

Analyse de données sensorielles : une approche ordinale floue

P.-A. Hébert

Heuristique et Diagnostic des Systèmes Complexes – UMR CNRS 6599
Université de Technologie de Compiègne
BP 529 - F-60205 Compiègne cedex - France

hebert@hds.utc.fr

8 mars 2005

Table des matières

Introduction	7
1 Présentation de l'analyse sensorielle	9
1 Jeu de données	10
1.1 Nature de l'étude	10
1.2 Protocole d'acquisition des évaluations sensorielles	11
1.3 Des données sensibles	12
2 Principaux traitements statistiques	13
2.1 Présentation	13
2.2 Méthodes descriptives	13
2.3 Méthodes inférentielles	16
3 Analyses de données sensorielles classiques	19
3.1 Structure initiale des données	20
3.2 Performances des juges	20
3.3 Description des produits	23
4 Caractéristiques de l'approche choisie	23
4.1 Une approche ordinale	24
4.2 Une approche descriptive relative	28
4.3 Une approche floue	32
4.4 La logique floue en analyse de données sensorielles	33
5 Bilan de la présentation de l'analyse sensorielle	36

2	Les relations floues	37
1	Théorie des sous-ensembles flous	37
1.1	Concepts de base	37
1.2	Triplets de De Morgan	39
2	Relations floues	42
2.1	Rappels sur les relations classiques	42
2.2	Généralisation	45
2.3	Opérations sur les relations floues	47
3	Théorie des préférences	50
3.1	Théorie classique des préférences	51
3.2	Théorie des préférences floues	54
4	Bilan sur les relations floues	61
3	Construction des relations floues	63
1	Modèle	63
1.1	Relations de dominance	63
1.2	Nombres flous et paramètres	70
2	Agrégation <i>brute</i>	73
2.1	Principes	74
2.2	Type d'opérateur choisi	75
2.3	Définitions	75
2.4	Opérateur max	78
2.5	Opérateur <i>owa</i>	79
2.6	Agrégation sur les juges	86
3	Résolution du problème de transitivité	87
3.1	Description du problème	87
3.2	Procédure de transitivité - cas net	89
3.3	Cas où le produit d'agrégation brut utile est transitif affaibli	93
3.4	Procédure de transitivité - cas flou	94

3.5	Distinction entre sous-relations implicites et explicites	97
4	Détermination de la taille des nombres flous	98
4.1	Indicateur de pertinence et indicateurs de performance	98
4.2	Maximum de dominance	99
5	Bilan de la construction des relations floues	100
4	Représentation des relations floues	103
1	Analyse d'ordres partiels flous	103
1.1	Extension au flou de fonctions ordinales	103
1.2	Corrélation ordinale floue	108
1.3	Rangs flous	110
2	Restriction aux ordres d'intervalles flous	112
2.1	Rangs et pseudo-rangs	113
2.2	Approximation d'un ordre partiel flou	121
3	Outils de représentation	124
3.1	Méthodes de représentation multidimensionnelle imprécises	124
3.2	Représentations mono-descripteur	129
3.3	Représentations multi-descripteurs	139
4	Bilan de la représentation des relations floues	146
5	Démonstrations	149
5	Mise en oeuvre sur des profils sensoriels	157
1	Performances des juges	157
1.1	Discrimination des produits	158
1.2	Répétabilité	160
1.3	Consensus	161
2	Représentation des produits	170
2.1	Mono-descripteur	171
2.2	Multi-descripteurs	174

3	Bilan sur la mise en oeuvre sur des profils sensoriels	181
	Conclusion	183
A	Robustesse des relations ordinales floues	189
1	Evaluation des écarts aux relations de référence	190
2	Robustesse de combinaisons de mesures ponctuelles	191
3	Robustesse des répétitions uniques de mesures intervalles	192

Introduction

Originellement dédiée à des secteurs d'activités tels que l'agroalimentaire ou les cosmétiques, l'analyse de données sensorielles intéresse désormais d'autres domaines de production comme l'industrie automobile, où la dimension sensorielle ne compte pourtant pas parmi les arguments de vente principaux. Pour ces entreprises, la satisfaction du consommateur fait en effet l'objet d'une quête approfondie, dans laquelle aucune facette de sa relation au produit n'est délaissée, et ce jusqu'à ses perceptions tactiles ou olfactives. L'analyse des perceptions et des goûts du consommateur représentent par conséquent un enjeu d'importance.

Dans ce mémoire, nous décrivons une méthode d'analyse de profils sensoriels, c'est-à-dire de données recueillies auprès d'un échantillon d'individus appelés *juges*, afin d'évaluer la perception qu'ils ont d'un ensemble de produits, en fonction de différents critères sensoriels appelés *descripteurs*. L'objectif d'une telle analyse recouvre deux aspects fondamentaux : la description des produits selon les descripteurs, accompagnée de l'étude duale des interactions entre descripteurs, et la description des performances des juges en termes de discrimination, consensualité et reproductibilité des réponses. Cette dernière thématique apparaît légitime, car l'évaluation de l'intensité d'une perception représente un exercice complexe, qui nécessite en préalable un entraînement destiné à familiariser les juges avec les produits et descripteurs. Une fois les juges aptes à mesurer leurs perceptions selon chacun des descripteurs, les évaluations sont généralement répétées sur plusieurs séances, dans le double but d'éprouver la reproductibilité des juges, et d'accroître l'information de discrimination disponible.

La méthode que nous proposons doit son originalité à plusieurs aspects, dont le principal tient à un traitement ordinal flou. Nous avons en effet choisi de fonder notre méthode sur l'étude des relations d'ordre issues de la comparaison des mesures affectées aux différents produits, dans le but d'atteindre une plus grande robustesse. Mais de ce point de vue, les relations d'ordre classiques ne représentent pas une solution très satisfaisante. En particulier, il est raisonnable d'estimer les mesures empreintes d'une imprécision minimale, et l'ordre induit par deux valeurs très proches n'est donc pas nécessairement pertinent. D'une répétition à l'autre, on observe ainsi de fréquentes inversions entre les mesures voisines : la stabilité de la relation d'ordre apparaît très précaire. La théorie des sous-ensembles flous de Zadeh offre une solution beaucoup plus adaptée, à travers la notion de relation ordinale floue. Grâce à ce formalisme plus riche, il est en effet possible de relativiser chaque rapport de dominance d'un produit sur un autre par un degré d'incertitude, fonction de la distance entre les mesures correspondantes. En ce sens, la modélisation ordinale floue réalise un compromis entre la modélisation ordinale et la modélisation quantitative : par rapport à

une relation d'ordre classique, la relation ordinale floue intègre non seulement l'information ordinale, mais aussi une part de celle quantitative. L'autre particularité fondamentale de notre méthode tient à son mode d'analyse exclusivement descriptif. En amont de l'étude, les évaluations de chaque répétition sont ainsi décrites sous forme de relations ordinales floues. Des relations plus synthétiques peuvent ensuite être constituées par agrégation des relations initiales sur les répétitions ou sur les juges. Puis, un ensemble d'outils de représentation de ces relations permet de répondre aux différents objectifs de l'analyse de profils sensoriels.

Dans le chapitre 1, nous approfondirons la problématique de l'analyse de données sensorielles, puis nous décrirons un protocole d'évaluation standard, en nous appuyant sur l'exemple d'un jeu de données qui a permis d'illustrer notre méthode. Nous résumerons ensuite les différents traitements statistiques couramment mis en oeuvre pour ce type de données. Cette description sera suivie d'une discussion visant à justifier les choix des trois caractéristiques principales de notre méthode. Puis nous soulignerons les quelques incursions de la théorie des sous-ensembles flous que nous avons relevées en analyse sensorielle.

Le chapitre 2 débute par une présentation générale de la théorie des sous-ensembles flous, et se poursuit par la description de deux outils mathématiques étendus au flou : les relations définies sur un ensemble fini d'objets d'abord, puis la théorie des préférences, qui propose l'analyse de relations ordinales à travers une décomposition aisément interprétable.

Le chapitre 3 décrit le processus de construction des relations ordinales floues, qui modélisent chacune les perceptions exprimées par un juge, au cours d'une répétition, selon un descripteur. Nous développerons ensuite les techniques d'agrégation permettant de construire des relations plus synthétiques, représentatives d'un ensemble de répétitions ou de juges.

Le chapitre 4 présente l'ensemble des outils développés afin de révéler l'information contenue dans les relations ordinales floues, de façon à répondre à nos différents objectifs, qui sont les représentations des produits, des descripteurs et des performances des juges.

Finalement, le chapitre 5 propose la mise en oeuvre de l'ensemble de notre méthode sur le jeu de données type présenté en début de mémoire, ainsi qu'une comparaison avec des traitements classiques.

Les travaux de recherche que nous présentons ont été cofinancés par *PSA Peugeot Citroën* et le *CNRS* par le biais d'une bourse BDI. Ils ont été réalisés au sein du laboratoire HeuDiaSyC, UMR-CNRS 6599, en collaboration étroite avec le laboratoire sensoriel de *PSA Peugeot Citroën*.

Chapitre 1

Présentation de l'analyse sensorielle

Initiée par les entreprises agroalimentaires pour mieux cerner les besoins de leurs consommateurs, l'évaluation sensorielle [16][52] s'étend aujourd'hui à des secteurs industriels très divers : cosmétique, automobile, etc. Elle met en jeu deux parties : d'un côté, les produits susceptibles d'être proposés par l'entreprise, de l'autre les sujets susceptibles de consommer ces produits. Son objectif est de façonner idéalement les premiers pour satisfaire les seconds.

La réussite de cette opération repose essentiellement sur l'évaluation des produits par un ensemble de sujets. Selon la nature de cette évaluation sensorielle, on distingue deux grands domaines d'étude :

- hédonique : les différents produits sont évalués à travers leur *usage*, selon les préférences et goûts d'un panel d'individus représentatif des consommateurs potentiels, en général non entraînés ; ils délivrent des appréciations (« j'aime un peu, beaucoup, etc. ») ;
- descriptive et discriminative : l'intérêt de l'étude porte alors sur l'intensité perçue de caractéristiques différentiant les produits ; ces évaluations sont réalisées par un *panel de juges*, soit un petit groupe d'individus sélectionnés pour leurs aptitudes sensorielles et logiques, ainsi que pour leur motivation ; ils ont pour consigne « d'objectiver » leurs perceptions, c'est-à-dire d'éliminer tout jugement hédonique ; ils jouent donc le rôle d'instruments de mesure, et sont en général formés dans ce but.

Outre l'évaluation des perceptions des produits, l'analyse sensorielle a pour but de répondre à diverses questions comme :

- Quels attributs plaisent ou déplaisent ? Quelle est la formule de produit idéale ?
- Quelles sont les interactions entre les perceptions ?
- Comment évolue l'intensité des perceptions en fonction des modifications de la composition des produits ?
- Comment évoluent les perceptions lors de l'usage (mastication, etc.) ?
- Quelles classes de consommateurs peut-on discerner en fonction de leurs différences de préférences ?

Le cadre de cette thèse se restreint aux études purement descriptives (soit non hédoniques), et nous nous focalisons désormais sur cette seule problématique.

Ce chapitre présente l'analyse sensorielle descriptive, à travers la description des données utilisées, des outils statistiques usuels, et de leur application standard. D'autre part, il mentionne quelques traitements sensoriels alternatifs, qui exploitent la théorie des sous-ensembles flous. Enfin, il s'achève par une discussion justifiant l'approche ordinale floue qui fait l'objet de ce mémoire.

1 Jeu de données

A l'origine de cette thèse se trouve le souci de *PSA Peugeot Citroën* de développer une technique alternative d'analyse de profils sensoriels. Son laboratoire sensoriel a donc mis à notre disposition un jeu de profils sensoriels type, accompagné de son étude par des outils standards. Il est important de souligner que ces données ont été générées conformément à un protocole largement répandu dans la communauté sensorielle. L'ensemble des exemples présentés dans cette thèse ont été obtenus à partir de ce seul jeu de données. De même, il est à l'origine de l'étude comparative finale. Après la présentation des deux composantes majeures de l'étude, les produits et les évaluateurs, nous décrirons le déroulement de l'acquisition des données sensorielles.

1.1 Nature de l'étude

L'étude porte sur la caractérisation visuelle de huit plaques en plastique translucide. Dans le tableau 1.1, p. 10, les huit produits sont décrits en fonction de leurs caractéristiques physiques. Le *grain* correspond au modelé de la surface, *l'opacifiant* à la proportion de substance ternissant la matière, et la *teinte*, à la quantité de colorant.

Code	Nom	Grain	Opacifiant	Teinte
P1	G0-O0-T1	faible	0%	1%
P2	G0-O1-T4	faible	1%	4%
P3	G0-O2-T2	faible	2%	2%
P4	G0-O2-T1	faible	2%	1%
P5	G1-O0-T4	fort	0%	4%
P6	G1-O2-T1	fort	2%	1%
P7	G1-O3-T4	fort	3%	4%
P8	G1-O3-T2	fort	3%	2%

TAB. 1.1 – Description des produits

Le panel est composé de douze juges sélectionnés pour leurs aptitudes logiques et leur motivation. Nous les noterons de *J1* à *J12*.

1.2 Protocole d'acquisition des évaluations sensorielles

1.2.1 Organisation

L'acquisition sensorielle effectuée par le laboratoire sensoriel de *PSA Peugeot Citroën* correspond à une procédure standard, commune à la plupart des études descriptives. Elle se déroule suivant les phases suivantes :

1. Sélection par le panel des attributs caractéristiques des produits : au terme d'une discussion, les juges décident des qualificatifs permettant de discriminer les produits ; puis, pour chaque terme dégagé, les juges se mettent d'accord sur un protocole d'évaluation : par exemple, l'évaluation tactile de la granulométrie d'une plaque plastique consistera à passer ses doigts dessus, de droite à gauche ;
2. Entraînement des juges : dans un premier temps, des confrontations et discussions entre sujets permettent de s'assurer de leur bonne compréhension des attributs (calibrage) ; ensuite, les juges apprennent à estimer l'intensité de leurs perceptions, en contrôlant la stabilité de leurs réponses ;
3. Evaluations : celles-ci sont en général répétées trois fois, afin d'éprouver la variabilité des réponses.

Les deux premières phases ont duré une dizaine d'heures, et ont été échelonnées sur neuf séances réparties sur des jours différents. La dernière phase s'est déroulée sur trois séances également réparties sur des jours différents, chacune correspondant à une répétition donnée.

Le tableau 1.2.1, p. 11 présente la liste des attributs sélectionnés lors de la première phase.

Code	Nom	Description
A1	Opaque	non transparent
A2	Granuleux	taille des grains
A3	Marbré/veiné	quantité de veinules
A4	Brillant	qui réfléchit bien la lumière
A5	Vert	pureté de la teinte
A6	Clair/foncé	intensité de la couleur
A7	Nacré	reflet propre à la nacre
A8	Homogène	unité de la répartition de la couleur

TAB. 1.2 – Description des attributs

1.2.2 Mode d'évaluation

On distingue deux modes d'évaluations : *monadique* ou *comparatif*. Dans le premier, chaque produit est considéré individuellement : ainsi, un premier produit est évalué successivement sur chaque attribut ; puis c'est le tour du produit suivant. Au contraire, le

mode comparatif permet une évaluation plus relative : on s'occupe d'un premier descripteur, en fonction duquel tous les produits sont successivement évalués ; puis c'est le tour du suivant. Dans ce cas, les juges ont généralement un droit de regard sur les mesures déjà affectées. Il arrive même qu'ils disposent simultanément de l'ensemble des produits (à condition que les produits existent en plusieurs exemplaires identiques, et qu'ils soient suffisamment manipulables).

Le jeu de données exploité dans cette thèse a été obtenu par évaluation monadique.

1.2.3 Echelle

Les juges opèrent dans une cabine équipée d'un ordinateur où chacun des produits leur est tour à tour présenté. Une interface graphique leur présente une règle bornée, sur laquelle ils peuvent faire glisser un pointeur en manipulant une souris. Après validation de leur mesure, la position du pointeur par rapport aux deux extrémités de la règle détermine la note retenue.

La règle est non-structurée, ce qui signifie qu'elle est linéaire, continue et bornée : la borne minimale est marquée 0, celle maximale 10 ; un pointeur situé exactement en son milieu déterminerait donc la valeur 5.

Les deux bornes sont censées se rapporter, pour un attribut donné, aux deux produits extrêmes repérés consensuellement par le panel. Lors de l'apprentissage, les juges sont encouragés à identifier ces deux produits, et à s'en servir comme références de notation. Néanmoins, il arrive que, durant les répétitions, ces deux limites ne soient affectées à aucun des produits. Ceci est cependant moins fréquent pour la limite minimale lorsqu'elle renvoie à un degré zéro, correspondant à une absence de perception.

1.3 Des données sensibles

En dépit de la rigueur du protocole et de l'entraînement des juges, de nombreux facteurs rendent délicate l'interprétation des données recueillies. En voici une liste :

- protocole d'évaluation : l'ordre de présentation des produits peut en effet orienter les résultats ;
- difficulté à décrire un unique attribut, en faisant abstraction des autres, et de toute interférence hédonique ;
- complexité de la mesure elle-même : malgré l'entraînement, les juges n'ont pas nécessairement une parfaite maîtrise de la perception de l'attribut considéré ;
- les perceptions restent éminemment subjectives et donc sujettes à un contexte psychologique propre au juge, et à l'instant de la mesure ;
- précision arbitraire de la note : la plupart des systèmes d'évaluation utilisés exigent des juges une réponse très précise, qui ne prend pas en compte leurs hésitations et incertitudes.

Tous ces points critiques confortent, sauf cas particulier, la nécessité d'un entraînement du panel de juges, et d'un protocole d'évaluation très soigneusement conçu. Ils justifient également la nécessité des répétitions, pour un même juge et un même attribut, l'objectif

étant de s'affranchir d'un maximum de facteurs parasitant les perceptions.

Mais surtout, il apparaît clairement que l'analyse de données elle-même doit prendre en compte certaines caractéristiques inhérentes au domaine sensoriel, comme l'incertitude de la mesure.

2 Principaux traitements statistiques

2.1 Présentation

La diversité des techniques statistiques appliquées à l'évaluation sensorielle est grande, et nous nous restreignons d'emblée à celles destinées aux profils sensoriels dits conventionnels, c'est-à-dire constitués de mesures d'intensité de perception, effectuées par des juges par rapport à des attributs, sur une échelle non structurée.

Les profils sensoriels constituent une importante quantité d'information, qui doit être résumée au moyen de graphiques simples, ou de paramètres statistiques élémentaires, tout en conservant une richesse d'information satisfaisante.

Classiquement, on distingue deux types fondamentaux de méthodes d'analyse statistiques :

- les méthodes *descriptives*, visant à produire des représentations synthétiques de l'information, à partir des seules données brutes ;
- les méthodes *inférentielles* : ce sont des outils d'aide à la décision, qui placent les données dans un modèle théorique rendant compte de certaines fluctuations aléatoires, de façon à valider ou invalider certaines hypothèses. Ces méthodes se divisent elles-mêmes en deux branches principales : les méthodes paramétriques et non-paramétriques. Les premières considèrent en général que les mesures sont entachées d'une erreur modélisable par une famille de lois, dont les paramètres doivent être estimés. Les secondes s'appuient sur des hypothèses moins fortes, ce qui conduit par exemple à travailler sur des rangs plutôt que sur les mesures elles-mêmes.

