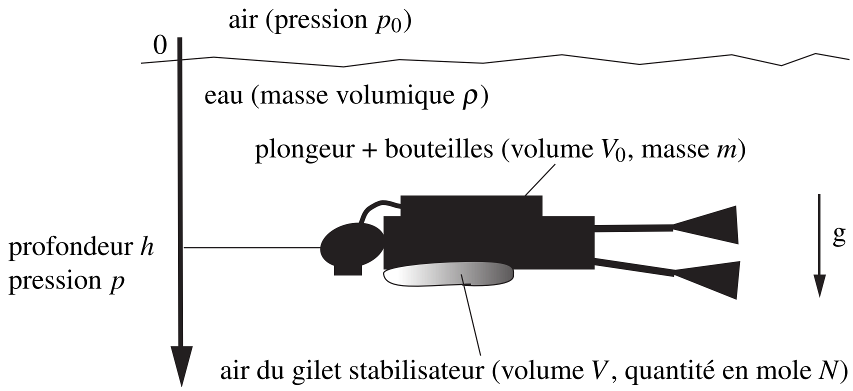
**SY15/P15 - Travaux dirigés**

**Décomposition lent/rapide. Linéarisation par feedback**

(Merci à Pierre Rouchon, professeur à l'école des Mines de Paris, auteur du sujet original).

# 1 Modélisation




On étudie ici la dynamique verticale d'un plongeur équipé d'un gilet stabilisateur contenant une quantité d'air réglable $N$ en mole, que l'on peut contrôler via l'équation

$$N' = u,$$

où si $u < 0$ on agit sur la purge du gilet et si $u > 0$ on introduit de l'air des bouteilles.

1. Donner la relation entre la profondeur $h$ et la pression $p$. On note $\rho$ la masse volumique de l'eau (supposée constante) et $g$ l'accélération de la pesanteur.
2. Déduire de la loi des gaz parfaits, $pV = NR\theta$ ($R$ est la constante des gaz parfaits et $\theta$ la température supposée constante), la poussée d'Archimède subie par le système plongeur + bouteilles (volume fixe $V_0$) avec le gilet stabilisateur (volume coïncidant avec celui du gaz).
3. On note $m$ la masse totale et $C \geq 0$ le coefficient de frottement visqueux entre l'eau et le système. Montrer que le modèle dynamique reliant la commande $u$ à la profondeur $h$ est de la forme :

$$h'' = a - bh' - c\frac{N}{d+h}, \tag{1}$$

$$N' = u. \tag{2}$$

4. Pourquoi est-il important d'avoir $m > \rho V_0$ ?
5. Mettre le système sous la forme d'un système du premier ordre en temps

$$X' = f(X, u),$$

avec $X = (h, h', N)^\top$. Dans la suite on suppose que $h > 0$, $N \geq 0$, et $m > \rho V_0$.

## 2 Instabilité en boucle ouverte

1. On suppose que $u = 0$. Calculer l'état d'équilibre $\hat{X}$ du système en fonction de la profondeur d'équilibre $h^*$.
2. Montrer que les matrices du système linéarisé tangent en $\hat{X}$ sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -b & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Donner les valeurs propres de A en fonction de $(\alpha, b, \beta)$. En déduire que le système est instable en boucle ouverte.
3. Montrer qu'il n'est pas possible de stabiliser localement autour de $\hat{X}$ ce système par un simple retour proportionnel sur $X_1 = h$, i.e., pour tout $k \in \mathbb{R}$ le linéarisé tangent avec $u = k(h - h^*)$ n'est jamais stable (c'est pourquoi le gilet stabilisateur nécessite un apprentissage).

## 3 Contrôle rapide

On considère le bouclage "grand gain" suivant

$$u = \frac{v - X_3}{\varepsilon},$$

où $\varepsilon$ est un petit paramètre positif et $v$ est le nouveau contrôle.

1. Mettre le système sous la forme lent/rapide.
2. Donner le sous-système lent lorsque l'on prend $\varepsilon = 0$. Quel est l'ordre de grandeur de $\varepsilon$ permettant de valider cette approximation (on pourra utiliser la question sur les valeurs propres de $A$) ?

## 4 Linéarisation par feedback

1. Donner le bouclage non-linéaire d'état $v = k(X_1, X_2, w)$ qui met le sous-système lent sous la forme

$$X_1' = X_2,$$
$$X_2' = -bX_1' + w.$$

   En déduire la forme générale de $w$ permettant de stabiliser le sous-système lent autour de l'état d'équilibre $(h^*, 0)$.
2. En déduire la commande $u$ permettant de stabiliser le système complet.
3. Ecrire un programme Matlab permettant de simuler le système avec le feedback trouvé à la question précédente pour $t \in [0, 60]$. On prendra les données suivantes :

$$\rho = 1020 \text{ Kg.m}^{-3}, \; V_0 = 0.090 \text{ m}^3, \; m = 94 \text{ Kg}, \; R = 8.3145 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}, \; \theta = 286.15 \text{ K},$$

$$p_0 = 10^5 \text{ N.m}^{-2}, \; g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}, \; C = 3.6 \text{ N.s.m}^{-1}, \; \varepsilon = \frac{1}{10\sqrt{\alpha}}.$$

   On prendra $h^* = 30$ m et on considèrera que le plongeur n'a pas d'air dans son gilet à $t = 0$.

4. On considère une consigne de profondeur destinée à faire remonter le plongeur de la profondeur $h^*$ à la profondeur $h_0 < h^*$ à une vitesse de 15 mètres par minute

$$h_d(t) = \begin{cases} h^*, & \text{si } t < t_1, \\ h^* + (t - t_1)\frac{h_0 - h^*}{t_2 - t_1}, & \text{si } t_1 \le t < t_2, \\ h_0, & \text{si } t \ge t_2, \end{cases}$$

où

$$\frac{h_0 - h^*}{t_2 - t_1} = -0.25.$$

Donner le contrôle $u$ obtenu par retour d'état non-linéaire permettant d'imposer cette consigne au système.

5. Ecrire un programme Matlab permettant de simuler le système avec le feedback trouvé à la question précédente pour $t \in [0, 180]$. On prendra les données suivantes,

$$h^* = 30 \text{ m}, \; h_0 = 6 \text{ m}, \; t_1 = 10 \text{ s},$$

et on considèrera qu'à $t = 0$ le plongeur est stabilisé. Voici l'allure des courbes à obtenir :