

Théorie des fonctions de croyance : applications en diagnostic et sûreté de fonctionnement

Thierry Denœux

Université de Technologie de Compiègne
HEUDIASYC, UMR CNRS 6599
<http://www.hds.utc.fr/~tdenoeux>

QUALITA 2011
Angers, 24 mars 2011



Gestion des incertitudes

- La problématique de **gestion des incertitudes** est fondamentale dans de nombreux domaines :
 - Diagnostic, pronostic ;
 - Sûreté de fonctionnement ;
 - Management des risques, etc.
- Différents types d'incertitudes :
 - Incertitudes **aléatoires**, induites par la **variabilité** de caractéristiques au sein de populations (irréductibles) ;
 - Incertitudes **épistémiques**, dues au caractère incomplet de la connaissance (réductibles).
- Formalismes classiques :
 - 1 Théorie des probabilités ;
 - 2 Méthodes ensemblistes.

Formalismes classiques

Théorie des probabilités

- Modèle **fréquentiste** :
 - Probabilités : grandeurs **objectives**, s'interprètent comme des **fréquences** ou des limites de fréquences ;
 - Représentation des incertitudes aléatoires.
- Modèle **bayésien** :
 - Probabilités : **grandeurs subjectives**, s'interprètent en termes de comportement en **situation de pari** ;
 - Représentation des incertitudes aléatoires et épistémiques.

Critiques de l'approche bayésienne

- 1 **Ambiguïté** : absence de distinction entre ignorance totale et équiprobabilité.
- 2 **Instabilité** : une distribution uniforme sur $X \in [a, b]$ induit généralement une distribution non uniforme sur $g(X)$ pour une fonction non linéaire g .
- 3 **Arguments expérimentaux** : en l'absence d'information, le comportement de décideurs ne peut pas toujours s'expliquer en supposant l'existence d'une distribution de probabilité subjective (paradoxe d'Ellsberg).

Formalismes classiques

Approche ensembliste

- La connaissance sur une variable X est décrite par un **ensemble de valeurs possibles E** (contrainte).
- Exemple : estimation à erreurs bornées
 - Soit un système dynamique décrit par les équations :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

- Problème : étant données des bornes sur les bruits et sur l'état initial, trouver un domaine garanti $\mathbf{X}_{k+1} \ni \mathbf{x}_{k+1}$.
- Avantage : simplicité des calculs dans certains cas (analyse par intervalles).
- Inconvénient : approche excessivement **conservative**.

Nouveaux formalismes

- Depuis les années 1970, de nombreux travaux en Intelligence Artificielle, Statistique, Economie, ont visé à proposer de **nouveaux formalismes** de représentations des incertitudes.
- Principaux formalismes :
 - Théorie des possibilités (Zadeh, 1978) ;
 - Théorie des probabilités imprécises (Walley, 1990) ;
 - **Théorie des fonctions de croyance** (Dempster, 1968 ; Shafer, 1976).

Théorie des fonctions de croyance

Généralités

- Formalisme introduit par Dempster (1968) et Shafer (1976), développé par Smets dans les années 1980 et 1990.
- Autres dénominations : théorie de Dempster-Shafer, théorie de l'évidence, Modèle des Croyances Transférables.
- Synthèse entre les approches **ensembliste** and **probabiliste** de représentation des incertitudes.
- Une fonction de croyance peut être vue comme
 - un **ensemble généralisé** et
 - une **mesure non additive**.

Théorie des fonctions de croyance

Applications

- Inférence statistique (Dempster, 1968) ;
- Systèmes experts (Gordon et Shortliffe, 1985) ;
- Fusion d'informations ;
- Classification, **diagnostic par reconnaissance de formes** (Appriou, 1991 ; Denœux, 1995 ; Denœux, 2000 ; etc.).
- **Fiabilité** (Dempster et Kong, 1988 ; Almond, 1995 ; Démotier, Schön & Denœux, 2006 ; Simon et Weber, 2009 ; Sallak, Schön & Aguirre, 2010, etc.)