Dans un premier temps, nous présentons quelques unes des méthodes communément appliquées aux profils sensoriels. En raison de leur grande variété, nous avons restreint notre choix aux méthodes les plus usuelles. Nous considérons l'étude classique d'individus décrits par des variables quantitatives, ou mesures.

2.2 Méthodes descriptives

2.2.1 Méthodes descriptives monodimensionnelles

La représentation des moyennes et variances calculées sur les individus pour chacune des variables est un outil synthétique qui délivre des informations intéressantes. Les *boîtes à moustaches* fournissent une représentation plus complète des distributions de mesures, et permettent de dégager les différences essentielles entre individus, ainsi que d'éventuelles valeurs aberrantes.

2.2.2 Méthodes descriptives bidimensionnelles

Les calculs de corrélations classiques, ou de corrélations de rangs, entre couples de descripteurs permettent de dégager des relations simples (linéaires dans le cas de la corrélation classique). Mais cela n'est pas toujours suffisant. Pour une relation plus complexe, il est préférable d'utiliser des graphiques croisés, ou *corrélogrammes* : en représentant chaque individu par un point dans le plan des deux variables considérées, ils mettent en évidence tout type de relation.

2.2.3 L'Analyse en Composantes Principales

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une technique multidimensionnelle descriptive très utilisée. Elle vise à fournir une représentation visuelle synthétique de données, présentées sous la forme d'un tableau individus \times variables. Le tableau est systématiquement centré en colonne, et souvent réduit (on considère alors que chaque variable est également informative).

L'ACP peut être considérée de deux manières :

- comme la recherche d'un ensemble réduit de variables non-corrélées, combinaisons linéaires des variables initiales, qui rendent compte d'un maximum d'information ;
- ou bien, le tableau initial peut être vu comme un nuage de points dans un espace géométrique de dimension égale au nombre de variables initiales ; et l'objectif est alors de déterminer un sous-espace dans lequel le nuage projeté est le plus proche du nuage initial.

La solution se présente sous la forme d'une séquence d'axes orthogonaux deux à deux, dits *axes factoriels*, ordonnés par ordre d'*inertie expliquée* décroissante, soit une mesure de variabilité. Les coordonnées des individus projetés sur ces axes constituent de nouvelles variables appelées *composantes principales*. Le nombre d'axes factoriels utiles est déterminé par le pourcentage d'inertie expliquée du sous-espace correspondant. Sauf dans le cas particulier où une variable initiale est exactement fonction linéaire des autres, l'inertie expliquée n'atteint les 100% que lorsqu'on recompose entièrement l'espace initial : soit lorsque le nombre d'axes factoriels rejoint le nombre de variables initiales. Mais là n'est pas l'objectif, puisqu'il s'agit de synthétiser l'information, en éliminant les dimensions peu informatives. Dès que le pourcentage d'inertie expliquée est jugé satisfaisant, on considère que la représentation des individus par les nouvelles variables résume bien l'information initiale. D'autre part, une autre représentation permet d'expliquer les nouvelles variables, en montrant leurs corrélations par rapport aux variables initiales.

Sur la figure 1.1, p. 15, on observe le résultat d'une ACP réalisée sur le tableau centré réduit (*produits \times attributs*), où les valeurs des attributs ont été obtenues après moyennage sur les répétitions et les juges. Seuls les deux premiers axes factoriels ont été retenus, car ils contiennent près de 80% de l'information initiale. Le premier axe, qui en explique 50%, met principalement en opposition le produit 7 et les produits 1 et 5.

Sur la figure 1.2, p. 15, chaque variable initiale est représentée par un point dont les coordonnées correspondent aux corrélations avec les axes factoriels. Le premier axe est ainsi fortement corrélé aux attributs *marbré*, *granuleux*, *vert* et *clair/foncé*, ce qui permet

de qualifier les produits précédemment cités. Le second axe, qui sépare les produits non discriminés par le premier, correspond essentiellement aux attributs *nacré* et *brillant*.

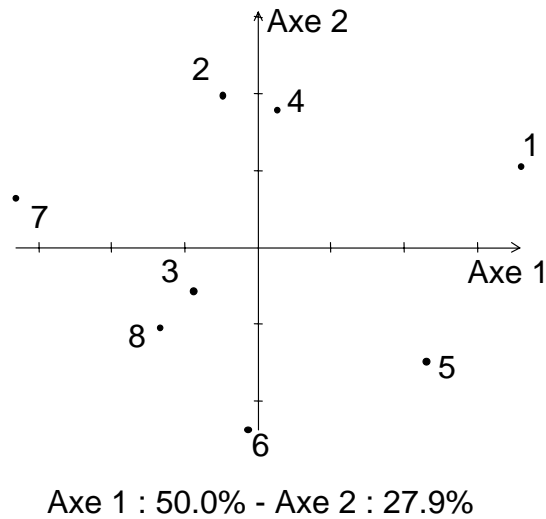


FIG. 1.1 – ACP, représentation des produits

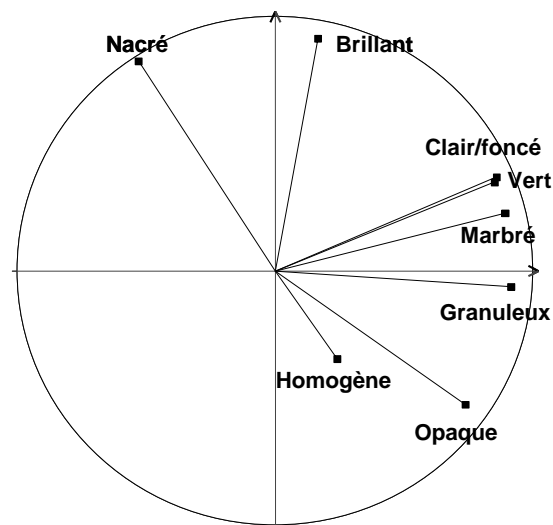


FIG. 1.2 – ACP, représentation des variables

2.2.4 Procustes et Statis

Procustes [26] et Statis [34, 33] sont des méthodes qui appliquent les principes de l'ACP à l'étude simultanée de plusieurs tableaux (*individus* \times *variables*), où les variables sont éventuellement différentes. En analyse sensorielle, les tableaux correspondent en général aux évaluations des différents juges. Procustes comme Statis permettent alors de dégager une représentation multidimensionnelle consensuelle. Une comparaison de ces méthodes a été réalisée par Qannari *et al.* [43], dans le cadre d'une étude sensorielle. On peut considérer

qu'elles procèdent en adaptant les nuages de produits centrés propres à chaque juge, grâce à des transformations contraintes : rotations et homothéties. Celles-ci sont explicites dans Procustes, ce qui permet l'analyse précise des différences d'utilisation des variables entre juges. Une variante de Procustes proposée par Qannari *et al.* [44] améliore l'interprétation de l'une de ces transformations, la dilatation, en décomposant le coefficient de dilatation propre à chaque juge en un indicateur de performance représentant son caractère consensuel, et un facteur d'adaptation de sa représentation par rapport à celles des autres juges. Un indicateur de performance global est également proposé, pour juger de l'homogénéité des réponses entre les juges.

Ces méthodes conviennent principalement à des analyses sensorielles de *profils libres*, pour lesquelles chaque juge décide de ses attributs d'évaluation. En revanche, dans la situation contraire où les juges sont entraînés à utiliser, de façon homogène, un même ensemble de descripteurs, l'utilisation de ces méthodes est moins justifiée.

2.3 Méthodes inférentielles

2.3.1 L'analyse de la variance

L'analyse de la variance (présentée dans [48]) est une technique paramétrique d'analyse inférentielle dont l'objectif est l'étude de l'impact de variables qualitatives (ou de leurs combinaisons) sur une variable quantitative. Les variables qualitatives sont appelées *facteurs*, et leurs modalités *niveaux*. Lorsque l'analyse de la variance conclut significativement au pouvoir discriminant d'un facteur, cela signifie qu'au moins deux de ses niveaux influencent différemment la variable quantitative. C'est donc un test global, qui appelle souvent des tests plus précis (comparaison de modalités deux à deux).

L'analyse de la variance est basée sur des hypothèses fortes :

- la distribution de la variable quantitative est gaussienne ;
- sa variance est supposée constante, soit indépendante des facteurs considérés ;
- les observations sont supposées indépendantes.

On caractérise l'analyse de la variance selon le nombre de facteurs étudiés.

Prenons le cas d'une analyse de la variance à un facteur, pour une variable quantitative X . On considère un facteur donné, organisé en I niveaux, pour chacun desquels on dispose de n_i observations notées x_{ij} , avec $j \in \{1, \dots, n_i\}$. Le modèle de l'analyse de la variance correspondant s'écrit :

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1 \dots I, \quad j = 1 \dots n_i,$$

où ε_{ij} suit une loi normale centrée de variance σ^2 .

La valeur μ_i représente l'espérance des observations de X du niveau i . Elle est généralement décomposée de la façon suivante :

$$\mu_i = \mu + \alpha_i,$$

où α_i représente l'effet du niveau i , et μ la moyenne théorique de l'ensemble des observations (indépendamment de leur niveau). Une valeur α_i positive indique par exemple une

supériorité en moyenne des valeurs du niveau i par rapport à celles des autres niveaux. Les effets α_i sont régis par l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^I n_i \alpha_i = 0.$$

La moyenne μ s'écrit par conséquent :

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^I n_i \mu_i,$$

où N désigne le nombre total d'observations : $N = \sum_{i=1}^I n_i$.

L'hypothèse nulle de l'analyse de la variance consiste en l'indépendance de la variable quantitative X par rapport au facteur étudié :

$$H_0 = \{\mu_i = \mu, \forall i = 1, \dots, I\} = \{\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, I\}.$$

Le test s'effectue alors en calculant, sur l'ensemble des valeurs observées x_{ij} , le rapport entre la variance moyenne inter-modalité et la variance moyenne intra-modalité. Si ce rapport est supérieur à une valeur F dite de Fisher, on rejette l'hypothèse nulle, en concluant à la significativité de l'influence du facteur considéré. La valeur F est choisi pour un seuil donné : le risque de première espèce, qui représente la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie (les valeurs les plus usitées sont 1%, 5%, ou 10%).

Plutôt que de donner le résultat du test pour une erreur de première espèce fixée, on présente souvent un degré de signification (*p-value* en anglais), défini comme la plus petite valeur du risque de première espèce pour laquelle l'hypothèse nulle est rejetée. En effet, l'influence d'un facteur peut toujours être attestée, au prix d'une erreur de première espèce suffisamment élevée, et le degré de signification renseigne sur la valeur minimale de cette erreur. Ainsi, pour un seuil fixé à 1%, seuls les effets dont le degré de signification est inférieur à 1% sont estimés significatifs. On peut ainsi parler d'effets significatifs à 1%, 5%, etc.

L'analyse de la variance est généralisable à plusieurs facteurs. On obtient alors des modèles de ce type :

– en ajoutant un facteur :

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk},$$

où x_{ijk} est la $k^{\text{ième}}$ observation de la variable X , pour la modalité i du premier facteur, et la modalité j du second facteur. Les effets des deux facteurs étudiés sont respectivement représentés par les α_i et β_j .

– en prenant en compte l'interaction entre les deux facteurs :

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

où θ_{ij} est l'effet d'interaction entre la modalité i du premier facteur et la modalité j du second.

– la méthode est généralisable pour tout nombre de facteurs.

2.3.2 Le test paramétrique de Duncan

L'analyse de la variance à un facteur permet de tester l'influence d'un facteur sur une variable. Mais lorsque le facteur considéré a plus de deux modalités, une réponse positive reste assez peu satisfaisante : elle se limite à prouver l'existence d'au moins une paire de modalités, qui différencient significativement les mesures. Le problème suivant est souvent de déterminer lesquelles, parmi ces modalités, se distinguent significativement des autres, et comment. Pour un facteur donné, une solution consiste à effectuer des tests de Student entre chaque paire de modalités : c'est la procédure *LSD* (Least Significant Difference method) de Fisher [24]. Le test de Duncan [19] représente une alternative plus satisfaisante, car il offre une information similaire, avec un nombre de tests plus faible. Son objectif est ainsi de minimiser le nombre d'erreurs de première espèce commises, tout en maintenant le caractère conservateur des tests réalisés. De cette façon, la *probabilité d'erreur d'ensemble*, c'est-à-dire la probabilité qu'au moins une erreur de première espèce se produise, est en moyenne réduite. Ce résultat est obtenu en cherchant à réaliser des tests « globaux », c'est-à-dire des tests traitant simultanément un maximum de modalités. En effet, lorsqu'un test d'analyse de la variance débouche sur l'équivalence d'un groupe de modalités, toute investigation ultérieure au sein de ce groupe devient inutile : les modalités sont estimées égales, et leurs comparaisons par paires sont évitées.

Considérons un facteur donné, décliné en I modalités ordonnées par moyennes croissantes (c'est-à-dire que l'on trie les moyennes des valeurs observées sur les modalités). On suppose qu'une analyse de la variance a attesté de la significativité de l'effet du facteur étudié. La procédure, de type récursif, consiste à tester l'effet sur des ensembles de modalités adjacentes de plus en plus restreints.

Au cours du processus, un sous-ensemble de k modalités adjacentes subit le traitement suivant :

- la différence entre les moyennes de la 1^{ière} et de la k ^{ième} modalité, est comparée à un seuil critique fonction de l'erreur de première espèce choisie α et du nombre de modalités testées k .
- Si la différence mesurée est inférieure au seuil, les k modalités sont déclarées équivalentes (c'est-à-dire non-significativement distinctes), et les investigations sur les éléments de ce sous-ensemble cessent. Dans la représentation finale, les k modalités seront surlignées d'une barre verticale.
- Si, à l'inverse, la différence excède le seuil critique, les $(k - 1)$ premières modalités, comme les $(k - 1)$ dernières, sont alors traitées de la même manière.

La procédure est initialisée sur les $(I - 1)$ premières modalités, et les $(I - 1)$ dernières.

Sur la figure 1.3, p. 19, on observe le résultat d'un test de Duncan effectué sur le facteur produit (dont les huit niveaux correspondent aux huit produits évalués) pour le descripteur *marbré* ; les moyennes sont obtenues sur l'ensemble des juges et répétitions. Chaque bâtonnet représente un produit, et sa hauteur est proportionnelle à la moyenne des mesures. On constate que seuls quatre groupes sont franchement démarqués, les produits 1, 8 et 4 étant même individualisés. Au sein du groupe (6, 2, 3, 5, 7), les réponses sont moins tranchées : par exemple, le groupe de produits « équivalents » (non distingués) (6, 2) domine le groupe (3, 5, 7), mais les produits adjacents 2, 3 et 5 sont néanmoins estimés non significativement distincts.

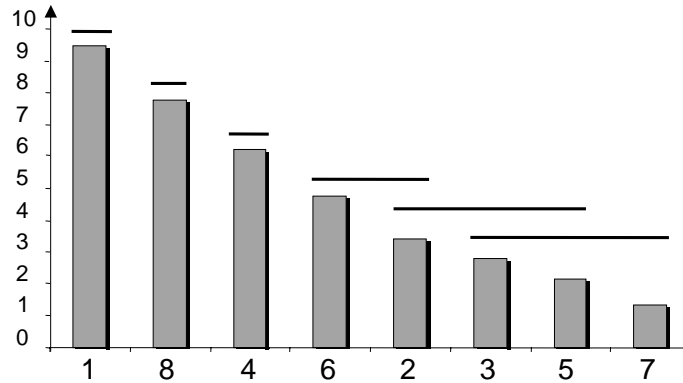


FIG. 1.3 – Test de Duncan sur le descripteur *marbré*

La situation idéale correspond au cas où chacune des modalités est significativement distincte de ses voisines (autant de groupes que de modalités). Lorsque des groupes se chevauchent, l'interprétation des résultats devient moins évidente.

2.3.3 Le test non-paramétrique de Kruskal-Wallis

Il s'agit d'une méthode inférentielle analogue à l'analyse de la variance à un facteur, mais dont le modèle est non-paramétrique, ce qui permet une meilleure robustesse. Le test ne porte pas sur les moyennes des observations propres à chaque modalité, mais sur les moyennes des rangs qu'elles induisent.

Sous l'hypothèse nulle selon laquelle le facteur étudié n'influence pas la variable quantitative, les rangs moyens de chacune des modalités sont censés être plus ou moins égaux. On construit alors un critère d'erreur quadratique pénalisant les écarts entre les rangs moyens et le *rang ex-aequo*, moyenne des rangs de toutes les observations : l'espérance de la moyenne des rangs pour chaque modalité sous l'hypothèse nulle. Sous l'hypothèse nulle, l'erreur quadratique suit approximativement une loi du χ^2 , et on peut donc tester sa significativité en fonction d'une erreur de première espèce donnée. Si l'erreur est significative, alors l'hypothèse nulle est rejetée, et le facteur est jugé discriminant.

Lorsque les données sont appariées (c'est-à-dire si à toute combinaison de modalités obtenue sur l'ensemble des facteurs, correspond un même nombre de valeurs observées), on peut utiliser le test de Friedman [16].

3 Analyses de données sensorielles classiques

L'étude statistique des profils sensoriels répond essentiellement à deux objectifs :

- l'évaluation des performances des juges : cette analyse est en général effectuée en amont de l'étude, afin de vérifier la qualité de l'entraînement ;
- la description des produits : l'analyse statistique vise à mettre en évidence les différences de perceptions entre produits, mais aussi à étudier la variabilité des

réponses (inter et intra-produits, inter et intra-juges). On débute fréquemment l'analyse descripteur par descripteur, pour ensuite les traiter globalement, grâce à des techniques multidimensionnelles.

Ces objectifs sont généralement atteints en appliquant les techniques classiques précédemment résumées. Avant de décrire un protocole standard d'acquisition de données sensorielles, nous allons étudier l'importance de la structure de données choisie.

3.1 Structure initiale des données

Pagès [41] remarque que les profils sensoriels peuvent être envisagés sous la forme d'un cube tridimensionnel, les dimensions correspondant respectivement aux produits, juges et descripteurs. En considérant la dimension des répétitions, on obtient donc un hypercube de dimension quatre.

On considère ainsi I produits, J juges, K descripteurs et L répétitions. Et on note x_{ijkl} la valeur affectée par le juge j , au produit i , pour le descripteur k , lors de la répétition l .

On note $IJKL$ l'hypercube des données ainsi considérées : à la case de coordonnées (i, j, k, l) correspond la mesure x_{ijkl} . Si l'on considère avec Pagès le cas général où la dimension des répétitions est ignorée, on travaillera donc avec le cube IJK , où chaque valeur a été moyennée sur les répétitions.

Ce cube peut être considéré de plusieurs façons, chacune orientant l'étude dans une direction particulière :

- une juxtaposition spatiale de K tableaux (*produits* \times *juges*), notés chacun $(IJ)_k$; ces tableaux sont analysés indépendamment les uns des autres dans les approches monodimensionnelles (principalement par analyse de la variance);
- une juxtaposition spatiale de J tableaux (*produits* \times *descripteurs*); c'est le point de vue de l'analyse multidimensionnelle des produits; on peut étudier la moyenne de ces J tableaux (notée IK), ou plus finement leurs juxtapositions planes : $I(JK)$ (on considère les I tableaux $(JK)_i$ en colonne) ou $(IJ)K$ (on considère les K tableaux $(IJ)_k$ en ligne);
- une juxtaposition spatiale de I tableaux (*juges* \times *descripteurs*); c'est le point de vue de l'analyse multidimensionnelle des juges; on peut étudier la moyenne de ces I tableaux (notée JK), ou de façon plus fine leurs juxtapositions planes : $J(IK)$ ou $(IJ)K$.

