t)$, représentez-le graphiquement et étudiez son évolution lorsque l'on diminue R.

2 Pendule inversé

1. On considère le pendule inversé représenté sur la figure 1, dont les équations du mouvement sont données sous forme implicite par le système
$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} &= v + ml\dot{\theta}^2\sin\theta, && (1) \\ (\cos\theta)\ddot{x} + l\ddot{\theta} &= g\sin\theta, && (2) \end{aligned}$$
où on a noté $v(t)$ la projection de la force $\vec{F}(t)$ sur l'axe $(0, x)$. Donner $\ddot{x}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et v. On pose $X = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^\top$, donnez les équations du mouvement du pendule sous la forme
$$X' = f(X, v). \qquad (3)$$

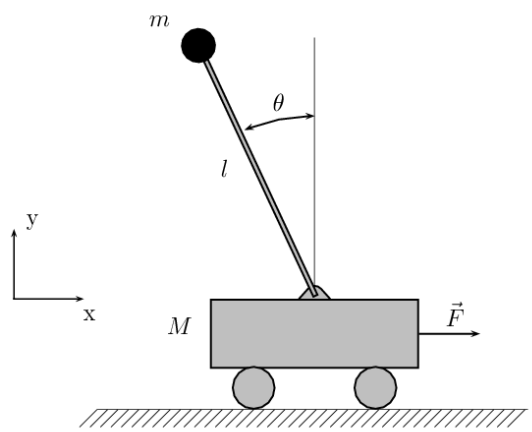

FIGURE 1 – Pendule inversé

2. On considère le système précédent linéarisé autour de l'état $X_0 = [0,0,0,0]^\top$. Donnez les matrices
$$A = \frac{\partial f}{\partial X}(0,0), \; B = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0).$$
Dans la suite on prendra les valeurs suivantes pour les paramètres du système : $M = 1$, $m = 0.1$, $l = 0.7$, $g = 9.81$. Vérifiez que le système linéarisé tangent est instable et contrôlable.

3. Pour stabiliser le système non-linéaire, nous allons utiliser le contrôle
$$v(t) = -KZ(t),$$
où la matrice K est obtenue comme à la section précédente. On choisit $Q = \mathrm{diag}(1,1,0.1,0.1)$ et $R = 0.1$ pour le calcul de la matrice de retour d'état K.

4. On considère le système bouclé
$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & f(X,v), \\ v & = & -KX. \end{array} \right. \tag{4}$$
Simulez l'évolution du système (4) avec la macro `ode45` pour $t \in [0,6]$ visualisez l'animation avec la macro `visualise_single` (que vous avez reçue par mail) et représentez les trajectoires obtenues. On considèrera les cas suivants :
   (a) $X(0) = [2,0,0,0]^\top$. Modifiez la matrice Q pour éviter l'overshoot sur x.
   (b) $X(0) = [0,\pi/6,0,0]^\top$.
   (c) $X(0) = [2,\pi/6,0,0]^\top$.
   (d) $X(0) = [0,\pi/3,0,0]^\top$. Vérifiez que dans ce cas le système bouclé est instable, et modifiez Q et/ou R pour retrouver la stabilité asymptotique.