Plan

- 1 Théorie des fonctions de croyance
 - Représentation de connaissances partielles
 - Fusion d'informations
- 2 Mise en œuvre en diagnostic et en fiabilité
 - Diagnostic sans modèle
 - Arbres de défaillance
 - Croyance sur la fiabilité d'un composant

Outline

- 1 Théorie des fonctions de croyance
 - Représentation de connaissances partielles
 - Fusion d'informations
- 2 Mise en œuvre en diagnostic et en fiabilité
 - Diagnostic sans modèle
 - Arbres de défaillance
 - Croyance sur la fiabilité d'un composant

Fonction de masse

Définition

- Soit une variable X à valeurs dans un ensemble fini Ω :
cadre de discernement.
- Une **fonction de masse (normalisée)** sur Ω est une fonction $m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que $m(\emptyset) = 0$ et

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

- Les parties A de Ω t.q. $m(A) > 0$ sont appelées **éléments focaux** de m .

Fonction de masse

Interprétation

- Une fonction de masse m modélise un **élément d'évidence** sur la valeur prise par la variable X .
- $m(A)$ s'interprète comme une mesure de la croyance **allouée exactement** à l'hypothèse $X \in A$, et à aucune hypothèse plus spécifique.

Exemple

- Un meurtre a été commis. Il y a 3 suspects :
 $\Omega = \{Pierre, Jean, Marie\}$.
- Un témoin a vu le meurtrier s'enfuir, mais il est myope et peut seulement attester que c'était un homme. On sait que le témoin est ivre 20 % du temps.
- Représentation de l'élément d'évidence :

$$m(\{Pierre, Jean\}) = 0.8,$$

$$m(\Omega) = 0.2$$

- La masse 0.2 n'est pas allouée à $\{Marie\}$, car le témoignage n'accuse absolument pas Marie !

Fonction de masse

Cas particuliers

- Fonction de masse **catégorique** (ou **logique**) :

$$m(A) = 1 \text{ pour un } A \subseteq \Omega$$

→ équivalente à un **ensemble**. La **fonction de masse vide**, correspondant à $A = \Omega$, représente l'ignorance totale.

- Fonction de masse **bayésienne** :

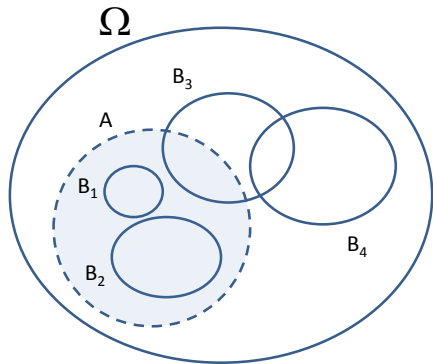
$$m(A) > 0 \Rightarrow |A| = 1$$

→ équivalent à une **distribution de probabilité**.

- Dans le cas général, une fonction de masse peut donc être vue comme :
 - un ensemble généralisé ;
 - une distribution de probabilité généralisée.

Fonctions de croyance et de plausibilité

Definitions



$$bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B)$$

$$pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B),$$

$$pl(A) \geq bel(A), \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Fonctions de croyance et de plausibilité

Interprétation et cas particuliers

- Interprétations :
 - $bel(A)$ = degré de croyance en A , justifié par l'élément d'évidence considéré.
 - $pl(A)$ = borne supérieure du degré de croyance susceptible d'être alloué à A après prise en compte de nouvelles informations.
- Cas particuliers :
 - Si m est bayésienne, $bel = pl$ (mesure de probabilité).
 - Si les éléments focaux sont emboîtés, pl est une mesure de possibilité, et bel est la mesure de nécessité duale.

Outline

- 1 **Théorie des fonctions de croyance**
 - Représentation de connaissances partielles
 - **Fusion d'informations**

- 2 **Mise en œuvre en diagnostic et en fiabilité**
 - Diagnostic sans modèle
 - Arbres de défaillance
 - Croyance sur la fiabilité d'un composant

Règle de Dempster

Définition

Soient m_1 et m_2 deux fonctions de masse issues de **sources indépendantes**.

	$m_1(B_1)$	$m_1(B_2)$	$m_1(B_3)$	$m_1(B_4)$
$m_2(C_3)$				
$m_2(C_2)$			$m_1(B_3) \times m_2(C_2)$	
$m_2(C_1)$				

$$(m_1 \oplus m_2)(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)}{1 - K}$$

avec $K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) m_2(C)$
(degré de conflit).