Chacun de ces tableaux correspond donc à un point de vue sur les données. Pagès souligne le rôle central du tableau $(IJ)K$ que l'on retrouve aussi bien dans l'étude des produits que dans celle des juges.

3.2 Performances des juges

Les performances des juges [52] sont principalement évaluées selon les trois critères suivants :

- la *discrimination*, soit leur capacité à distinguer les produits les uns des autres par rapport au descripteur considéré ;
- le *consensus*, qui peut être vu comme l’aptitude globale du panel à décrire les produits de manière homogène, ou comme l’aptitude individuelle d’un juge à rejoindre la description consensuelle du panel ;
- la *répétabilité*, soit la capacité d’un juge à maintenir sa description des produits lors des différentes séances d’évaluation.

Une évaluation de la performance globale du panel peut être menée à l’aide d’une analyse de la variance à trois facteurs (*produit, juge et répétition*) pour chaque descripteur. Les effets des facteurs et de leurs combinaisons conduisent aux interprétations suivantes :

- effet *produit* : au moins deux produits sont différenciés (test de la discriminabilité du panel) ;
- effet *juge* : au moins deux juges utilisent différemment l’échelle de notation (test de l’homogénéité de la notation) ;
- effet *répétition* : au moins deux répétitions sont différenciées, pour l’ensemble des juges et produits (ce qui paraît a priori peu vraisemblable, si l’acquisition se déroule dans un environnement contrôlé) ;
- interaction (*produit* \times *juge*) : pour l’ensemble des répétitions, au moins deux couples (produit, juge) sont différenciés ; ce qui dénote des divergences portant chacune sur un juge et un produit particuliers (test de consensus) ;
- interaction (*produit* \times *répétition*) : pour l’ensemble des juges, au moins deux couples (produit, répétition) sont différenciés, ce qui dénote des divergences portant chacune sur une répétition et un produit particuliers (test de la constance des produits au cours du temps) ;
- interaction (*répétition* \times *juge*) : pour l’ensemble des produits, au moins deux couples (répétition, juge) sont différenciés, ce qui dénote des divergences portant chacune sur une répétition et un juge particuliers (test de la répétabilité du panel).

Cette analyse permet donc une description de la performance globale du panel. Toutefois, la significativité des effets considérés ne fait que traduire la marginalité d’une unique paire de modalités. L’analyse traduit donc assez mal la « globalité » de la performance du panel, au sens où il ne s’agit pas d’une performance moyenne. Pour cette raison, cette analyse est généralement suivie d’une étude détaillée des performances individuelles.

Les mesures de performances individuelles sont conduites sur chaque descripteur. Selon le formalisme de Pagès, les indicateurs de discrimination et de répétabilité seront calculés sur les tableaux $(IL)_{jk}$. Quant aux indicateurs de consensus, ils dépendront principalement des tableaux I_k (mesures moyennées sur les juges et répétitions, présentées par descripteur), I_{jk} et $(IJ)_k$.

La liste des indicateurs décrits n’est bien entendu pas exhaustive, nous avons principalement évoqué ceux en vigueur chez *PSA Peugeot Citroën*.

3.2.1 Discrimination

Une méthode couramment utilisée pour mesurer la discrimination consiste à effectuer une analyse de la variance à un facteur, pour étudier l'effet produit chez chacun des juges. Pour un juge considéré, les mesures sont donc moyennées sur les répétitions. Lorsque le degré de signification du test est inférieur au niveau choisi, on conclut à la discriminabilité du juge. Cet indicateur n'est donc pas très riche. Dans le cas d'un effet produit positif, un test de Duncan par juge, suivi du dénombrement des groupes complètement indifférenciés permettrait d'affiner l'évaluation de la discrimination.

P. Schlich [52] préconise l'utilisation d'une moyenne des écarts-types inter-répétition : plus les produits sont systématiquement démarqués les uns des autres sur chacune des répétitions, plus cette moyenne est élevée. Cependant, avant de pouvoir considérer cette mesure comme une marque de qualité du juge, il faut encore vérifier la cohérence des discriminations entre les répétitions. C'est justement l'objet de la mesure de répétabilité.

3.2.2 Répétabilité

On utilise en général l'erreur résiduelle issue de l'analyse de la variance du facteur produit calculée par juge. Cet indicateur correspond en effet à l'estimation de la variance (supposée constante pour tout produit i et répétition l) de la variable aléatoire ε_{il} . On peut également se servir de l'effet répétition mesuré à l'aide d'une analyse de la variance à deux facteurs (produits + répétitions).

3.2.3 Consensus

Un moyen de vérifier la concordance des réponses des juges consiste à comparer les mesures propres à chaque juge moyennées sur les répétitions, avec celles obtenues par moyennage des juges et répétitions. On peut ainsi calculer une mesure de corrélation robuste comme le tau de Kendall [32], coefficient de corrélation de rangs sur lequel nous reviendrons dans le chapitre 4 (section 1.2.1, p. 108). Næs [38] propose l'utilisation d'une représentation graphique baptisée *coquille d'oeufs*[30]. Basée sur le coefficient de corrélation de rangs de Spearman (corrélation classique appliquée à des rangs), elle permet de visualiser la concordance des relations ordinales entre les juges, tout en mettant en évidence le caractère consensuel de chacun.

Des graphes individuels représentant les moyennes des produits sur les répétitions permettent assez simplement de s'assurer de la cohérence entre les juges.

Une ACP conduite sur le tableau centré-réduit (*produits* \times *juges*) (soit $(IJ)_k$), par le biais de la représentation des « variables juges », permet de s'assurer que leurs réponses sont correctement corrélées. Dans le cas idéal, un seul axe factoriel suffit, et chaque « variable juge » est très proche de l'axe dégagé.

Une autre technique envisageable consiste à mener une analyse de la variance sur les facteurs produits et juges, pour mettre en évidence leur interaction. Notons à ce propos les travaux de Couronne [8], qui permettent de représenter ces interactions par le biais d'ACP

conduites sur des versions adaptées du tableau (*produits* \times *juges*).

3.3 Description des produits

Lors des évaluations finales, les performances des juges sont souvent mesurées à titre indicatif : il est rare qu'un juge correctement entraîné fasse preuve d'un comportement nécessitant un retrait de l'étude. En particulier, une haute valeur de consensus n'est pas scrupuleusement exigée. En général, on considère donc que l'ensemble des juges participent à l'étude.

3.3.1 Description monodimensionnelle

Les produits sont d'abord décrits descripteur par descripteur. On effectue usuellement une analyse de la variance du facteur produit sur les tableaux $(IJL)_k$. Lorsque le test est positif, un test de Duncan[20] permet de mettre en évidence les groupes de produits isolés par l'ensemble des juges.

On peut également décider de travailler sur les rangs, en utilisant le test de Friedman.

3.3.2 Description multidimensionnelle

C'est essentiellement le rôle des techniques descriptives factorielles, comme l'ACP. On peut l'appliquer de différentes manières :

- sur le tableau IK : les axes factoriels sont déterminés après avoir moyenné les mesures sur les répétitions et descripteurs ; souvent, on projette ensuite les tableaux $(IK)_j$ sur les axes obtenus de façon à mettre en évidence les différences entre juges ; l'interprétation des écarts entre produits est permise grâce à la représentation duale de l'ACP (celle des variables) ;
- sur les tableaux $I(JK)$ ou $(IJ)K$: les axes factoriels tiennent alors compte de la variabilité des juges.

4 Caractéristiques de l'approche choisie

L'approche proposée dans cette thèse se démarque par plusieurs aspects de celles classiquement réservées à l'étude statistique de profils sensoriels. Elle est tout d'abord *ordinaire*. On entend par là le rejet de la modélisation de l'information quantitative, à laquelle on préfère une information de type qualitative, rendant compte des rapports de supériorité entre produits. Cela signifie notamment que notre analyse ne répond à la question des distances inter-produits, qu'en terme d'écarts de rangs.

Cependant, l'information quantitative contenue dans les profils sensoriels n'est pas complètement ignorée. En effet, l'approche est plus exactement *ordinaire floue*. Elle s'insère ainsi dans le cadre de la théorie des sous-ensembles flous, de manière à enrichir chaque rapport

ordinal entre produits, d'un degré de certitude (ou possibilité). Celui-ci découlera directement d'une modélisation *floue* de l'imprécision des mesures recueillies.

L'approche est d'autre part essentiellement *descriptive*. Les outils proposés ne reposent sur aucune autre hypothèse que celle d'une imprécision modélisable par la théorie des sous-ensembles flous. Nous ne retenons donc pas le modèle classique de l'analyse de la variance, et les résultats de l'analyse des profils sensoriels seront purement descriptifs.

Enfin, notre approche est de type *relative*, car les mesures associées aux produits sont analysées conjointement sur chacune des répétitions, les unes par rapport aux autres, et non pas au terme d'un processus d'agrégation sur les répétitions par moyenne.

Nous allons maintenant justifier chacun de ces choix.

4.1 Une approche ordinale

L'analyse exclusivement ordinale de l'analyse de profils sensoriels représente une approche originale. Comme nous l'avons expliqué auparavant, les modèles les plus couramment usités sont en effet dérivés de l'analyse de la variance, où la distribution des mesures affectées à un même produit lors des différentes répétitions est supposée gaussienne. La moyenne des mesures sur les répétitions sert à estimer l'intensité de la perception ressentie par le juge pour le produit considéré. Un traitement sur l'ensemble des juges peut ensuite mettre en évidence une valeur d'intensité consensuelle, utilisable dans des tests statistiques ou des représentations à une ou plusieurs dimensions.

L'ordinal n'est pourtant pas étranger au domaine sensoriel. A l'analyse de la variance, nous avons vu que l'on peut préférer les tests de Kruskal-Wallis ou de Friedman, qui permettent de travailler sur les rangs. La concordance des juges est parfois étudiée à l'aide des coefficients de corrélation ordinale de Kendall ou de Spearman. D'autre part, les résultats consensuels décrivant la perception globale de l'ensemble de produits par le panel de juges, peuvent être présentés sous la forme d'un test de Duncan : l'information synthétisée est alors purement qualitative. Toutes ces techniques usuelles représentent donc des traitements ordinaux. Cependant, elles sont fréquemment utilisées en complément de techniques quantitatives, le modèle quantitatif n'étant pas complètement rejeté.

L'originalité de notre approche tient donc au choix de considérer les profils sensoriels comme une source d'information exclusivement ordinale. L'extraction de cette information est effectuée tout-à-fait en amont de l'analyse, et les profils eux-mêmes sont ensuite définitivement abandonnés. Cependant, comme nous l'avons déjà précisé, l'information quantitative des profils sensoriels n'est pas ignorée, puisque mise à profit dans l'évaluation de la mesure de certitude associée aux relations ordinales. Elle n'est donc plus interprétée comme une « quantité » ou « distance », mais comme une précision ou certitude de l'information qualitative.

Ce choix du traitement ordinal flou plutôt que purement quantitatif, ou « absolu », est motivé par plusieurs arguments que nous allons maintenant développer.

4.1.1 Un rejet du quantitatif

Dans les méthodes d'analyse de profils sensoriels, il est souvent admis que les profils sensoriels ont une valeur quantitative. On juge ainsi que les mesures fournies par les juges sont directement corrélées aux intensités des stimuli, ou du moins que les écarts entre mesures sont corrélés aux écarts d'intensités.

Plus précisément, deux modèles sont classiquement reconnus pour modéliser la relation entre intensité de stimulus et mesure par le juge, dite « objective ». Pour Fechner [21] [52] [16], une sensation ne peut jamais être mesurée directement, l'homme étant réduit à rendre compte de différences de sensation. Les différences sont mesurées sur une échelle d'intervalle. Il pose que l'intensité de la sensation varie linéairement avec le logarithme de la grandeur du stimulus.

Contrairement à Fechner, Stevens [49][52][16] considère que l'évaluation directe est possible, par rapport à un stimulus témoin. Les mesures sont effectuées sur une échelle de rapport. Il pose que c'est le logarithme de l'intensité de la sensation qui varie linéairement avec le logarithme de la grandeur du stimulus.

Les différences entre ces deux modèles se justifient par celles de leurs protocoles d'évaluation : ils ont tous deux été validés expérimentalement, au moins pour certains stimuli, dans certaines conditions, et sur certaines plages de variations.

Fechner et Stevens s'accordent donc sur le fait que les écarts d'intensité entre stimuli peuvent être rendus quantitativement par le cerveau humain. Cependant, l'instabilité propre aux données sensorielles semble témoigner de la difficulté de cette performance.

En effet, ainsi qu'on l'a déjà évoqué, l'être humain n'est que difficilement assimilable à un instrument de mesure. L'entraînement améliore la stabilité de ses réponses sur les répétitions, mais de grandes fluctuations persistent. Manifestement, de nombreux facteurs perturbateurs subsistent, en particulier d'ordre psychologique, et il semble impossible de s'en abstraire totalement.

Pour le jeu de données sur les plaques translucides, nous avons bénéficié d'un nombre de répétitions bien supérieur (17) aux 3 conventionnelles, ce qui nous a permis de constater l'occurrence des phénomènes suivants :

- Entre différents juges pour un même descripteur, il est assez fréquent de constater des écarts importants entre les moyennes des mesures d'un même produit, malgré des variances intra-juges faibles (cf. figure 1.4, p. 26). L'hypothèse d'une valeur centrale (espérance) des mesures commune à tous les juges n'apparaît alors pas évidente ;
- pour un même juge et descripteur, on constate parfois une évolution régulière des mesures propres à un produit donné au cours des répétitions (cf. figure 1.5, p. 26), alors que l'on peut considérer les produits comme immuables. Il semble alors difficile de considérer les écarts à la moyenne comme purement aléatoires, et il paraît préférable d'imaginer une fluctuation de l'intensité de la perception, ou tout du moins de sa mesure ;
- d'autre part, pour un même juge et un même descripteur, la variance des mesures affectées à un même produit peut être assez importante au regard de la taille de l'échelle, principalement pour les produits plutôt situés au centre de l'échelle (cf.

figure 1.6, p. 27). Même sous l'hypothèse d'une distribution des évaluations sur les répétitions, par produit, on peut donc douter de la précision de l'estimation de son espérance sur 3 répétitions.

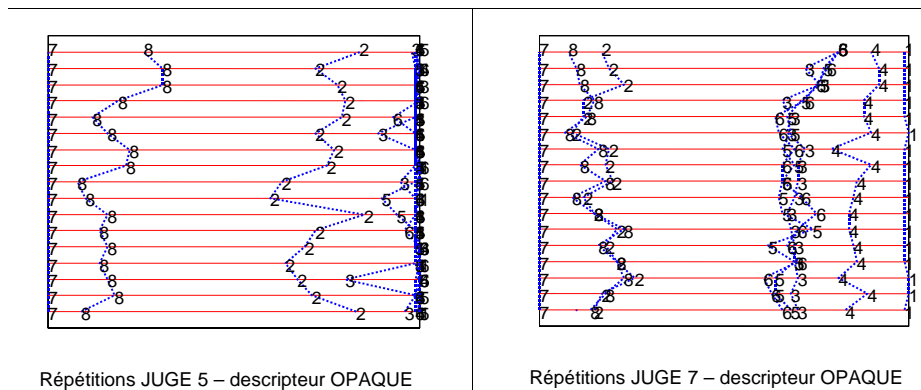
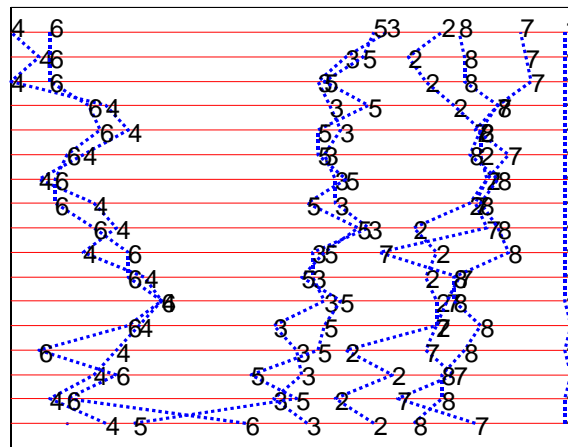


FIG. 1.4 – Exemple de divergences entre deux juges pour un même descripteur : en particulier, le produit 2 est fort chez le juge 5, et faible chez le juge 7

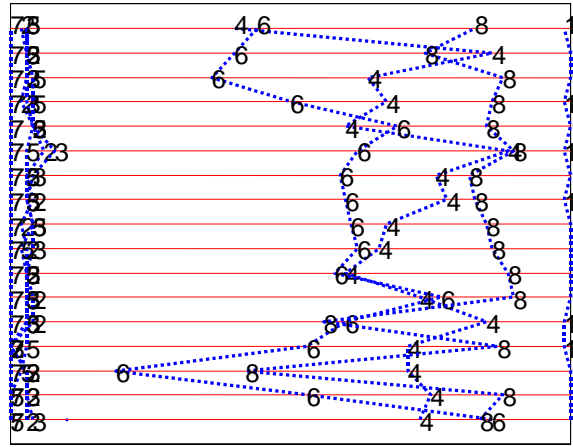


Répétitions JUGE 4 – Descripteur BRILLANT

FIG. 1.5 – Exemple d'évolution régulière des mesures : on remarque une légère tendance des évaluations à se démarquer du centre (de bas en haut : répétitions 1 à 17)

Ces phénomènes ne sont pas toujours présents, mais ils permettent néanmoins de souligner la difficulté de quantifier les écarts de perception entre produits.

Dans le domaine du continu, le langage humain tend plutôt à utiliser des appréciations qualitatives. La taille d'un individu est ainsi exprimée à l'aide d'une hiérarchie d'épithètes : « géant », « de taille moyenne », « petit », etc. D'une certaine manière, l'information recèle cependant une indéniable valeur quantitative : au sein d'une population donnée, ces termes renvoient en effet à des plages consensuelles de valeurs. On peut considérer le référentiel de taille comme discrétisé, de façon imprécise ou « floue », et limitée : les qualificatifs de taille couramment utilisés sont très peu nombreux.



Répétitions JUGE 2 – Descripteur GRANULEUX

FIG. 1.6 – Exemple de forte variance des produits « moyens »

Il arrive aussi que la taille d'un individu soit exprimée sous forme d'intervalles. Mais la rareté d'une description spontanément quantitative tend à laisser croire que cette opération n'est pas « naturelle ». On peut considérer qu'il y a de nouveau discrétisation, peut-être plus précise, mais qui reste cependant limitée.

Il semble donc clair qu'il est possible de « quantifier » l'intensité des sensations : il s'agit plus précisément d'associer une intensité à la référence en mémoire la plus proche. Dans le cas de l'évaluation de la taille, la discrétisation du référentiel est habituellement faible (quelques « valeurs » qualitatives), mais il est concevable d'améliorer cette performance par un entraînement, d'autant plus important que la précision exigée est grande.

Cependant, l'appréciation d'une longueur représente une situation très particulière, où la mesure physique correspondante existe, et fait l'objet d'une utilisation tout-à-fait généralisée, du moins dans certaines situations types : on a tous en tête une idée assez précise d'une taille d'1,50m ou de 1,70m. Mais, toujours dans ce cas particulier de la longueur, l'évaluation de certaines valeurs peut déjà sembler moins évidente : la distance entre deux lieux : 20m ou 30m ? 100m ou 200m ? La diagonale d'un écran d'ordinateur, 15 ou 17 pouces ? Dès que l'on sort de situations balisées, où les références sont moins présentes, la mesure se fait plus délicate : dans le cas de la longueur, on peut cependant avoir recours à des comparaisons et interpolations, parce que nous disposons d'un grand nombre de références. Mais dans le cas contraire, et particulièrement lorsque la mesure physique n'est pas connue, les références disparaissent, et la mesure devient plus hasardeuse.

Finalement, on peut considérer que l'évaluation quantitative est sous-tendue par une évaluation relative à un référentiel préalablement mémorisé et habituellement restreint. Le problème de l'évaluation sensorielle quantitative tient dans les moyens et le temps nécessaires à l'élaboration d'un référentiel qui permette à l'intensité des écarts de perception rendus de faire sens. Si le descripteur est nouveau, ou rarement employé par le juge, son référentiel risque d'être initialement vide. L'entraînement sera-t-il alors suffisant pour lui permettre d'élaborer un référentiel assez riche ? Quelques séances ne suffisent peut-être pas

à un tel processus. Mais surtout, s'il n'est construit qu'à partir des seuls objets à évaluer, on peut douter de sa qualité : si l'ensemble de produits n'est pas de taille suffisante, on peut en effet imaginer que le référentiel conçu soit insuffisamment discrétisé, jalonné. La notation serait alors une fonction monotone de l'intensité de la perception, mais un référentiel plus riche pourrait permettre de préciser cette fonction, jusqu'à lui donner une forme bien différente : les expériences de Fechner et Stevens à l'origine de telles fonctions sont habituellement conduites sur de grandes quantités de stimuli. Autrement dit, dans le cas d'un système de références trop pauvre, les écarts de mesures ne sont pas nécessairement corrélés aux écarts d'intensité de perception.

Ces considérations permettent de mettre en doute la capacité des juges à quantifier l'intensité de leurs perceptions, ce qui tend à légitimer une modélisation non-quantitative, et la réduction d'information qu'elle implique.

4.1.2 Du qualitatif à l'ordinal

Le rejet du quantitatif ne nécessite pas automatiquement le recours à l'ordinal : on peut imaginer la solution intermédiaire d'un traitement qualitatif, avec différentes modalités d'évaluation ordonnées (« très faible », « faible », etc.), non quantifiées. Cela impliquerait un partitionnement de l'échelle utilisée par les juges selon ces modalités, de façon à convertir les données initiales en termes qualitatifs. Tout le problème tiendrait alors au choix du partitionnement. Si on l'envisage identique chez tous les juges, cela revient à considérer qu'ils se sont spontanément construit un référentiel commun (l'entraînement n'allant pas jusque là en termes directifs) : tel produit doit être globalement situé en tel endroit de l'échelle. Cela équivaldrait par conséquent à une évaluation de type quantitative, que l'on a estimée peu vraisemblable. Un partitionnement propre à chaque juge, avec un nombre de modalités particulier serait plus adéquat. Cela supposerait toutefois que les juges soient capables de maintenir leurs repères au cours des répétitions, ce qui n'est pas non plus assuré.

Le traitement ordinal, parce qu'il ne nécessite pas ce problème de partitionnement, paraît donc plus aisé.

4.2 Une approche descriptive relative

Notre choix d'une analyse descriptive des évaluations *répétition par répétition* découle de la difficulté à modéliser la distribution des mesures fournies par les juges au cours des répétitions. Dans le paragraphe précédent, nous avons souligné leur difficulté à évaluer quantitativement les produits. Mais si la moyenne des mesures associées à un produit ne traduit pas directement l'intensité du stimulus qu'il représente, la distribution des mesures reste susceptible d'être modélisée.

Cela n'apparaît cependant pas évident. D'une part, la concordance des mesures entre juges semble assez délicate. L'hypothèse d'une même loi de distribution des mesures répétées par produit et descripteur pour l'ensemble des juges n'est donc pas parfaitement justifiée.

D'autre part, la solution usuelle que représente le modèle de l'analyse de la variance est critiquable à d'autres égards, même si l'on considère les distributions de mesures juge par juge :

- L'hypothèse d'égalité de la variance des mesures sur les produits apparaît discutable. Des études [47] ont montré que l'imprécision était inégale suivant les produits, et variait en fonction de la position de la valeur moyenne de leurs mesures sur l'échelle : plutôt élevée au centre, et faible aux extrémités. Nous avons effectivement constaté ce phénomène, comme le montre la figure 1.7, p. 29, représentant le graphe des écarts-types des mesures sur les répétitions, en fonction de leur valeur moyenne (chaque point correspond à la distribution de mesures d'un produit évalué par un juge selon un descripteur particulier). Nous avons également constaté que cette variance était inégale suivant les juges ;
- Chez certains juges et pour certains descripteurs, les distributions de mesures propres à un produit donné ne sont pas nécessairement unimodales. C'est ce que l'on constate sur la figure 1.8, p. 30, notamment pour le produit 5, évalué par les juges 5 et 9 ;
- L'hypothèse d'indépendance des mesures n'apparaît pas non plus évidente. En effet, sous l'hypothèse d'une distribution des mesures stable sur les répétitions, pour chaque produit et selon chaque juge, on a relevé plusieurs cas d'une corrélation manifeste des mesures entre produits (cf. figure 1.9, p. 30) : au cours d'une même répétition, lorsqu'un produit est sur-noté ou sous-noté par rapport à la moyenne de ses mesures sur les répétitions, les mesures des produits voisins suivent globalement la même tendance.

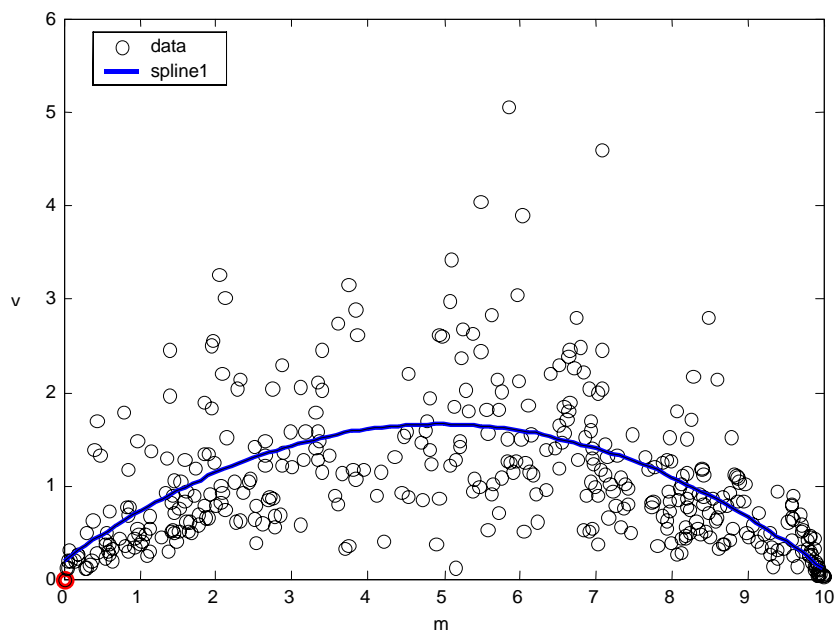


FIG. 1.7 – Ecarts-types des distributions de mesures en fonction de leur moyenne. La courbe représente la fonction polynômiale d'ordre 2 minimisant le critère des moindres-carrés sur l'ensemble des observations

Ce dernier point sur l'indépendance des mesures souligne un autre aspect intéressant de l'évaluation sensorielle. On peut en effet se demander si le relatif ne prime pas sur

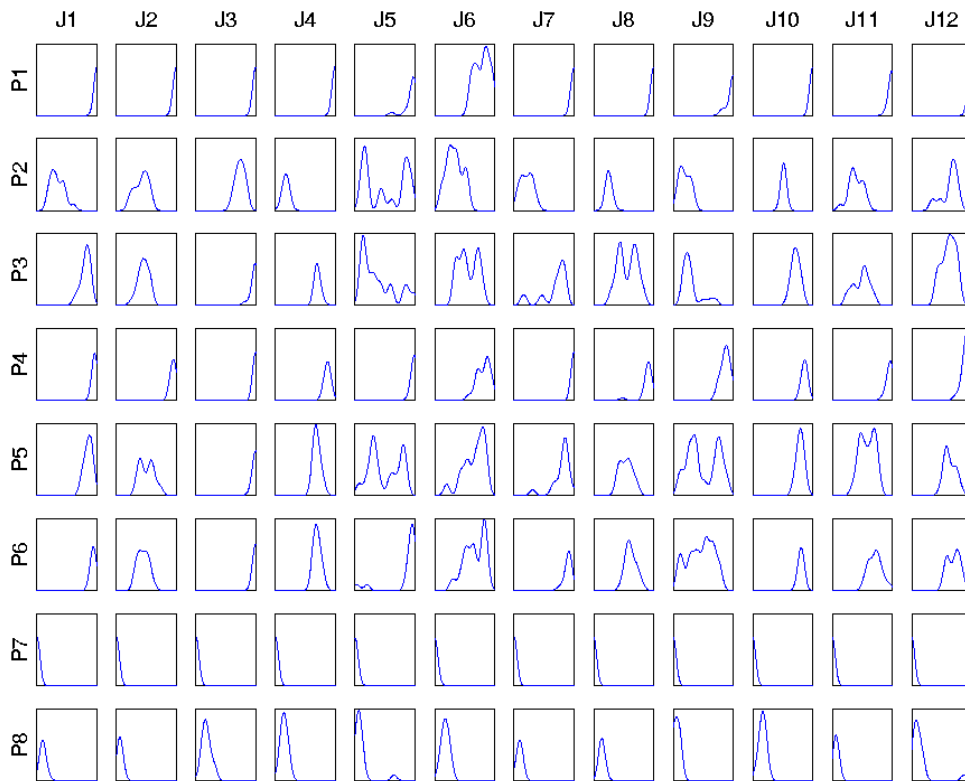
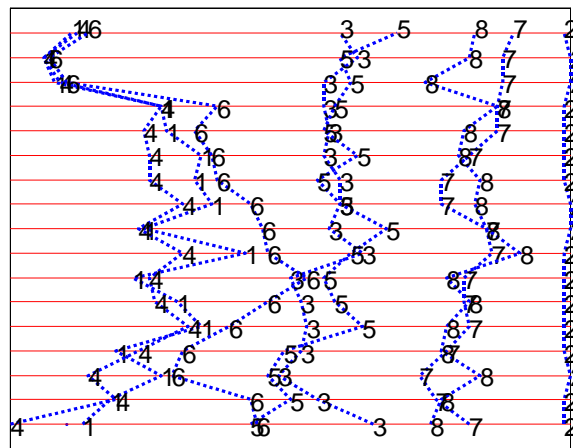


FIG. 1.8 – Distributions des mesures pour le descripteur OPAQUE, estimées par la méthode de Parzen



Répétitions JUGE 7 – Descripteur NACRE

FIG. 1.9 – Exemple de dépendance entre mesures : le groupe de produit (1, 4, 6) subit en particulier de fortes variations sur les répétitions. Pourtant, leurs écarts relatifs restent stables, principalement sur les répétitions du haut de la figure : leurs mesures apparaissent donc corrélées

« l'absolu » dans les évaluations des juges. En effet, Fechner considère qu'un juge ne peut apprécier un écart entre deux produits, qu'à la condition de lui soumettre simultanément la paire concernée. L'évaluation se fait donc sur un mode relatif. Pour Stevens, l'évaluation directe est réalisable par rapport à un stimulus témoin. Mais là encore, on peut considérer le mode d'évaluation comme relatif, puisqu'une référence physique est nécessaire. Enfin, dans les protocoles standards d'évaluation sur échelle d'intervalle, on admet couramment l'utilité d'inciter les juges à faire correspondre des produits physiques aux bornes de l'échelle.

Si l'on pose comme acquis ce mode d'évaluation relatif, on peut facilement concevoir que les produits extrêmes ne constituent pas nécessairement les seules références exploitées par le juge : tout autre produit peut très bien servir de référence (ce qui est évident en évaluation comparative). Dans ce cas, l'indépendance des mesures ne serait pas acquise, et un modèle « absolu » comme celui de l'analyse de la variance conduirait à une perte d'information. En effet, les mesures de chaque produit sont interprétées individuellement, l'ordre sous-jacent n'étant ensuite recherché qu'à travers leurs moyennes (test de Duncan). Par conséquent, l'information relative de chaque répétition, portant sur les rangs et écarts entre produits, est en partie perdue. De même, les tests de Friedman ou de Kruskal-Wallis n'apparaissent pas mieux adaptés à la gestion de cette information relative : en substituant les rangs aux mesures, ils appauvrissent l'information quantitative, sans pour autant opérer de traitement relatif (les rangs sont en effet gérés comme des mesures absolues).

Dans cette hypothèse d'un mode d'évaluation relatif, il convient donc déjà d'appliquer un traitement statistique qui prenne en compte cette relativité, de façon à préserver l'intégrité de l'information ordinale.

Cependant, cette hypothèse n'est pas absolument requise. En effet, le simple constat de la difficulté à expliquer les variations des mesures sensorielles par un modèle probabiliste simple comme celui de l'analyse de la variance, nous conduit assez naturellement à une analyse descriptive répétition par répétition. En effet, sans garantie d'indépendance entre les mesures, ni d'existence d'une loi de distribution des mesures sur les répétitions, nous préférons une simple approche *descriptive*, où chaque répétition est traitée indépendamment des autres. En terme d'interprétation, cela revient à considérer chaque séance d'évaluation (ou répétition) comme une expérience unique, avec son contexte propre. L'analyse précèdera donc l'agrégation sur les répétitions, au contraire de ce qui est fait dans les méthodes intégrant l'analyse de la variance.

Cette façon de procéder a l'avantage de permettre le traitement des *aberrations*. En effet, le jeu de données mis à notre disposition comporte de nombreux exemples de variations apparemment incohérentes sur les répétitions : des mesures habituellement régulièrement ordonnées peuvent se trouver brusquement désorganisées (cf. produit 3 de la figure 1.10, p. 32) ; ou bien, des produits peuvent être régulièrement inversés, avec des écarts de mesure importants. Si, dans ce dernier cas, on considère que ces grands écarts traduisent des discriminations volontaires du juge, alors il est sans doute préférable de souligner ces inversions, plutôt que d'obtenir une mesure intermédiaire par moyenne. L'analyse par répétition suivie de l'agrégation adéquate permettra précisément cet arbitrage.

En définitive, nous optons donc pour une méthode descriptive *relative*, au sens où les mesures entre produits seront analysées relativement les unes aux autres, au sein d'une même répétition. Des résultats plus synthétiques seront ensuite obtenus, après agrégation

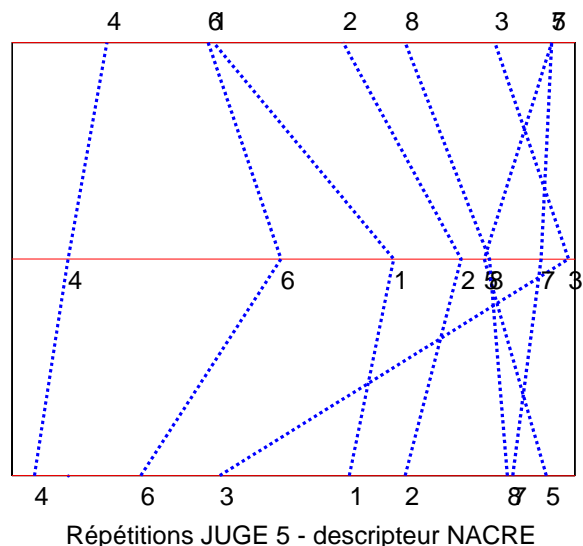


FIG. 1.10 – Exemple d'évaluation aberrante : produit 3

sur les répétitions, puis sur les juges.

4.3 Une approche floue

Indépendamment de l'approche choisie, on peut considérer que les mesures composant les profils sensoriels sont entachées d'une part d'imprécision. L'imprécision existe, ne serait-ce qu'en raison de la continuité de l'échelle : toutes les décimales ne peuvent être imputées à la volonté (ou conscience) du juge.

Mais notre préoccupation concerne exclusivement l'imprécision des relations ordinales extraites de chacune des répétitions. Car, bien que plus robuste que l'information purement quantitative, l'information ordinale reste imprécise.

Dans le cas monadique, cette imprécision est particulièrement évidente. En effet, le juge n'ayant pas accès aux mesures déjà affectées, il aura notamment des difficultés à marquer les relations d'ordre qu'il perçoit, ou pourrait percevoir, entre des produits très similaires : leurs mesures risquent d'être attribuées grossièrement, avec l'unique souci de positionner globalement le groupe de produits par rapport aux produits extrêmes. Pour ces produits proches, l'incertitude des mesures est reportée directement sur leurs relations ordinales. C'est pourquoi il est essentiel de la prendre en compte.

L'imprécision propre au mode comparatif est de nature différente. En effet, si l'on considère la même situation d'un groupe de produits très similaires, le juge dispose alors de la possibilité de vérifier la concordance entre les rapports ordinaux des mesures, et les rapports ordinaux des intensités de perception correspondantes. L'imprécision de l'information ordinale apparaît donc beaucoup plus réduite. Elle n'en est cependant pas absente, car il se peut que le juge ne soit pas complètement certain des relations ordinales exprimées. Dans une telle situation de doute, il aura naturellement tendance à produire de timides écarts de mesures pour marquer les discriminations incertaines. Les mesures correspondantes se

trouvant ainsi rapprochées, il suffit donc de considérer une incertitude des mesures pour relativiser les relations ordinales douteuses. Là encore, la modélisation d'une incertitude des mesures permet donc de rendre compte de l'imprécision des rapports ordinaux.

Quel que soit le mode d'évaluation utilisé, on considère donc l'hypothèse d'une mesure imprécise comme essentielle.

Ce postulat est présent dans de nombreuses méthodes d'analyse statistique des profils sensoriels, et conduit le plus souvent à recourir au cadre probabiliste. Mais notre choix d'évacuer les hypothèses habituelles du modèle de l'analyse de la variance, et de considérer les répétitions individuellement, rend l'analyse probabiliste moins adéquate. Nous préférons donc nous orienter vers la théorie des sous-ensembles flous, qui permet une gestion à la fois simple et satisfaisante de l'imprécision.

L'analyse statistique proposée sera donc essentiellement *floue* : l'imprécision attachée aux données initiales sera prise en compte d'emblée, puis répercutée dans l'ensemble de la chaîne de traitement. Nous nous tournons donc vers une *modélisation ordinale floue*.