Règle de Dempster

Propriétés

- Commutativité, associativité.
- Élément neutre : fonction de masse vide.
- Généralisation de l'**intersection** : si m_A et m_B sont des fonctions de masse catégoriques et $A \cap B \neq \emptyset$, alors

$$m_A \oplus m_B = m_{A \cap B}$$

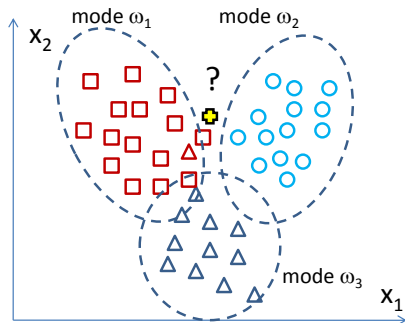
- Généralisation du **conditionnement probabiliste** : si m est bayésienne et m_A catégorique, alors $m \oplus m_A$ est la fonction de masse bayésienne correspondant au conditionnement de m par A .

Outline

- 1 Théorie des fonctions de croyance
 - Représentation de connaissances partielles
 - Fusion d'informations
- 2 Mise en œuvre en diagnostic et en fiabilité
 - Diagnostic sans modèle
 - Arbres de défaillance
 - Croyance sur la fiabilité d'un composant

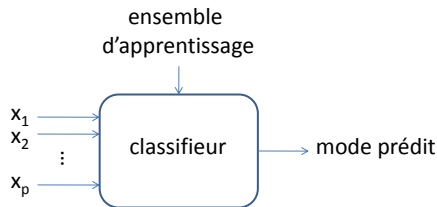
Diagnostic sans modèle

Problème



$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_c\}$$

- Pas de modèle explicite.
- Ensemble d'apprentissage de n exemples $(\mathbf{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^p \times \Omega$.



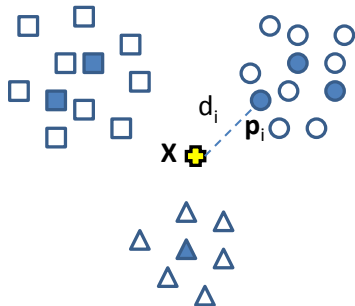
Diagnostic sans modèle

Intérêt des fonctions de croyance

- Problèmes pour lesquels l'information disponible est relativement "pauvre" :
 - Ensemble d'apprentissage non exhaustif ;
 - Données d'apprentissage non totalement représentatives des données acquises en conditions opérationnelles ;
 - Données **partiellement étiquetées** (connaissance imparfaite des classes pour les données d'apprentissage), etc.
- **Fusion d'informations** issues de différentes sources (capteurs, experts, algorithmes d'apprentissage, etc.).

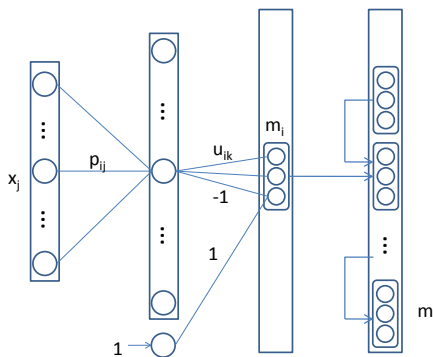
Réseaux de neurones évidentiels

IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics A, 30(2) :131-150, 2000.



- Ensemble d'apprentissage résumé sous forme de r **prototypes**.
- Chaque prototype \mathbf{p}_i est un **élément d'évidence** concernant la classe de \mathbf{x} .
- La **fiabilité** de cet élément d'évidence **décroît avec la distance d_i** entre \mathbf{x} et \mathbf{p}_i .

Réseaux de neurones évidentiels



- Fonction de masse induite par \mathbf{p}_i :

$$m_i(\{\omega_k\}) = \alpha_i u_{ik} \exp(-\gamma_i d_i^2),$$

$$k = 1, \dots, c.$$

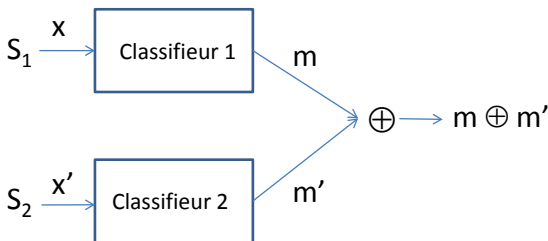
$$m_i(\Omega) = 1 - \alpha_i \exp(-\gamma_i d_i^2)$$

avec $u_{ik} =$ **degré d'appartenance** du prototype \mathbf{p}_i à la classe ω_k .

- Combinaison :

$$m = \bigoplus_{i=1}^r m_i$$

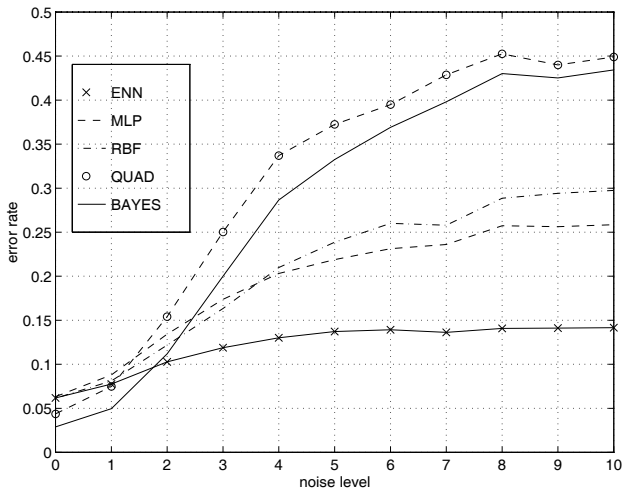
Exemple (fusion de décisions)



- $c = 2$ classes
- Ensemble d'apprentissage ($n = 60$) : $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$, distributions normales, conditionnellement indépendantes
- Ensemble de test (conditions opératoires réelles) :
 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \epsilon, \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$.

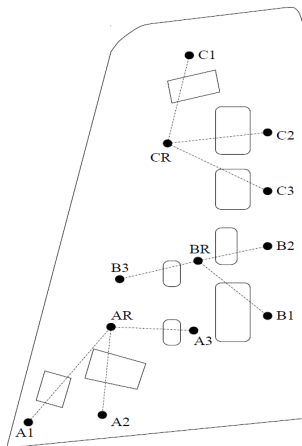
Resultats

Taux d'erreur de test : $\mathbf{x} + \epsilon$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$



Surveillance acoustique de structure

Mechanical Systems and Signal Processing 23(6) :1792-1804, 2009

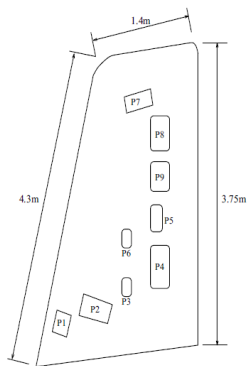


- 9 défauts (retrait des 9 panneaux d'inspection) → **$K = 9$ classes.**
- Mesures de transmissibilité par 12 capteurs acoustiques.
- 100 mesures pour chaque retrait d'un panneau d'inspection, avec 2 répétitions → **1800 observations.**
- Sélection de caractéristiques (algorithme génétique) : **4 variables**
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

Résultats

Réseau de neurones évidentiel

29 prototypes, taux de bonnes classifications 89.7 %.

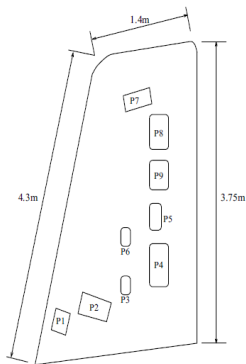


Prediction	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Θ
True Class 1	54	5	5	0	0	0	2	0	0	0
True Class 2	0	63	0	0	2	0	0	0	0	1
True Class 3	6	1	56	2	0	0	0	0	0	1
True Class 4	5	0	1	55	0	3	0	2	0	0
True Class 5	0	0	0	0	65	0	0	1	0	0
True Class 6	2	2	2	4	0	54	1	0	0	1
True Class 7	0	1	1	0	0	0	61	2	1	0
True Class 8	0	0	1	0	1	0	0	62	1	1
True Class 9	0	0	0	0	0	0	0	3	63	0

Résultats

Réseau de neurones évidentiel + Perceptron multi-couches

Taux de bonnes classifications 92.3 %.