4.4 La logique floue en analyse de données sensorielles

La théorie des sous-ensembles flous a d'ores et déjà réalisé plusieurs incursions dans le domaine de l'analyse de données sensorielles. Cependant, elle reste encore très marginale, et en particulier, il n'existe à ce jour qu'un nombre très réduit de techniques floues d'analyse exploratoire de données appliquées aux profils sensoriels. Nous en décrirons trois exemples dans une première partie, puis nous présenterons dans la seconde une autre utilisation du flou propre au domaine sensoriel, qui tend à se généraliser : le problème de prédiction de réponses sensorielles. Nous essaierons de comparer les principes mis en jeu dans ces méthodes, avec ceux à l'origine de notre modélisation ordinale floue.

4.4.1 Technique floue d'analyse de profils sensoriels

Nous nous référons d'abord au travail de I. Urdapilleta et C. Brouard [52], intitulé « Analyse de profils sensoriels par une méthode basée sur le principe de diffusion et la théorie des ensembles flous ». À partir de valeurs attribuées par un panel de juges sur une échelle à items verbaux ordonnés (« absent », « très faible », « faible », etc.), cette méthode permet de calculer pour chaque produit, un *ensemble flou* représentant l'intensité consensuelle de perception du produit selon le descripteur considéré. Cet ensemble, défini sur l'échelle verbale, est dit « flou », car il se caractérise non pas par un ensemble classique d'items verbaux (par ex. « faible OU très faible »), mais par une fonction associant un degré d'appartenance à chacun de ces items (cf. la présentation des ensembles flous, dans la section 1, chap. 2, p. 37). La modularité de ces degrés offre une représentation pertinente de l'imprécision des évaluations.

Ces ensembles flous sont dans un premier temps construits à partir de la distribution des réponses des juges, puis corrigés en vertu d'un principe de diffusion : toute valeur attribuée par un juge (soit un unique item verbal choisi sur l'échelle) est reconsidérée comme un ensemble flou de valeurs. Les auteurs postulent en effet que, si la valeur sélectionnée corres-

pond effectivement à l'intensité de perception du juge, c'est aussi le cas des valeurs voisines, bien qu'avec des degrés moindres. Ces degrés sont évalués en fonction des similarités entre les items, exprimées par les juges lors d'une étude préalable.

Par conséquent, l'imprécision traduite par les ensembles flous décrivant la perception consensuelle de chacun des produits, provient de deux sources : d'une part la diversité des réponses des juges, et d'autre part le rejet de la précision des réponses individuelles.

Nous retrouverons en partie cette gestion de l'imprécision dans nos représentations consensuelles des produits, par descripteur. Nous reprenons en effet le principe consistant à substituer des ensembles flous aux réponses précises, ainsi que l'agrégation des réponses floues sur les juges. De même, cette méthode met en oeuvre un traitement descriptif qualitatif et non pas quantitatif, mais la similarité avec nos travaux s'arrêtent là, puisque le traitement n'est ni relatif, ni ordinal : les répétitions ne sont pas prises en compte, et les réponses des juges ne sont pas individualisées.

L'intérêt principal de ce travail de I. Urdapilleta nous semble résider dans l'élimination de l'imprécision due à l'utilisation de l'échelle verbale, grâce à l'application du principe de diffusion. Toutefois, cette correction est spécialement dévolue aux échelles verbales, cas que nous n'avons pas traité.

Nous nous référons maintenant à deux articles de L. Koehl, X. Zheng et coll. portant sur l'évaluation subjective du toucher d'étoffes. Dans le premier [57], les auteurs proposent une méthode d'analyse de données sensorielles basée sur des ensembles flous. Son originalité tient dans le traitement qualitatif des données : dans une étape préalable, pour chacun des descripteurs, les produits d'une base d'apprentissage sont comparés par un expert. Le référentiel d'évaluation est alors constitué des différentes classes qu'il a pu distinguer ; dans l'étape d'évaluation qui suit, des juges affectent à chacun des produits des degrés d'appartenance à ces classes. Un traitement analytique est proposé pour mesurer les dissimilarités consensuelles entre produits, ainsi que les dissimilarités entre juges.

L'idée de constituer le référentiel à partir de comparaisons est intéressante, et rejoint notre principe d'un traitement ordinal. On peut cependant relever que les juges n'ont pas nécessairement les mêmes capacités à discriminer les produits, et que le référentiel n'est donc pas forcément adapté à tous. Il existe alors un risque de perte d'information chez les juges capables d'une évaluation plus fine, et d'une réponse arbitraire chez les autres.

Dans un second article [58], la méthode s'apparente plus à un traitement statistique de type Procustes, quantitatif. Chaque produit, pour chaque descripteur reçoit une note d'un panel. Cette note est ensuite considérée comme un degré d'appartenance flou : ce point de vue ne semble pas nécessaire, et n'est ensuite justifié par aucune technique floue. L'analyse proposée des dissimilarité entre produits et juges, est basée sur un calcul de « cohérence des variations internes des données », que l'on peut rapprocher du principe mis en oeuvre dans Procustes, où, de la même manière, les juges n'utilisent pas nécessairement les mêmes descripteurs.

4.4.2 Techniques floues de prédiction de réponses sensorielles

Zadeh [55] a développé sa théorie des sous-ensembles flous afin de modéliser le raisonnement humain, ainsi que la représentation symbolique (linguistique) des connaissances. C'est dans ce but que cette théorie a été envisagée comme une solution pertinente au problème de l'estimation de propriétés sensorielles : l'objectif est de modéliser la connaissance d'experts sensoriels sous forme d'un moteur d'inférence (ou système flou), destiné à reproduire automatiquement leurs réponses, le plus souvent à partir de mesures physiques. Nous traiterons ici des modèles d'inférence proposés par Ioannou *et al.* [31], Tan *et al.* [50], Mauris *et al.* [37] et Hamdi *et al.* [28]. On note que le modèle de Tan exploite les ensembles flous, mais que son moteur d'inférence est un réseau de neurones (non flou).

Comme l'a proposé Zadeh, le modèle d'inférence est conçu pour simuler le raisonnement humain. Les mesures qui l'alimentent, comme la prédiction qu'il fournit, sont exprimées à l'aide de concepts linguistiques imprécis : c'est de cette manière que les experts formulent naturellement les raisonnements qu'ils estiment à l'origine de leurs réponses. Par exemple, dans le modèle de prédiction d'un défaut caractéristique du saucisson proposé par Ioannou *et al.* [31], deux entrées indiquent la taille des « zones noires » (TN) et celle des « zones rouge sombres » (TR) présentes sur une tranche de produit, tandis que la sortie représente le degré d'importance du défaut. Les tailles des zones sont représentées par des termes linguistiques : « Zones absentes », « Taille faible », « Taille grande », et « Taille très grande ». Le moteur d'inférence est alors constitué de règles, formulées à l'origine par des experts, qui ne s'appuient pas sur des mesures numériques mais sur ces évaluations symboliques : si TN est « grand » et TR est « très grand », alors le défaut est d'importance « maximale ».

L'approche est plus riche que la simple utilisation d'une échelle nominale. En effet, les concepts linguistiques représentent chacun un ensemble imprécis de mesures, défini à l'aide d'une fonction d'appartenance (qui code un *ensemble flou*, cf. section 1, chap. 2, p. 37) sur le référentiel de la mesure physique correspondante. Ainsi, les images des saucissons étant filmées puis affichées sur un écran d'ordinateur, le concept linguistique « grand » est représenté à l'aide d'une fonction définie sur \mathbb{N} , en unités de pixels : fonction nulle sur les petites valeurs, et maximale au delà d'une valeur limite considérée par les experts comme suffisamment « grande ». Grâce à ces ensembles flous, les modèles d'inférence flous bénéficient d'une interface entre les mesures physiques précises et les concepts linguistiques vagues. Les entrées peuvent donc s'exprimer sous deux formes : soit directement sous forme linguistique (« grand »), soit à l'aide d'une donnée numérique plus ou moins précise, qui est alors transformée en degrés d'appartenance aux concepts linguistiques. Le moteur d'inférence manipule exclusivement des concepts linguistiques (flous). Quant au résultat, initialement représenté sous forme floue, il peut ensuite être transformé en une mesure classique : c'est l'opération de *défuzzification*.

Un calibrage du moteur d'inférence a pour but de paramétrer l'agrégation des règles, dont plusieurs peuvent être simultanément activées. Les sorties peuvent alors être imposées dans les termes exprimés par les experts, soit par des concepts linguistiques : « défaut absent », « moyen », « maximal ».

Finalement, le modèle proposé par Ioannou *et al.* permet de simuler la réponse des experts concernant le défaut du saucisson, à partir de simples estimations de mesures

physiques, acquises sur les images numériques. Ces mesures sont converties dans le langage symbolique des experts (opération de *fuzzyfication*), de façon à les transformer en prémisses du moteur d'inférence flou.

L'indicateur de confort proposé par Mauris *et al.* [37] est basé sur un système flou similaire au précédent : des paramètres qualifiant l'atmosphère d'un lieu (température, taux d'humidité et luminosité) alimentent un système de règles symboliques de façon à déduire un niveau de confort, exprimé comme un sous-ensemble flou d'une partition de ce concept (« pas confortable », « confortable », etc.).

Dans ces modèles, les quantités sont donc représentées de façon imprécise, à l'aide de termes linguistiques, numériquement décrits par des ensembles flous. La plupart des auteurs soulignent l'intérêt de cette utilisation de la théorie des sous-ensembles flous pour traduire l'intensité des perceptions humaines. Comme le précisent Tan *et al.* [50] et Davidson *et al.* [11], elle est particulièrement adaptée au traitement de données de nature subjective, en ce qu'elle permet de représenter l'imprécision, qui peut être réduite par l'entraînement, mais non éliminée. Cela rejoint donc notre discussion sur l'imprécision des mesures et l'usage du flou.

D'autre part, Tan *et al.* [50] reprochent aux mesures humaines de ne pas permettre de quantification exacte, étant naturellement « floues ». Il considère que les mesures obtenues sur une échelle nominale ou d'intervalle ne sont pas interprétables en terme de distance, et propose donc de les transformer en degrés d'appartenance à des ensembles flous définis sur l'échelle : ces ensembles sont censés représenter des mesures symboliques manipulables par le juge (à l'instar des termes linguistiques précédents). On trouve donc un écho à notre discussion sur la valeur de l'information quantitative. Ce rejet du quantitatif est implicitement présent dans chacun de ces modèles prédictifs flous : lorsque les experts du modèle de Ioannou *et al.* construisent les règles utilisées par le moteur d'inférence, ils fournissent leur appréciation sous la forme d'une valeur qualitative (ou terme linguistique) ; ces valeurs sont ordonnées, mais aucune hypothèse n'est formulée sur leurs rapports quantitatifs : il s'agit d'un traitement qualitatif. Tan *et al.* précisent explicitement ce rejet de l'information quantitative, en mettant en doute la pertinence des écarts entre mesures sur les différents types d'échelles. De même, Mauris *et al.* soulignent l'intérêt de l'approche symbolique floue, qui permet de manipuler des variables linguistiques sans nécessiter l'introduction d'une échelle de mesures quantitative artificielle.

En dépit d'une problématique fondamentalement différente, certaines justifications et hypothèses de ces modèles prédictifs rejoignent donc nos propres préoccupations, en confortant l'usage de la théorie des ensembles flous et le rejet du quantitatif.

5 Bilan de la présentation de l'analyse sensorielle

Dans ce chapitre nous avons donc situé notre problématique dans le cadre très général de l'analyse sensorielle. Nous avons ensuite justifié les trois aspects qui font l'originalité de notre méthode, en nous appuyant notamment sur le jeu de données à notre disposition. L'objet du chapitre suivant sera d'exposer les outils scientifiques nécessaires au développement de cette approche ordinale floue.

Chapitre 2

Les relations floues

Notre choix d'une approche ordinaire floue nécessite à la fois la représentation des données à l'aide de relations d'ordre floues, et un traitement statistique adapté. Ce chapitre présente les bases théoriques sur lesquelles s'appuyera la construction de ces outils, dont la description fera l'objet des deux chapitres suivants.

Nous introduisons tout d'abord la théorie des sous-ensembles flous, dans laquelle s'inscrira notre modèle ordinal, afin de traiter l'imprécision des mesures sensorielles. Puis ce modèle sera précisé à travers l'introduction des relations floues. Enfin, on montrera comment la théorie des préférences constitue un outil d'analyse d'une certaine classe de relations, qui correspondent à notre modèle ordinal flou.

1 Théorie des sous-ensembles flous

La théorie des sous-ensembles flous a été proposée par L.A. Zadeh [55] en 1965, afin de modéliser la représentation humaine des connaissances dans les systèmes de décision. Les sous-ensembles flous sont généralement utilisés, d'une part, pour leur capacité à modéliser l'incertitude et l'imprécision, et d'autre part, parce qu'ils permettent de manipuler mathématiquement des concepts linguistiques.

1.1 Concepts de base

Pour un référentiel Ω donné, un *sous-ensemble flou* A de Ω est défini par une fonction d'appartenance qui associe, à chaque élément $\omega \in \Omega$, un degré d'appartenance $\mu_A(\omega)$:

$$\mu_A : \Omega \rightarrow [0, 1].$$

Un sous-ensemble flou A est dit *normalisé* si $\sup_{\omega \in \Omega} \mu_A(\omega) = 1$.

Tout ensemble flou A définit deux ensembles nets remarquables :

- le *support* de A , défini comme le sous-ensemble de Ω constitué des éléments ω appartenant à A avec un degré non nul :

$$\text{supp}(A) = \{\omega \in \Omega / \mu_A(\omega) > 0\};$$

- le *noyau* de A , défini comme le sous-ensemble de Ω constitué des éléments ω appartenant à A avec un degré maximal :

$$\text{noy}(A) = \{\omega \in \Omega / \mu_A(\omega) = 1\}.$$

Cette manière d'extraire des sous-ensembles classiques d'un sous-ensemble flou est généralisée grâce aux α -coupes. Ainsi, pour toute valeur $\alpha \in [0, 1[$, on définit l' α -coupe A_α (respectivement l' α -coupe stricte $A_{\alpha+}$) comme le sous-ensemble de Ω constitué des éléments ω qui appartiennent à A avec un degré supérieur (r. strictement supérieur) à α :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{\omega \in \Omega / \mu_A(\omega) \geq \alpha\} \\ A_{\alpha+} &= \{\omega \in \Omega / \mu_A(\omega) > \alpha\} \end{aligned}$$

On remarque que les support et noyau de A sont respectivement définis par ses α -coupes A_{0+} et A_1 .

Les sous-ensembles flous permettent de généraliser les ensembles classiques. En particulier, on définit un *intervalle flou* comme un sous-ensemble flou de \mathbb{R} dont les α -coupes sont des intervalles fermés, et dont le noyau est non nul. Lorsque le noyau se réduit à un singleton, il s'agit alors d'un *nombre flou*.

Enfin, le principe d'extension proposé par Zadeh (énoncé dans [17]) permet de généraliser au flou, tout concept mathématique basé sur des sous-ensembles classiques. Soit un produit cartésien d'ensembles $X_1 \times \dots \times X_N$, et N sous-ensembles flous $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N$ respectivement définis sur X_1, \dots, X_N . Considérons une fonction f définie de $X_1 \times \dots \times X_N$ vers un ensemble Y , qui à tout N -uplet de valeurs (x_1, \dots, x_N) associe une valeur $y \in Y$:

$$y = f(x_1, \dots, x_N)$$

Alors le principe d'extension de Zadeh permet d'appliquer f aux sous-ensembles flous $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N$. L'ensemble obtenu est un sous-ensemble flou \tilde{B} défini sur Y , dont la fonction d'appartenance est ainsi définie :

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x_1, \dots, x_N / y=f(x_1, \dots, x_N)} \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_N}(x_N)) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans le cas de référentiels discrets, le calcul peut être mené par α -coupes :

$$\tilde{B}_\alpha = \left(f \left(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N \right) \right)_\alpha = f \left((\tilde{A}_1)_\alpha, \dots, (\tilde{A}_N)_\alpha \right),$$

où l'application de f à des ensembles nets $A_1, \dots, A_N \in X_1 \times \dots \times X_N$ est définie de la façon suivante : $f(A_1, \dots, A_N) = \{f(x_1, \dots, x_N) : (x_1, \dots, x_N) \in A_1 \times \dots \times A_N\}$.

Dans le cas continu, Nguyen (1978) a montré que cette propriété n'était pas toujours vérifiée. Une condition suffisante est que le supremum soit atteint dans l'équation 2.1. C'est en particulier le cas pour des intervalles flous fermés (de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement) lorsque la fonction f est continue. En revanche, la propriété est toujours vraie pour des α -coupes strictes :

$$\left(f \left(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N \right) \right)_{\alpha+} = f \left((\tilde{A}_1)_{\alpha+}, \dots, (\tilde{A}_N)_{\alpha+} \right).$$

1.2 Triplets de De Morgan

1.2.1 Rappels sur les opérateurs ensemblistes

Considérons deux sous-ensembles A et B de Ω . Les opérateurs d'intersection, d'union et de complémentation sont respectivement définis comme suit :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, \omega \in A \cap B &\Leftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \in B, \\ \forall \omega \in \Omega, \omega \in A \cup B &\Leftrightarrow \omega \in A \text{ ou } \omega \in B, \\ \forall \omega \in \Omega, \omega \in A^c &\Leftrightarrow \omega \notin A. \end{aligned}$$

D'autre part, ils sont liés par les Lois de De Morgan :

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

Dans la théorie des sous-ensembles flous, l'appartenance d'un élément de Ω à un sous-ensemble flou n'est plus nécessairement binaire, mais exprimée par une fonction d'appartenance. Par conséquent, les opérations sur les sous-ensembles flous se traduisent par des opérations sur les fonctions d'appartenance : il faut donc généraliser les opérateurs ensemblistes classiques.

1.2.2 La complémentation

L'opérateur complémentaire associe à un sous-ensemble donné A , l'ensemble A^c des éléments du référentiel Ω qui n'appartiennent pas à A . Dans le cas d'un sous-ensemble flou A , son complémentaire A^c est un sous-ensemble flou obtenu à l'aide d'une fonction c de *négation* définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$:

$$\mu_{A^c}(\omega) = c(\mu_A(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Comme chacune des fonctions définissant les opérateurs ensemblistes flous, la fonction de négation c doit vérifier certaines propriétés. En particulier, elle doit se comporter comme son homologue de la théorie ensembliste classique, lorsqu'elle est appliquée à un ensemble net. Une série d'axiomes permet de définir c :

$$\begin{cases} c(0) = 1, & c(1) = 0, \\ c \text{ est non-croissante.} \end{cases}$$

Il existe d'autres définitions, plus contraignantes ; ainsi une *négation stricte* est strictement décroissante et continue ; une *négation forte* est stricte et telle que $c(c(x)) = x$, $\forall x \in [0, 1]$.

La négation standard (en l'occurrence forte) est :

$$c(x) = 1 - x.$$

1.2.3 La conjonction

De même que précédemment, on définit l'opérateur flou d'intersection à l'aide d'une fonction. Il s'agit d'une t-norme (norme triangulaire) T , application de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$:

$$\mu_{A \cap B}(\omega) = T(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)), \forall \omega \in \Omega,$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} T(1, x) &= x & \forall x \in [0, 1] \\ T(x, y) &= T(y, x) & \forall x, y \in [0, 1] \\ T(x, y) &\leq T(u, v) & \forall 0 \leq x \leq u \leq 1, \quad 0 \leq y \leq v \leq 1 \\ T(x, T(y, z)) &= T(T(x, y), z) & \forall x, y, z \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a également :

$$T(0, x) = 0, \forall x \in [0, 1].$$

Le minimum est une t-norme usuelle, qui constitue aussi la plus grande t-norme : pour toute t-norme T ,

$$\min(x, y) \geq T(x, y), \forall x, y \in [0, 1].$$

C'est de plus l'unique t-norme *idempotente* :

Définition 1.1 : Une t-norme (respectivement t-conorme) est idempotente, si elle associe à tout couple (x, x) tel que $x \in [0, 1]$, la valeur x en question.