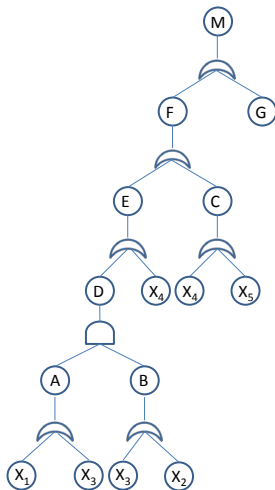
Prediction	1	2	3	4	5	6	7	8	9
True Class 1	63	2	0	0	0	0	1	0	0
True Class 2	0	64	0	0	2	0	0	0	0
True Class 3	0	1	55	6	0	0	2	2	0
True Class 4	0	1	2	59	0	1	0	3	0
True Class 5	0	0	0	0	65	0	0	0	1
True Class 6	1	2	0	6	0	57	0	0	0
True Class 7	0	0	0	0	0	0	60	5	1
True Class 8	1	0	0	0	1	0	0	63	2
True Class 9	0	0	0	0	0	0	0	4	62

Outline

- 1 Théorie des fonctions de croyance
 - Représentation de connaissances partielles
 - Fusion d'informations
- 2 Mise en œuvre en diagnostic et en fiabilité
 - Diagnostic sans modèle
 - **Arbres de défaillance**
 - Croyance sur la fiabilité d'un composant

Arbres de défaillances

Principe



- Formalisme largement utilisé dans les études de **fiabilité** des systèmes.
- Recensement de toutes les combinaisons d'événements pouvant entraîner un événement redouté en remontant jusqu'aux événements élémentaires.
- Les **probabilités** des événements élémentaires sont propagées pour calculer la probabilité de l'événement redouté.

Arbres de défaillances

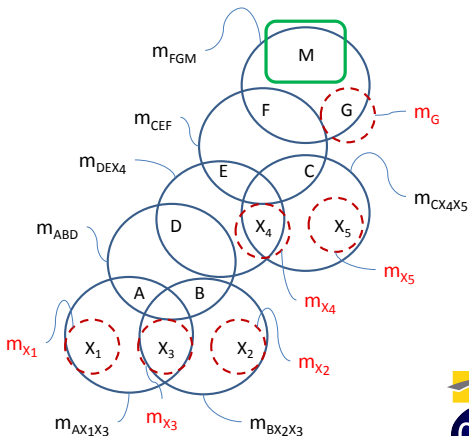
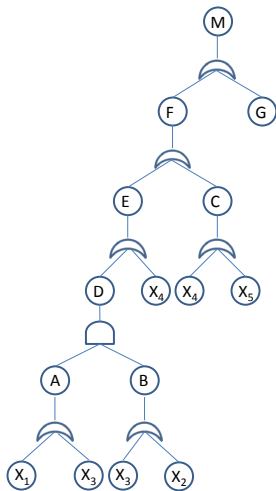
Extension aux fonctions de croyance

- Dans certaines applications les probabilités des événements élémentaires sont **mal connues** du fait de la rareté ou de l'absence de données de retour d'expérience.
- On peut alors exprimer l'incertitude (aléatoire et épistémique) sur les événements élémentaires sous forme de **fonctions de croyance**.
- Deux approches :
 - 1 Exprimer les arbres de défaillance sous forme de réseaux bayésiens et remplacer les probabilités marginales et conditionnelles par des fonctions de croyance (Simon et Weber, 2009) ;
 - 2 Représentation sous forme de **fonctions de croyances multidimensionnelles** (Kong, 1986 ; Almond, 1995 ; Sallak, Schön & Aguirre, 2010).



Fonctions de croyance multidimensionnelles

Exemple : arbre de défaillance (Dempster & Kong, 1988)



Hypergraphe

Fonctions de croyance multidimensionnelles

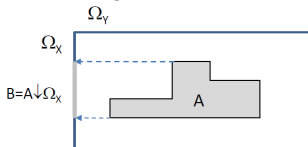
Principes de raisonnement

- Trois opérations fondamentales : règle de Dempster, **marginalisation**, **extension vide** :

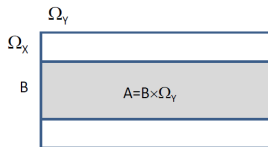
	U		$V \subseteq U$
marginalisation :	m_U	\longrightarrow	$m_{U \downarrow V}$
extension vide :	$m_{V \uparrow U}$	\longleftarrow	m_V

- Exemple : $U = \{X, Y\}$, $V = \{X\}$.