La t-norme de Lukasiewicz se révélera cruciale par la suite :

$$W(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}.$$

1.2.4 La disjonction

L'opérateur flou d'union est défini par une t-conorme (conorme triangulaire) U , application de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$:

$$\mu_{A \cup B}(\omega) = U(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)), \forall \omega \in \Omega,$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} U(0, x) &= x & \forall x \in [0, 1] \\ U(x, y) &= U(y, x) & \forall x, y \in [0, 1] \\ U(x, y) &\leq U(u, v) & \forall 0 \leq x \leq u \leq 1, \quad 0 \leq y \leq v \leq 1 \\ U(x, U(y, z)) &= U(U(x, y), z) & \forall x, y, z \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a également :

$$U(1, x) = 1, \forall x \in [0, 1].$$

Le maximum est une t-conorme usuelle, qui a pour particularité d'être la seule t-conorme idempotente, et la plus petite t-conorme : pour toute t-conorme U ,

$$\max(x, y) \leq U(x, y), \forall x, y \in [0, 1].$$

La t-conorme de Lukasiewicz est définie par :

$$W'(x, y) = \min\{x + y, 1\}.$$

1.2.5 Triplets de De Morgan flous

Les lois de De Morgan de la théorie ensembliste classique trouvent leur homologue dans la théorie des sous-ensembles flous. En effet, il existe une relation essentielle entre t-norme et t-conorme : U est une t-conorme si et seulement si $T(x, y) = c(U(c(x), c(y)))$ est une t-norme.

A chaque couple (T, c) (respectivement (U, c)), on peut donc faire correspondre une t-conorme U (r. une t-norme T) *duale* conforme à la relation logique sus-citée. L'ensemble définit alors un *triplet de De Morgan flou*, noté (T, U, c) .

Avec le complémentaire standard $c(x) = 1 - x$, on a ainsi les couples de t-normes et t-conormes duals suivants :

$$\begin{aligned} \min(x, y) &\longleftrightarrow \max(x, y) \\ W(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\} &\longleftrightarrow W' = \min\{x + y, 1\} \end{aligned}$$

Un triplet de De Morgan (T, U, c) qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0\}) \\
U(x, y) &= \varphi^{-1}(\min\{\varphi(x) + \varphi(y), 1\}) \\
c(x) &= \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))
\end{aligned}$$

où φ est un automorphisme (application bijective croissante) sur $[0, 1]$, est dit *fort*, ou *de Lukasiewicz* ; on le notera $(W_\varphi, W'_\varphi, c_\varphi)$.

2 Relations floues

2.1 Rappels sur les relations classiques

2.1.1 Définitions

Une relation binaire R , définie sur un ensemble X , est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times X$.

Toute relation binaire R induit implicitement d'autres relations. On définit ainsi usuellement les relations *complémentaire* R^c , *inverse* R^{-1} , et *duale* R^d , définis de la façon suivante ([25] p.37) :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in R^c &\Leftrightarrow (x, y) \notin R \\
(x, y) \in R^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in R \\
(x, y) \in R^d &\Leftrightarrow (y, x) \notin R.
\end{aligned}$$

La relation duale R^d est donc définie comme $(R^{-1})^c$.

La notation xRy est équivalente à $(x, y) \in R$.

2.1.2 Propriétés

Une relation binaire R peut vérifier un certain nombre de propriétés, dont une liste ([25] p. 38) est donnée dans le tableau 2.1.2, p. 43.

Certaines de ces propriétés sont liées. On a par exemple la propriété suivante :

Proposition 2.1 : *Une relation est asymétrique si et seulement si elle est à la fois antisymétrique et antiréflexive.*

Démonstration :

- Si R est asymétrique : $xRy \Rightarrow yR^c x, \forall x, y \in X$. Il n'existe pas de couple $x, y \in X$ tel que xRy, yRx , car cela conduirait à la contradiction : $yR^c x, yRx$. R est donc antisymétrique. De même, il n'existe pas d'élément x tel que xRx , car l'asymétrie entraînerait alors simultanément $xR^c x$, ce qui est impossible. R est donc antiréflexive.

PROPRIETE	DEFINITION
réflexivité	$xRx, \forall x \in X$
antiréflexivité	$xR^c x, \forall x \in X$
symétrie	$xRy \Rightarrow yRx, \forall x, y \in X$
antisymétrie	$xRy, yRx \Rightarrow y = x, \forall x, y \in X$
asymétrie	$xRy \Rightarrow yR^c x, \forall x, y \in X$
complétude	xRy ou $yRx, \forall x \neq y \in X$
complétude forte	xRy ou $yRx, \forall x, y \in X$
transitivité	$xRy, yRz \Rightarrow xRz, \forall x, y, z \in X$
Ferrer	$wRx, yRz \Rightarrow wRz$ ou $yRx, \forall w, x, y, z \in X$

TAB. 2.1 – Propriétés usuelles des relations binaires

- si R est antisymétrique et antiréflexive : pour tout couple $x, y \in X$ tel que xRy , l'antisymétrie impose $yRx \Rightarrow x = y$, soit $yRx \Rightarrow xRx$, ce qui enfreint la propriété d'antiréflexivité. Par conséquent : $xRy \Rightarrow yR^c x, \forall x, y \in X$, ce qui prouve l'asymétrie de R .

2.1.3 Relations d'ordre

D'une façon générale, on considère deux types de relations d'ordre, suivant qu'elles sont *larges* ou *strictes*.

Définition 2.1 :

- Une relation d'ordre (large) est une relation réflexive, antisymétrique et transitive ;
- une relation d'ordre strict est une relation antiréflexive, antisymétrique et transitive.

Dans le cadre de ce travail, nous préférons adopter la propriété d'antiréflexivité : il s'agit donc d'ordres stricts. La conjonction des propriétés d'antisymétrie et d'antiréflexivité étant équivalente à celle d'asymétrie, on note que les ordres stricts sont les relations asymétriques et transitives.

Ces relations d'ordre sont également appelées relations d'ordre *partiel*. Parmi elles, on distingue le sous-ensemble particulier des *ordres totaux*.

Définition 2.2 : Un ordre total est une relation d'ordre (strict) complète. Elle est donc asymétrique, transitive et complète.

C'est la relation d'ordre la plus usuelle : à tout classement d'objets sans ex-aequo correspond en effet une relation d'ordre.

On note \mathcal{L}_X l'ensemble des ordres totaux définis sur X .

Définition 2.3 : Une extension linéaire L d'un ordre partiel P défini sur X est un ordre

total sur X contenant P :

$$xPy \Rightarrow xLy \quad \forall x, y \in X, \text{ et } L \in \mathcal{L}_X$$

Si l'on considère un ordre partiel comme un ensemble de contraintes d'ordre sur certaines paires d'objets, les extensions linéaires associées à un ordre partiel donné sont donc les ordres totaux (définis sur le même ensemble d'objets) qui respectent ces contraintes.

On note $\Lambda(P)$ l'ensemble des extensions linéaires associées à un ordre partiel P défini sur X .

Les *ordres d'intervalles* constituent une sous-catégorie des ordres partiels. Elle a été caractérisée en 1914 par Norbert Wiener :

Définition 2.4 *La relation $Q \subseteq X \times X$ est un ordre d'intervalles si on peut associer à X une collection d'intervalles $(I_x)_{x \in X}$ non vides de la droite réelle telle que :*

$$(x, y) \in Q \Leftrightarrow a > b, \quad \forall a \in I_x, \forall b \in I_y.$$

Fishburn [23] donne une définition équivalente :

Proposition 2.2 : *Une relation est un ordre d'intervalles si et seulement si elle est asymétrique et Ferrer (cf. tableau 2.1.2, p. 43).*

Proposition 2.3 : *Un ordre d'intervalles est un ordre partiel.*

Démonstration : la conjonction des propriétés d'asymétrie et Ferrer assure en effet la transitivité de la relation. Soit Q un ordre d'intervalles :

$$\begin{aligned} xQy, yQz &\Rightarrow xQz \text{ ou } yQy \\ &\Rightarrow xQz, \end{aligned}$$

puisque Q est asymétrique.

Fishburn propose une autre définition équivalente, basée sur les notions d'ensembles de successeurs et prédécesseurs. On note $X_Q^p(x)$ (respectivement $X_Q^s(x)$), l'ensemble des éléments $y \in X$ prédécesseurs (respectivement successeurs) de x selon Q :

$$X_Q^p(x) = \{y \in X / (y, x) \in Q\} \tag{2.2}$$

$$X_Q^s(x) = \{y \in X / (x, y) \in Q\}. \tag{2.3}$$

Proposition 2.4 : *Une relation Q est un ordre d'intervalles si et seulement si c'est une relation d'ordre partiel dont les ensembles de prédécesseurs (ou les ensembles de successeurs), peuvent être ordonnés en fonction de l'opérateur d'inclusion :*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X, \quad X_Q^p(x) \subseteq X_Q^p(y) \text{ ou } X_Q^p(y) \subseteq X_Q^p(x) \\ \text{ou } \forall x, y \in X, \quad X_Q^s(x) \subseteq X_Q^s(y) \text{ ou } X_Q^s(y) \subseteq X_Q^s(x). \end{aligned}$$

2.2 Généralisation

2.2.1 Définitions

La théorie des sous-ensembles flous permet de généraliser les relations nettes classiques [56]. Une relation floue R définie sur X est un sous-ensemble flou de $X \times X$. On note $\mu_R(x, y)$ ou, par convention, $R(x, y) \in [0, 1]$ le degré d'appartenance du couple (x, y) à R .

Les relations complémentaire, inverse et duale d'une relation floue R se définissent à l'aide d'un opérateur de complémentation c :

$$\begin{aligned} R^c(x, y) &= c(R(x, y)) \\ R^{-1}(x, y) &= R(y, x) \\ R^d(x, y) &= c(R(y, x)). \end{aligned}$$

2.2.2 Propriétés

Le passage des relations nettes aux relations floues exige la redéfinition de leurs propriétés. En particulier, lorsqu'elles peuvent s'exprimer en fonction de relations ensemblistes, l'extension au flou peut se faire selon différents opérateurs flous. En ce cas, on impose l'utilisation d'un triplet de De Morgan (T, U, c) . Le tableau 2.2.2, p. 45 indique, d'après Fodor et Roubens ([25] chap. 2.5), comment redéfinir les propriétés usuelles des relations floues à partir d'un triplet de De Morgan (T, U, c) donné.

PROPRIETE	DEFINITION
réflexivité	$R(x, x) = 1, \forall x \in X$
antiréflexivité	$R(x, x) = 0, \forall x \in X$
symétrie	$R(x, y) = R(y, x), \forall x, y \in X$
antisymétrie	$x \neq y \Rightarrow T(R(x, y), R(y, x)) = 0, \forall x, y \in X$
asymétrie	$T(R(x, y), R(y, x)) = 0, \forall x, y \in X$
complétude	$U(R(x, y), R(y, x)) = 1, \forall x \neq y \in X$
complétude forte	$U(R(x, y), R(y, x)) = 1, \forall x, y \in X$
transitivité	$T(R(x, z), R(z, y)) \leq R(x, y), \forall x, y, z \in X$
Ferrer	$T(R(w, x), R(y, z)) \leq U(R(w, z), R(y, x)), \forall w, x, y, z \in X$

TAB. 2.2 – Propriétés usuelles des relations binaires floues

Proposition 2.5 : *Si R est une relation min-transitive sur X (c'est-à-dire que la T -norme utilisée dans la propriété de transitivité est le min), alors chacune de ses α -coupes est transitive, pour $\alpha \in]0, 1]$.*

La preuve en est donnée par Fodor et Roubens [25].

2.2.3 Relations d'ordre floues

Les relations d'ordre floues sont définies en rapportant aux relations floues les formes floues des propriétés propres aux relations d'ordre classiques.

Définition 2.5 : *un T -ordre partiel flou (strict) est une relation asymétrique et T -transitive.*

Ici, la propriété d'asymétrie floue n'est pas contrainte par la t -norme T .

Les définitions des propriétés floues étant dépendantes d'un triplet de De Morgan flou (T, U, c) , nous adoptons celui qui est généralement associé aux ordres : (\min, \max, c) , où $c(x) = 1 - x$.

On note que les α -coupes d'un ordre partiel flou sont des ordres partiels. En effet, les propriétés de transitivité et d'asymétrie se maintiennent sur les α -coupes.

La généralisation floue des ordres totaux à l'aide du triplet de De Morgan choisi (soit $(\min, \max, 1 - x)$) définit exclusivement des ordres totaux classiques. A proprement parler, nous ne rencontrerons donc pas d'ordres totaux flous.

De Baets *et al.* [12] a proposé une définition d'*ordre d'intervalles flou* dans le cadre des structures de préférences floues sans incompatibilité (P, I) , mais elle ne concerne que de tels couples de relations. Afin de permettre la mise en rapport de la définition floue avec la définition classique, nous préférons la définition proposée par Bufardi [6], qui s'applique à une relation R quelconque. D'autre part, son énoncé fait intervenir un triplet de De Morgan (T, U, c_φ) , et lorsque l'on opte pour le triplet $(\min, \max, 1 - x)$, les α -coupes de toute relation d'ordre d'intervalles floue sont des ordres d'intervalles. Or, la définition de De Baets *et al.* ne garantit cette propriété que pour des structures (P, I) particulières.

Nous reprenons en fait la définition de Bufardi d'un *ordre d'intervalles strict*, que nous réduirons à l'appellation *ordre d'intervalles*, conformément à certains usages de la théorie des relations d'ordre et des graphes.

Définition 2.6 : *Un ordre d'intervalles flou Q est une relation antiréflexive, W_φ -asymétrique et $T - U$ -Ferrer (cf. tableau 2.2.2, p. 45).*

On constate que cette définition découle directement de celle d'un ordre d'intervalles classique, présentée dans la proposition 2.2, p. 44.

Proposition 2.6 : *Un ordre d'intervalles flou est un ordre partiel flou.*

Démonstration : Fodor et Roubens ont montré qu'une relation antiréflexive et $T - U$ -Ferrer est nécessairement T -transitive [25]. Par conséquent, un ordre d'intervalles flou Q est transitif (au sens de la T -transitivité), et asymétrique (au sens de la W_φ -asymétrie) : il s'agit bien d'un ordre partiel flou (cf 2.2.3, p. 46).

Enfin, Bufardi démontre la proposition suivante :

Proposition 2.7 *Toutes les α -coupes d'un ordre d'intervalles flou défini à partir du triplet de De Morgan ($\min, \max, 1 - x$) sont des ordres d'intervalles.*

Cette propriété est extrêmement intéressante, et nous opterons donc pour ce triplet de De Morgan. En cela, nous nous conformons de plus au choix préalablement réalisé dans la définition d'un ordre partiel flou.

2.3 Opérations sur les relations floues

2.3.1 Fermeture transitive

La *fermeture transitive* $FT(R)$ d'une relation nette R est définie comme l'intersection de l'ensemble des relations transitives qui l'incluent. Soit R_k une relation transitive contenant R , et K l'ensemble des indices des relations R_k possibles :

$$FT(R) = \bigcap_{k \in K} R_k.$$

La transitivité est équivalente à la condition $R \circ R \subseteq R$, où la composition d'une relation R_1 par une relation R_2 est définie ainsi :

$$\forall x, y \in X : x(R_1 \circ R_2)y \Leftrightarrow \exists z \in X \text{ tel que } xR_1z \text{ et } zR_2y.$$

On dispose d'un algorithme simple pour obtenir la fermeture transitive d'une relation. En effet, fermer transitivement R revient à la compléter en appliquant successivement la règle de composition par R jusqu'à stabilisation : $FT(R) \circ R = FT(R)$. Notons $R^m = R \circ R^{m-1}$, avec $R^1 = R$:

$$\forall x, y \in X : x(FT(R))y \Leftrightarrow \exists m > 1 \text{ tel que } xR^m y.$$

Pour un ensemble fini X de cardinal n , la stabilisation $R^m = R^{m-1}$ intervient nécessairement pour $m \leq n - 1$.

Toutes ces notions sont usuellement étendues au flou.

La *fermeture T -transitive* $T-FT(R)$ d'une relation floue R est, par extension, définie comme la relation T -transitive minimale qui l'inclut (Chakraborty et Das, 1983), l'inclusion étant prise au sens de Zadeh (1965) :

Définition 2.7 : Soit R_1 et R_2 deux relations binaires floues définies sur X . R_1 est incluse dans R_2 ($R_1 \subseteq R_2$) si et seulement si :

$$R_1(x, y) \leq R_2(x, y), \quad \forall x, y \in X \times X.$$

Soit R_k une relation T -transitive contenant R , et K l'ensemble des indices des relations R_k possibles :

$$T-FT(R) = \min_{k \in K} R_k.$$

Dans ce mémoire, on ne considèrera que la min-transitivité, et on notera donc $FT(R)$ la fermeture min-transitive de R .

Pour une relation floue R définie sur X , la T -transitivité est équivalente à la condition $R \circ_T R \subseteq R$, où la T -composition de R_1 par R_2 est définie ainsi :

$$(R_1 \circ_T R_2)(x, y) = \sup_{z \in X} T(R_1(x, z), R_2(z, y)).$$

Si on note $R^m = R \circ_T R^{m-1}$ la T -composition de R^{m-1} par R , avec $R^1 = R$, alors la fermeture transitive de R vérifie la propriété suivante :

$$T\text{-}FT(R)(x, y) = \sup_{m \geq 1} R^m(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Là encore, la complexité de l'algorithme de calcul de la fermeture T -transitive est très faible : si R est une relation floue définie sur un ensemble X de cardinal n , alors le nombre d'itérations nécessaires est borné supérieurement : $m \leq n - 1$.

2.3.2 Fermeture transitive affaiblie

La fermeture transitive repose sur la propriété de transitivité classique, qui contraint tout couple d'objets $(x, y) \in X \times X$. Nous définissons la *transitivité affaiblie* comme la forme dérivée de la transitivité, où seuls les couples d'objets distincts de X sont contraints.

Définition 2.8 : Soit R une relation binaire définie sur X . R vérifie la propriété de transitivité affaiblie si et seulement si :

$$\forall x \neq y, z \in X, (x, z) \in R \text{ et } (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R.$$

On remarque que la transitivité classique implique la transitivité affaiblie.

A cette forme de transitivité, on fait correspondre la *fermeture transitive affaiblie*, définie comme l'intersection de l'ensemble des relations transitives affaiblies qui l'incluent. Soit $FT'(R)$ la fermeture transitive affaiblie de R . Pour tout $(x, y) \in X \times X$, on a alors :

$$(x, y) \in FT'(R) \Leftrightarrow \begin{aligned} &(x, y) \in FT(R) \text{ si } x \neq y \\ &(x, y) \in R \text{ sinon,} \end{aligned}$$

que l'on note plutôt :

$$FT'(R) = FT(R) \cap \mathbf{I}_{R^c}^c,$$

où \mathbf{I}_R définit la relation contenant l'ensemble des couples (x, x) inclus dans R . Cette propriété traduit la neutralité de la part réflexive de R dans le processus de fermeture transitive classique.