Marginalisation



Extension vide



Fonctions de croyance multidimensionnelles

Principes de raisonnement

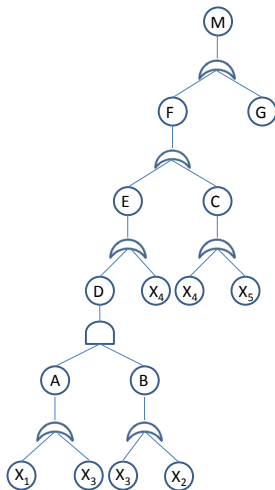
- La solution du problème précédent s'écrit :

$$m_T = (m_{U_1 \uparrow \mathcal{X}} \oplus \cdots \oplus m_{U_k \uparrow \mathcal{X}})_{\mathcal{X} \downarrow T}$$

- Des algorithmes efficaces (propagation-fusion : Kong, 1986) permettent de combiner les fonctions de masse en se plaçant dans des **cadres de discernement de dimensions minimales**.

Fonctions de croyance multidimensionnelles

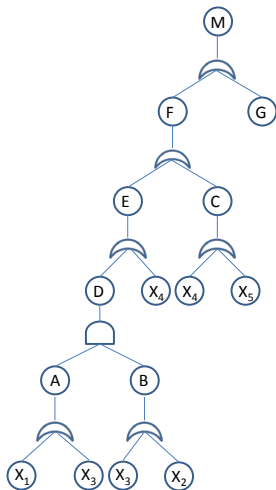
Exemple (suite)



Cause	$m(\{1\})$	$m(\{0\})$	$m(\{0, 1\})$
X_1	0.05	0.90	0.05
X_2	0.05	0.90	0.05
X_3	0.005	0.99	0.005
X_4	0.01	0.985	0.005
X_5	0.002	0.995	0.003
G	0.001	0.99	0.009
M	0.02	0.951	0.029
F	0.019	0.961	0.02

Fonctions de croyance multidimensionnelles

Exemple (suite et fin)



Cause	$m(\{1\})$	$m(\{0\})$	$m(\{0, 1\})$
<i>M</i>	1	0	0
<i>G</i>	0.197	0.796	0.007
<i>F</i>	0.800	0.196	0.004
⋮	⋮	⋮	⋮
<i>X</i> ₁	0.236	0.724	0.040
<i>X</i> ₂	0.236	0.724	0.040
<i>X</i> ₃	0.200	0.796	0.004
<i>X</i> ₄	0.302	0.694	0.004
<i>X</i> ₅	0.099	0.898	0.003

Outline

- 1 Théorie des fonctions de croyance
 - Représentation de connaissances partielles
 - Fusion d'informations
- 2 Mise en œuvre en diagnostic et en fiabilité
 - Diagnostic sans modèle
 - Arbres de défaillance
 - Croyance sur la fiabilité d'un composant

Fiabilité d'un composant

Hypothèses et exposé du problème

- Problème : comment **déterminer les fonctions de masse** relatives aux événements élémentaires dans les arbres de défaillance ?
- Hypothèse : le composant tombe en panne suivant un processus de Poisson avec un **taux de défaillance λ** .
- Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le composant tombe en panne dans }]0, t] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Problèmes : quantifier l'incertitude sur X à partir :
 - **D'une connaissance partielle sur λ fournie par des experts**
 - De données statistiques.



Fiabilité d'un composant

Détermination à partir d'une opinion

- La durée de vie W du composant suit une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$. Donc, $V = \lambda W \sim \mathcal{E}(1)$.
- Les 3 variables X , λ et V sont liées par la relation :

$$X = 1 \Leftrightarrow V/t \leq \lambda.$$

- Supposons que l'on sache seulement que $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$:
 - Si $V/t \leq \underline{\lambda}$, le composant est certainement en défaut, donc

$$bel(X = 1) = m_X(\{1\}) = 1 - e^{-\underline{\lambda}t}.$$

- Si $V/t > \bar{\lambda}$, le composant n'est certainement pas en défaut, donc

$$bel(X = 0) = m_X(\{0\}) = e^{-\bar{\lambda}t}.$$

- Par conséquent, $m_X(\{0, 1\}) = e^{-\underline{\lambda}t} - e^{-\bar{\lambda}t}$.