Dans le cas flou, on définit la fermeture T -transitive affaiblie comme suit :

$$T\text{-}FT'(R) = \min\{T\text{-}FT(R), \mathbf{I}_{R^c}^c\},$$

où $\mathbf{I}_R(x, x) = R(x, x)$ et $\mathbf{I}_R(x, y) = 0, \forall x \neq y \in X$; soit encore : $\mathbf{I}_{R^c}^c(x, x) = R(x, x)$ et $\mathbf{I}_{R^c}^c = 1, \forall x \neq y \in X$.

2.3.3 Agrégation de relations floues

Nous citons ici quelques notions très ponctuelles présentées dans le chapitre sur les opérations d'agrégation de l'ouvrage de Fodor et Roubens [25].

Agréger un ensemble $\{R_k, k \in \{1, \dots, m\}\}$ de relations floues définies sur X consiste à leur faire correspondre une unique relation $R = M(R_1, \dots, R_m)$ définie sur X . Parmi les opérateurs M , nous nous intéressons exclusivement à ceux respectant la propriété de dépendance suivante : à tout couple d'objets $(x, y) \in X$, M associe la valuation $R(x, y)$ définie comme une fonction à m arguments des $R_1(x, y), \dots, R_m(x, y)$. On peut par conséquent noter :

$$R(x, y) = M(R_1(x, y), \dots, R_m(x, y)).$$

Les opérateurs auxquels nous nous référons ne sont donc pas particuliers aux relations.

Enfin nous nous focaliserons uniquement sur quelques opérateurs *idempotents* (cf. définition 1.1, p. 40).

Les opérateurs \max , \min et *médiane* vérifient cette propriété. Ils sont de plus adaptés à l'agrégation de relations floues, car ils respectent tous la contrainte suivante : $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in [0, 1]$; le produit d'agrégation de relations floues est donc bien une relation floue. Pour l'opérateur \max on peut noter :

$$R = \max(R_1, \dots, R_m),$$

la relation agrégée ainsi obtenue :

$$R(x, y) = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} R_k(x, y), \forall x, y \in X.$$

Nous présentons maintenant un opérateur généralisant, en particulier, ces trois opérateurs : l'opérateur *owa* (ou *Ordered Weighted Average*), proposé par Yager [54]. Appliqué à une distribution de m valeurs (x_1, x_2, \dots, x_m) , il s'agit d'une moyenne pondérée des valeurs triées. On considérera le tri décroissant, et on note $w_k \geq 0$ le coefficient de pondération associé à la $k^{\text{ième}}$ valeur $x_{(k)}$. La somme des w_k fait 1, et tout ensemble de w_k respectant ces contraintes définit un opérateur *owa* particulier :

$$owa(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^m w_k x_{(k)}.$$

La généralisation des opérateurs précédemment cités est triviale. Ainsi, le \max est défini par $w_1 = 1$, le \min par $w_m = 1$, et l'opérateur *médiane* par $w_{m/2} = w_{m/2+1} = 0.5$ lorsque m est pair, et par $w_{[(m+1)/2]} = 1$ sinon. Le produit d'agrégation de relations floues par un opérateur *owa* reste une relation floue, simplement parce que : $owa(x_1, x_2, \dots, x_m) \in [\min_k x_k, \max_k x_k] \subseteq [0, 1]$. Enfin, l'*owa* est bien idempotent, puisque $\sum_{k=1}^m w_k = 1$.

O'Hagan [39] a développé une méthode intéressante pour caractériser les pondérations d'un opérateur *owa* à partir d'un seul paramètre, interprété comme un degré de disjonction (ou *orness degree*). Ce degré, compris entre 0 (le \min) et 1 (le \max), a été proposé par Filev et Yager [22] :

$$\rho = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (m-k)w_k.$$

Il mesure bien la proximité de l'opérateur *owa* avec l'opérateur max. En particulier, on note que le degré ρ associé au max est de 1, et que celui du min est de 0. D'autre part, on note qu'à un opérateur « moyenne » caractérisé par des pondérations égales, correspond un degré $\rho = 0.5$.

La méthode de O'Hagan s'appuie également sur une autre mesure proposée par Yager. Il s'agit d'une mesure de dispersion ou d'entropie, permettant d'évaluer la part d'information des arguments qui participe à l'agrégation :

$$Disp = \sum_{k=1}^m w_k \ln w_k.$$

O'Hagan préconise simplement, pour un degré de disjonction ρ donné, de déterminer les poids de l'opérateur *owa* qui maximisent cette entropie. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation non-linéaire avec contraintes, qu'il est aisé de résoudre avec un solveur classique comme MATLAB :

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } \sum_{k=1}^m w_k \ln w_k, \text{ sous les contraintes :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (m-k)w_k = \rho \\ w_k \in [0, 1], \forall k \in \{1, \dots, m\} \\ \sum_{k=1}^m w_k = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par exemple, pour des échantillons de valeurs de taille $m = 3$, et un degré de 0.25, la méthode donne environ : $[w_1 = 0.1; \quad w_2 = 0.3; \quad w_3 = 0.6]$. Bien entendu, les opérateurs max, min et « moyenne » peuvent être obtenus suivant cette méthode à partir de leurs degrés de disjonctions, respectivement 1, 0 et 0.5.

3 Théorie des préférences

Edifiée par Roy *et al.* [46], la théorie des préférences est principalement dédiée à la résolution de problèmes de décision multi-critères. Elle permet en particulier l'analyse de préférences obtenues auprès de différents sujets, d'après une sélection de critères, relativement à un ensemble d'objets. Ces préférences sont ensuite résumées, en tenant compte des poids des différents sujets ou critères, sous la forme d'une relation binaire exprimant les préférences entre objets. En général, l'étude débouche sur l'extraction de l'objet « globalement préféré ».

Initialement développée dans le cadre des relations classiques, cette théorie a ensuite été étendue aux relations floues.

3.1 Théorie classique des préférences

3.1.1 Relation de préférence faible

On considère un ensemble d'objets X , dont la comparaison par paires selon différents sujets ou critères, débouche sur une relation de préférence faible S définie ainsi :

$$xSy \Leftrightarrow \text{« } x \text{ n'est pas pire que } y \text{ »}$$

Par convention, la relation binaire S vérifie la propriété de *réflexivité* : on considère en effet que les sujets ne sont pas soumis à la comparaison des paires (x, x) , et que les objets ne peuvent « être pire qu'eux-mêmes ».

Elle ne vérifie pas nécessairement d'autre propriété. Elle a en effet été développée pour traiter des données subjectives, qui sont rarement contraintes.

La relation de préférence est dite *faible*, car elle autorise : « x et y aussi bien l'un que l'autre » (soit xSy et ySx). Roy *et al.* l'ont également nommée *relation de surclassement*.

3.1.2 Décomposition (P, I, J)

A partir de la relation de préférence faible S , on définit les trois sous-relations suivantes comme la décomposition (P, I, J) de S :

$$\begin{aligned} \text{Préférence stricte : } & xPy \Leftrightarrow xSy \text{ et } yS^c x \\ \text{Indifférence : } & xIy \Leftrightarrow xSy \text{ et } ySx \\ \text{Incomparabilité : } & xJy \Leftrightarrow xS^c y \text{ et } yS^c x. \end{aligned}$$

Il faut bien faire la distinction entre la relation de préférence faible S , et son sous-produit de décomposition P , relation de préférence stricte.

En mettant à profit les relations duale, complémentaire et inverse, les définitions se font plus synthétiques :

$$\begin{aligned} P &= S \cap S^d \\ I &= S \cap S^{-1} \\ J &= S^c \cap S^d. \end{aligned}$$

Intuitivement, on s'aperçoit que les dénominations des sous-relations correspondent bien à leurs définitions :

- la relation de *préférence stricte* P correspond à la part antisymétrique de S : elle contient donc les couples (x, y) dont la préférence selon S n'est pas réciproque, ce qui justifie le qualificatif « stricte » ;
- la relation d'*indifférence* I contient au contraire les seuls couples dont S marque la préférence de façon réciproque : ce sont bien des objets « indifférenciés » ;

- l'*incomparabilité* J rassemble les couples (x, y) de $X \times X$ qui définissent ni indifférence, ni préférence stricte (soit aucune préférence faible) : ces objets sont donc bien « non-comparés ».

Toute relation réflexive peut donc être décomposée en un triplet de sous-relations (P, I, J) selon les définitions précédentes. Ce triplet vérifie une *structure de préférence*.

3.1.3 Structure de préférence

Roubens et Vincke [45] ont proposé la définition suivante.

Définition 3.1 : un triplet (P, I, J) de relations binaires est une structure de préférence si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- I est réflexive, P et J sont antiréflexives ;
- I et J sont symétriques, P est antisymétrique ;
- $P \cap I = P \cap J = I \cap J = \emptyset$;
- $P \cup I \cup J$ est complète.

Nous appellerons *équations de partition* les conditions liant les trois sous-relations :

1. $P \cap I = P \cap J = I \cap J = \emptyset$, qui définissent les *équations d'incompatibilité* ;
2. $P \cup I \cup J$ complète, que l'on peut de façon équivalente remplacer par : $P \cup P^{-1} \cup I \cup J = X \times X$, l'*équation de complémentarité*.

Ces équations recouvrent bien une notion de partition, car tout couple d'objets de $X \times X$ appartient nécessairement à une et une seule des sous-relations issues de $S : P, P^{-1}, I$, ou J (la relation $X \times X = \emptyset^c$ représente la relation pleine).

Dans leurs travaux, Roubens et Vincke [45] démontrent l'équivalence entre une relation de préférence faible et sa structure de préférence :

Proposition 3.1

1. Si S est une relation de préférence faible (soit réflexive), alors sa décomposition (P, I, J) est une structure de préférence telle que $P \cup I = S$.
2. Réciproquement, si (P, I, J) est une structure de préférence, alors $S = P \cup I$ est une relation de préférence faible dont la décomposition en préférences est (P, I, J) .

Voici enfin une liste de certaines propriétés intéressantes vérifiées par les sous-relations (P, I, J) :

$$P \cup I = S \quad (2.4)$$

$$P \cap I = \emptyset \quad (2.5)$$

$$P \cap J = \emptyset \quad (2.6)$$

$$I \cap J = \emptyset \quad (2.7)$$

$$P \cup I \cup P^{-1} = S \cup S^{-1} \quad (2.8)$$

$$P \cup J = S^d \quad (2.9)$$

$$P \cup P^{-1} \cup I \cup J = X \times X \quad (2.10)$$

D'autre part, si l'on note :

$$S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xSy \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on s'aperçoit que l'on peut considérer les variables $P(x, y)$, $I(x, y)$ et $J(x, y)$ comme des fonctions du couple de paramètres $(S(x, y), S(y, x))$. Ces fonctions obéissent aux variations suivantes :

- par rapport à $S(x, y)$, J est décroissante (au sens large), alors que P et I sont croissantes (au sens large) ;
- par rapport à $S(y, x)$, J et P sont décroissantes, alors que I est croissante.

Ces monotonies se justifient à partir des configurations possibles suivantes :

S(x, y)	S(y, x)	$P(x, y)$	$I(x, y)$	$J(x, y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

3.1.4 Exemple d'application de la théorie des préférences

Considérons une relation de préférence faible S définie sur l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, composé de trois objets :

S	x	y	z
x	1	1	1
y	1	1	0
z	0	0	1

Sa décomposition en sous-relations (P, I, J) est la suivante :

- La relation de préférence stricte P :

P	x	y	z
x	0	0	1
y	0	0	0
z	0	0	0

D'après S , la seule préférence stricte concerne le couple (x, z) , puisque l'objet x domine l'objet z sans que la réciproque soit vraie.

– La relation d'indifférence I :

I	x	y	z
x	1	1	0
y	1	1	0
z	0	0	1

En dehors des éléments diagonaux, seul le couple (x, y) appartient à I : x domine y autant que y domine x .

– La relation d'indifférence J :

J	x	y	z
x	0	0	0
y	0	0	1
z	0	1	0

En effet, selon S , il n'y a pas de relation de dominance entre y et z , d'où l'incomparabilité.

On remarque que tout couple ordonné $(a, b) \in X \times X$ appartient à une et une seule des sous-relations issues de la décomposition de S (il faut aussi tenir compte de P^{-1} , la relation de préférence stricte inverse, qui contient ici le couple (y, x)) : cette propriété est due aux équations de partition 2.5, 2.6, 2.7, 2.10, p. 53.

En appliquant l'équation 2.4, on peut recomposer S :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{P} & x & y & z \\ \hline x & 0 & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 0 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{I} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 1 & 0 \\ \hline y & 1 & 1 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{S} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 1 & 1 \\ \hline y & 1 & 1 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

3.2 Théorie des préférences floues

3.2.1 Problème du choix des opérateurs

Après une publication de Orlovsky [40], plusieurs chercheurs se sont intéressés à la généralisation des concepts de la théorie des préférences, dont Perny et Roy [42]. Fodor et Roubens [25] ont abordé le problème des préférences floues sous l'angle de la décomposition d'une relation floue de préférence faible. Par rapport à la décomposition classique, l'évolution vers le flou nécessite la substitution des opérateurs ensemblistes d'intersection, d'union et de complémentarité, par leurs homologues respectifs : t-norme, t-conorme, et complémentarité floue.

Ils ont tout d'abord imaginé l'extension au flou de la décomposition d'une relation floue S réflexive, comme la décomposition (P, I, J) obtenue grâce à la substitution d'un triplet de De Morgan (T, U, c) (cf. paragraphe 1.2.5, p. 41) aux opérateurs classiques, soit :

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= T(S(x, y), c(S(y, x))) \\
 I(x, y) &= T(S(x, y), S(y, x)) \\
 J(x, y) &= T(c(S(x, y)), c(S(y, x))).
 \end{aligned}$$

Malheureusement, Fodor et Roubens [25] montrent qu'il n'existe pas de triplet de De Morgan tel que les définitions de P et I ainsi définies satisfassent la relation $P \cup I = S$. Il est par conséquent nécessaire de trouver des définitions plus appropriées.

3.2.2 Triplet de De Morgan affectant les relations entre les (P, I, J)

Pour résoudre ce problème, Fodor et Roubens considèrent séparément les problèmes de définition des (P, I, J) en fonction d'une relation floue de préférence faible S (simplement réflexive), et celui des relations logiques qu'elles devraient vérifier (équations 2.4 à 2.10, p. 53).

Dans un premier temps, ils supposent que les sous-relations (P, I, J) vérifient simplement certains axiomes :

1. Indépendance par rapport aux alternatives non concernées : $P(x, y)$, $I(x, y)$ et $J(x, y)$ dépendent seulement des valeurs $S(x, y)$ et $S(y, x)$; Roubens et Fodor les désignent alors comme des fonctions de $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$:

$$P(x, y) = p(S(x, y), S(y, x)) \quad (2.11)$$

$$I(x, y) = i(S(x, y), S(y, x)) \quad (2.12)$$

$$J(x, y) = j(S(x, y), S(y, x)). \quad (2.13)$$

2. Principe d'association positive : il s'agit de contraintes de monotonie sur le triplet $\langle p, i, j \rangle$. Les fonctions $p(a, c(b))$, $i(a, b)$, $j(c(a), c(b))$, où $a, b \in [0, 1]$, sont non-décroissantes par rapport à leurs deux arguments ; ce principe découle directement des monotonies relevées dans le cas classique (cf. section 3.1.3, p. 52).
3. Symétrie : I et J sont symétriques ; c'est une proposition naturelle, également vérifiée dans le cas classique.

Fodor et Roubens déterminent ensuite les triplets de De Morgan (T, U, c) capables de satisfaire les équations logiques 2.4 et 2.9, p. 53, dans le cas de relations de préférences (P, I, J) floues :

$$\begin{aligned} P \cup I = S \quad (2.4) &\Leftrightarrow U(P(x, y), I(x, y)) = S(x, y) \\ P \cup J = S^d \quad (2.9) &\Leftrightarrow U(P(x, y), J(x, y)) = S^d(x, y). \end{aligned}$$

Au niveau des fonctions $\langle p, i, j \rangle$, cela se traduit par les contraintes suivantes :

$$U(p(a, b), i(a, b)) = a \quad (2.14)$$

$$U(p(a, b), j(a, b)) = c(b). \quad (2.15)$$

Fodor et Roubens montrent que la seule solution est un triplet de De Morgan *fort*, c.-à-d. de Lukasiewicz, noté $(W_\varphi, W'_\varphi, c_\varphi)$. La solution est donc fixée à un automorphisme sur $[0, 1]$ φ près.

Voici les propriétés logiques entre les sous-relations floues (P, I, J) qui sont ainsi obtenues :

P est W_φ -asymétrique,	ce qui assure la T-asymétrie de P
$P \cap_{W_\varphi} I = \emptyset,$	ce qui correspond à l'équation 2.5, p. 52
$P \cap_{W_\varphi} J = \emptyset,$	ce qui correspond à l'équation 2.6, p. 52
$I \cap_{W_\varphi} J = \emptyset,$	ce qui correspond à l'équation 2.7, p. 52
$P \cup_{W'_\varphi} P^{-1} \cup_{W'_\varphi} I \cup_{W'_\varphi} J = X \times X,$	ce qui correspond à l'équation 2.10, p. 53.

Ainsi, toutes les propriétés désirées sont d'emblée vérifiées, à deux exceptions près :

- on n'a pas encore : $P \cup I \cup P^{-1} = S \cup S^{-1}$ (2.8) ;
- et P n'est que W_φ -asymétrique, et non min-asymétrique.

3.2.3 Définitions des (P, I, J) possibles

Afin de définir les sous-relations (P, I, J) par décomposition logique de S grâce aux fonctions $\langle p, i, j \rangle$, Fodor et Roubens recourent à deux t-normes continues T_1 et T_2 distinctes (avec cependant la même négation forte c_φ , correspondant à celle du triplet utilisé pour assurer leurs relations logiques), et posent pour tout $a, b \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} p(a, b) &= T_1(a, c_\varphi(b)) \\ i(a, b) &= T_2(a, b). \end{aligned}$$

Ils prouvent que le triplet de fonctions $\langle p, i, j \rangle$ satisfait les équations 2.14 et 2.15, p. 55, qui assurent les relations entre (P, I, J) , si et seulement si il existe un réel $s > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} T_1(a, b) &= \varphi^{-1}(T^s(\varphi(a), \varphi(b))) \\ T_2(a, b) &= \varphi^{-1}(T^{1/s}(\varphi(a), \varphi(b))), \end{aligned}$$

où T^s et $T^{1/s}$ appartiennent à la famille des t-normes dite *de Frank*. On ne donne pas leur forme générique, car seuls quelques cas particuliers vont nous intéresser. Quant à φ , il s'agit de l'automorphisme préalablement défini.