Fiabilité d'un composant

Détermination à partir d'une opinion (suite)

- Modèle plus général : l'expert exprime sa connaissance sur λ sous forme de r intervalles emboîtés

$$[\lambda_1, \bar{\lambda}_1] \supseteq \dots \supseteq [\lambda_r, \bar{\lambda}_r]$$

avec des **plausibilités** $1 = pl_1 \geq \dots \geq pl_r \geq pl_{r+1} = 0$.

- On en déduit une fonction de masse sur λ :

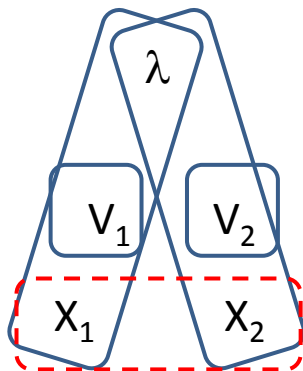
$$m_\lambda([\lambda_k, \bar{\lambda}_k]) = \mu_k = pl_k - pl_{k+1}, \quad k = 1, \dots, r.$$

- On alors :

$$bel(X = 1) = 1 - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-\lambda_k t}, \quad bel(X = 0) = \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-\bar{\lambda}_k t}$$

Fiabilité de deux composants

Problème



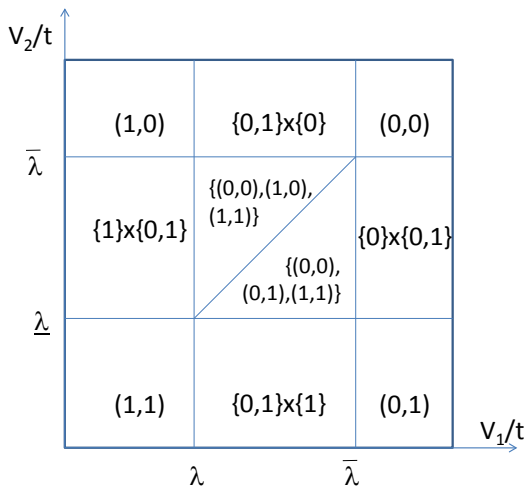
- Soient 2 composants (en série ou en parallèle) de même type.
- Problème : calculer la fonction de masse m_{X_1, X_2} relative à (X_1, X_2) .
- En général :

$$m_{X_1, X_2} \neq m_{X_1 \uparrow X_1, X_2} \oplus m_{X_2 \uparrow X_1, X_2}$$

Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes au sens évidentiel (épistémique).

Fiabilité de deux composants

Solution



Conclusion

- La théorie des fonctions de croyance constitue un **cadre très général** pour la représentation et la manipulation de connaissances partielles.
- Ce cadre est adapté à la **représentation des incertitudes** en diagnostic et SdF, particulièrement lorsqu'on se trouve confronté à :
 - Des **informations imparfaites** (données partiellement supervisées, capteurs peu fiables, etc.) ;
 - Une combinaison d'informations **objectives** (données) et **subjectives** (opinions d'experts, perceptions) : intégration d'informations a priori en classification, appréciation du contexte par des experts, etc. ;
 - Des **sources d'informations multiples** (fusion multi-capteurs, combinaison multi-experts, méthodes d'ensemble en classification supervisée ou non).



Pistes de recherche

- **Inférence statistique** à partir de données censurées, non totalement fiables, imprécises, partiellement représentatives, etc.
- **Elicitation** d'avis d'experts.
- **Fusion d'informations** :
 - Combinaison de données et d'avis d'experts ;
 - Combinaison multi-experts (gestion du conflit, de la non indépendance, etc.)
- ...

Références

Articles et sources Matlab disponibles à l'adresse :

`http://www.hds.utc.fr/~tdenoeux`

MERCI!