Voici trois solutions particulières de couples $(T^s, T^{1/s})$:

- On obtient un premier résultat intéressant lorsque s tend vers 1 : $T_1 = T_2$; de cette manière, un seul triplet de De Morgan entre dans la définition de $\langle p, i, j \rangle$. La solution s'écrit :

$$T_1(a, b) = \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) ;$$

- mais la relation P ainsi obtenue n'est pas min-asymétrique, or cela peut être souhaitable ; la seule solution offrant cette propriété est :

$$\begin{aligned} p(a, b) &= W_\varphi(a, c_\varphi(b)) \\ i(a, b) &= \min\{a, b\} \\ j(a, b) &= \min\{c_\varphi(a), c_\varphi(b)\} ; \end{aligned}$$

- enfin, une troisième solution apparaît valable : l'unique qui permet de vérifier la propriété manquante $P \cup I \cup P^{-1} = S \cup S^{-1}$ (équation 2.8, p. 53) :

$$\begin{aligned}
p(a, b) &= \min\{a, c_\varphi(b)\} \\
i(a, b) &= W_\varphi(a, b) \\
j(a, b) &= W_\varphi(c_\varphi(a), c_\varphi(b)).
\end{aligned}$$

Il est enfin important de revenir aux axiomes, et de constater que les conditions de monotonie sur $\langle p, i, j \rangle$ et de symétrie sur $\langle i, j \rangle$ sont bien vérifiées, pour l'ensemble des trois solutions sélectionnées.

La transitivité, dans un problème de préférence, peut être souhaitable. Fodor et Roubens montrent qu'une relation de préférence stricte P min-asymétrique associée à une relation de préférence S transitive, est nécessairement transitive. Parmi les trois solutions, seule la deuxième vérifie cette propriété.

Parmi ces trois solutions satisfaisantes, nous choisissons la deuxième, qui impose la min-asymétrie de P . Nous optons de plus pour l'automorphisme identité. Voici donc la décomposition en préférences que nous utiliserons :

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= p(S(x, y), S(y, x)) = \max(S(x, y) + (1 - S(y, x)) - 1, 0) \\
&= \max(S(x, y) - S(y, x), 0) \\
I(x, y) &= i(S(x, y), S(y, x)) = \min(S(x, y), S(y, x)) \\
J(x, y) &= j(S(x, y), S(y, x)) = \min(1 - S(x, y), 1 - S(y, x)).
\end{aligned}$$

3.2.4 Structure de préférence floue

Suite aux travaux de Fodor et Roubens, ainsi que d'autres auteurs comme De Baets et Ovchinnikov, Van de Walle et Kerre [53] ont proposé la définition suivante d'une structure de préférence floue.

Définition 3.2 : *Un triplet (P, I, J) de relations binaires floues définies sur X est une structure de préférence floue pour un triplet de De Morgan (T, U, c) donné, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. I est réflexive et J antiréflexive ;
2. P est T -asymétrique ;
3. I et J sont symétriques ;
4. $P \cap_T I = P \cap_T J = I \cap_T J = \emptyset$;
5. $P \cup_U P^{-1} \cup_U I \cup_U J = X \times X$.

De la même façon que pour les structures de préférence nettes, nous appellerons *équations de partition* les conditions liant les trois sous-relations :

1. Les *équations d'incompatibilité* : $P \cap_T I = P \cap_T J = I \cap_T J = \emptyset$;
2. l'*équation de complémentarité* : $P \cup_U P^{-1} \cup_U I \cup_U J = X \times X$.

Bufardi [5] reprend ensuite cette définition, en démontrant que si le triplet n'est pas celui de Lukasiewicz fort, alors P, I et J sont des relations nettes. Ce résultat est équivalent à celui de Roubens et Fodor énoncé précédemment, où la relation de préférence faible S est floue, et telle que $P \cup_U I = S$.

Définition 3.3 : un triplet (P, I, J) de relations binaires floues définies sur X est une structure de préférence floue, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. I est réflexive et J antiréflexive ;
2. P est W_φ -asymétrique ;
3. I et J sont symétriques ;
4. $P \cap_{W_\varphi} I = P \cap_{W_\varphi} J = I \cap_{W_\varphi} J = \emptyset$;
5. $P \cup_{W_\varphi} P^{-1} \cup_U I \cup_{W_\varphi} J = X \times X$.

Finalement, il propose la suivante, équivalente à la précédente mais plus concise :

Définition 3.4 : un triplet (P, I, J) de relations binaires floues définies sur X est une structure de préférence floue, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. I est réflexive ;
2. I est symétrique ;
3. $\varphi(P) + \varphi(P^{-1}) + \varphi(I) + \varphi(J) = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}(x, y) = 1, \forall x, y \in X$.

Pour plus de détails, on peut se référer aux travaux de Bufardi [5].

Dans notre cas, puisque nous avons opté pour l'automorphisme identité, nous nous intéresserons uniquement aux structures de préférences telles que : $P + P^{-1} + I + J = \mathbf{1}$.

De même que dans le cas net (cf. proposition 3.1, p. 52), Bufardi montre que la définition qu'il propose est appropriée à la décomposition en préférences de Fodor et Roubens.

Proposition 3.2

1. Si S est une relation floue de préférence (soit réflexive), alors sa décomposition (P, I, J) suivant l'une des trois solutions précédemment décrites (cf. paragraphe 3.2.3, p. 56) est une structure de préférence floue, telle que $P \cup_{W_\varphi} I = S$.
2. Réciproquement, si (P, I, J) est une structure de préférence floue, alors $S = P \cup_{W_\varphi} I$ est une relation floue de préférence.

Pour compléter la réciproque, de façon à démontrer que l'on peut recomposer (P, I, J) en décomposant $S = P \cup_{W_\varphi} I$ comme dans le cas net (cf. propriété 3.1, p. 52), il faut préalablement faire le choix d'une décomposition floue, et imposer les contraintes correspondantes au couple (P, I, J) . Nous considérons donc la solution présentée à la fin de la partie 3.2.3, p. 56, soit celle qui assure la min-asymétrie de P (deuxième solution).

Proposition 3.3 : Si (P, I, J) est une structure de préférence floue telle que la relation de préférence stricte P est min-asymétrique, alors la décomposition en préférences de la relation de préférence faible $S = P \cup_{W_\varphi} I$ suivant la solution imposant la min-asymétrie de la préférence stricte (cf. solution 2 du paragraphe 3.2.3, p. 56) est (P, I, J) .

Démonstration : Calculons d'abord S en tout couple $(x, y) \in X^2$:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= W'_\varphi(P(x, y), I(x, y)) \\ &= \varphi^{-1}(\min\{\varphi(P(x, y)) + \varphi(I(x, y)), 1\}) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(P(x, y)) + \varphi(I(x, y))), \end{aligned}$$

d'après l'équation de complémentarité vérifiée par la structure de préférence floue (P, I, J) :
 $\varphi(P) + \varphi(P^{-1}) + \varphi(I) + \varphi(J) = \mathbf{1}$.

Soit (P', I', J') la décomposition en préférence floue de S suivant la solution définie par Fodor et Roubens, telle que P' est asymétrique. D'après le résultat précédent, c'est une structure de préférence floue.

$$\begin{aligned} P'(x, y) &= W_\varphi(S(x, y), c_\varphi(S(y, x))) \\ &= \varphi^{-1}(\max\{\varphi(S(x, y)) + \varphi(\varphi^{-1}(1 - \varphi(S(y, x)))) - 1, 0\}) \\ &= \varphi^{-1}(\max\{\varphi(S(x, y)) + 1 - \varphi(S(y, x)) - 1, 0\}) \\ &= \varphi^{-1}(\max\{\varphi(S(x, y)) - \varphi(S(y, x)), 0\}) \\ &= \varphi^{-1}(\max\{[\varphi(P(x, y)) + \varphi(I(x, y))] - [\varphi(P(y, x)) + \varphi(I(y, x))], 0\}) \\ &= \varphi^{-1}(\max\{\varphi(P(x, y)) - \varphi(P(y, x)), 0\}) \\ &= \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(P(x, y))) & , \text{ si } P(y, x) = 0 \\ \varphi^{-1}(0) & , \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} P(x, y) & , \text{ si } P(y, x) = 0 \\ 0 & , \text{ sinon, soit si } P(x, y) = 0, \text{ puisque } P \text{ est asymétrique} \end{cases} \\ &= P(x, y). \end{aligned}$$

De même pour l'indifférence :

$$\begin{aligned} I'(x, y) &= \min\{S(x, y), S(y, x)\} \\ &= \min\{\varphi^{-1}(\varphi(P(x, y)) + \varphi(I(x, y))), \varphi^{-1}(\varphi(P(y, x)) + \varphi(I(y, x)))\} \\ &= \varphi^{-1}(\min\{\varphi(P(x, y)) + \varphi(I(x, y)), \varphi(P(y, x)) + \varphi(I(y, x))\}), \\ &\quad \text{puisque } \varphi \text{ est strictement croissante} \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(I(x, y)) + \min\{\varphi(P(x, y)), \varphi(P(y, x))\}) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(I(x, y)) + \varphi(\min\{P(x, y), P(y, x)\})) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(I(x, y))), \text{ puisque } P \text{ est asymétrique} \\ &= I(x, y). \end{aligned}$$

Ensuite, puisque (P', I', J') vérifie une structure de préférence, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(P') + \varphi(P'^{-1}) + \varphi(I') + \varphi(J') &= \mathbf{1} \\ \Leftrightarrow \varphi(P) + \varphi(P^{-1}) + \varphi(I) + \varphi(J') &= \mathbf{1} \\ \Leftrightarrow \varphi(J') &= \mathbf{1} - (\varphi(P) + \varphi(P^{-1}) + \varphi(I)) \\ \Leftrightarrow \varphi(J') &= \varphi(J), \text{ puisque } (P, I, J) \text{ est également une structure de préférence} \\ \Leftrightarrow J' &= J. \end{aligned}$$

On a donc démontré que la décomposition de $S = P \cup_{W_\varphi} I$ spécifiant une préférence stricte asymétrique, où (P, I, J) est une structure de préférence telle que P est asymétrique, est égale au triplet (P, I, J) .

Cela met par conséquent en évidence la bijection existant entre les relations de préférence faibles et les structures de préférence.

3.2.5 Exemple d'application de la théorie des préférences floues

Considérons une relation de préférence floue S réflexive, définie sur l'ensemble $X = \{x, y, z\}$:

S	x	y	z
x	1	1	1
y	0.8	1	0.3
z	0.1	0.2	1

Sa décomposition en sous-relations (P, I, J) est la suivante :

- La relation de préférence stricte P min-asymétrique, construite selon la formule $P(x, y) = \max(S(x, y) - S(y, x), 0)$:

P	x	y	z
x	0	0.2	0.9
y	0	0	0.1
z	0	0	0

La seule préférence stricte importante concerne le couple (x, z) , avec un degré d'appartenance à P de 0.9.

- La relation d'indifférence I , telle que $I(x, y) = \min(S(x, y), S(y, x))$:

I	x	y	z
x	1	0.8	0.1
y	0.8	1	0.2
z	0.1	0.2	1

Par rapport aux autres couples d'objets distincts, on note que l'indifférence entre x et y est particulièrement élevée. D'autre part, les objets sont totalement indifférents par rapport à eux-mêmes : c'est la propriété de réflexivité de I .

- La relation d'incomparabilité J , obtenue selon la formule $J(x, y) = \min(1 - S(x, y), 1 - S(y, x))$:

J	x	y	z
x	0	0	0
y	0	0	0.7
z	0	0.7	0

L'incomparabilité est nulle pour tout couple d'objets, à l'exception de (y, z) .

La complémentarité des trois sous-relations floues est évidente, car $P+P^{-1}+I+J = \mathbf{1}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0.2 & 0.9 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 0.9 & 0.1 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0.8 & 0.1 \\ \hline 0.8 & 1 & 0.2 \\ \hline 0.1 & 0.2 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.7 \\ \hline 0 & 0.7 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

D'autre part, l'incompatibilité des sous-relations P , I et J est évidente, puisque la t -norme utilisée dans l'équation d'incompatibilité floue est celle de Lukasiewicz. Or l'équation de complémentarité présentée ci-dessus assure que :

$$\max(R_1 + R_2 - \mathbf{1}, 0) = \mathbf{1}^c,$$

pour tout couple de relations $R_1, R_2 \in (P, I, J)$, avec $\mathbf{1}^c$ la relation floue nulle.

Enfin, on vérifie bien que S peut être recomposée à partir de deux sous-relations, ici grâce à l'union de P et I , soit par la relation $\min(P + I, \mathbf{1}) = P + I = S$:

$$\min \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0.2 & 0.9 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0.8 & 0.1 \\ \hline 0.8 & 1 & 0.2 \\ \hline 0.1 & 0.2 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0.8 & 1 & 0.3 \\ \hline 0.1 & 0.2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

4 Bilan sur les relations floues

Dans ce chapitre, nous avons exposé l'ensemble des notions scientifiques utilisées par notre méthode, en commençant par la théorie des sous-ensembles flous, qui constitue notre cadre formel de gestion de l'imprécision. Nous avons décrit comment elle permettait de généraliser les relations d'ordre classique, ainsi que la théorie des préférences. Dans le chapitre suivant, nous montrerons que ces deux concepts constituent le fondement de notre méthode ordinale floue.

Chapitre 3

Construction des relations floues

Les relations floues de préférence ayant été présentées, il s'agit maintenant de montrer qu'elles constituent la pierre d'angle idéale de notre approche ordinaire floue de l'analyse de profils sensoriels. Dans une première partie nous décrirons notre modèle et la manière dont il permet la représentation de la perception des produits, exprimée par un juge, au cours d'une répétition, pour un descripteur donné. Ensuite, nous présenterons la procédure d'agrégation visant à synthétiser l'information relative à plusieurs répétitions et plusieurs juges. Nous montrerons notamment comment chacun de ces processus de construction s'insère dans le cadre de la théorie des préférences floues. Enfin, nous proposerons une technique destinée à optimiser la quantité d'imprécision du modèle flou.

1 Modèle

1.1 Relations de dominance

1.1.1 Définitions

Nous définissons ici le modèle destiné à représenter les différences de perception recueillies pour un ensemble de produits X . Nous avons conclu le chapitre 1 en préconisant un modèle ordinal, accompagné d'un traitement statistique exclusivement relatif. Cela signifie que nous ne considérerons l'information discriminante entre produits, qu'au travers de paires de produits. Quel que soit le niveau de synthèse considéré (répétition unique, ensemble de répétitions d'un même juge, ou même ensemble de juges), nous exploiterons donc le même modèle de représentation : une relation ordinaire floue, que nous appellerons *relation de dominance*.

Dans un premier temps, on considère une répétition particulière, pour un juge et un descripteur donnés.

On définit la relation de dominance comme une relation binaire témoignant des rapports de dominance large entre produits. Elle permet, pour tout couple de produit (x, y) , de signifier ou non le fait que « x n'est pas dominé strictement par y », ou encore que « x

domine y au sens large ». On impose la réflexivité pour assurer l'équivalence avec la notion de relation de surclassement. Cela permettra l'utilisation de la théorie des préférences, en particulier grâce à la décomposition en structure de préférence (P, I, J) , présentée dans le chapitre précédent.

Par souci de clarté, nous préférons renommer les relations de la théorie des préférences en les adaptant à notre problématique de discrimination sensorielle (tableau 1.1.1, p. 64).

Relation de préférence	Equivalent	Propriétés
Préférence (large) (S)	Dominance (large) (S)	réflexive
Préférence stricte (P)	Dominance stricte (D)	asymétrique
Indifférence (I)	Indiscernabilité (I)	symétrique et réflexive
Incomparabilité (J)	Conflit (C)	symétrique et antiréflexive

TAB. 3.1 – Correspondance entre relations de préférence et de dominance

Si le terme de relation d'*indiscernabilité* paraît suffisamment explicite (impossibilité du juge à « discerner » deux produits), le terme de *conflit*, correspondant à la sous-relation d'incomparabilité, sera justifié lors de la présentation de la technique d'agrégation : pour une répétition particulière, elle sera systématiquement vide.

1.1.2 Imprécision et robustesse

La première étape consiste, pour un juge, un attribut, et une répétition donnés, à convertir l'information quantitative en information ordinale. On souhaite donc construire une relation de dominance, à partir des mesures u_i dont on dispose, où l'on note i l'indice du produit concerné.

Il existe plusieurs méthodes, plus ou moins pertinentes, pour élaborer cette relation de dominance. Il convenait donc d'établir des critères de choix : outre la simplicité, nous avons opté pour la stabilité de l'information extraite par rapport aux aléas des répétitions.

En effet, pour l'attribut considéré, le problème soumis au juge sur l'ensemble des répétitions est le même : traduire les différences de perception entre produits par des mesures. Il est donc souhaitable de permettre une relative homogénéité de l'information extraite sur chacune des répétitions. Autrement dit, il doit être possible de retrouver une cohérence entre les relations de dominance issues des différentes répétitions. Cette cohérence devra être d'autant plus grande, que nous avons précisément rejeté le modèle quantitatif à cause de son manque de robustesse. On s'attend donc à ce que sa réduction en information ordinale apporte un gain en stabilité. Cependant, la mesure étant humaine, il est vraisemblable que la reproduction de l'information au cours des répétitions ne soit pas systématique.

Le problème de la gestion des différences de perception sur les répétitions sera du ressort de la procédure d'agrégation, présentée ultérieurement : elle permettra de faire la synthèse des relations ordinales sur un ensemble de répétitions, ou même de juges, et de mesurer l'homogénéité des relations synthétisées.

Mais outre ce problème d'ordre perceptif, la robustesse de l'information ordinale est

simplement tributaire de l'imprécision des mesures fournies par le juge. C'est pourquoi nous avons justifié à la fin du chapitre 1 le recours à la théorie des sous-ensembles flous.

Nous allons introduire le flou de façon progressive, en présentant trois évolutions d'un modèle de relation de dominance. Le gain en robustesse, et donc en gestion de l'imprécision, sera à chaque fois mis en évidence.

1.1.3 Comparaison de singletons

La solution évidente pour construire une relation de dominance S entre produits consiste à comparer directement les notes qui leur sont associées. Ainsi, pour tout couple de produits $(x, y) \in X^2$, respectivement évalués par les mesures (u_x, u_y) , on définit la relation S par :

$$xSy \Leftrightarrow u_x \geq u_y.$$

La relation ainsi obtenue vérifie la propriété de réflexivité, et correspond donc bien à une relation de dominance large. Elle est également complète, car pour tous $x, y \in X$, si $u_x < u_y$ alors $u_y \geq u_x$. Enfin, puisqu'on considère une échelle de notation continue, on peut négliger l'éventualité d'avoir deux notes égales : S est donc asymétrique. Elle est de plus transitive : pour tous $x, y, z \in X$, si $u_x \geq u_y$ et $u_y \geq u_z$ alors $u_x \geq u_z$. Par conséquent, la dominance large S est une relation d'ordre total.

On peut appliquer la théorie classique des préférences, en définissant par $D = S \cap S^d$ la sous-relation de dominance stricte issue de la décomposition de S . S étant asymétrique, il est aisé de démontrer leur égalité : $D = S$. La dominance stricte D étant par conséquent complète, il apparaît alors que les relations d'indiscernabilité (I) et de conflit (C) issues de S sont nécessairement vides. En effet, ce résultat provient directement de la complémentarité vérifiée par tout triplet de sous-relations issu de la décomposition d'une relation de surclassement (cf. les *équations de partition* présentées dans la section 3.1.3, chap. 2, p. 52).

Mais cette relation de dominance S ne présente pas une bonne robustesse sur les répétitions, car elle est trop précise. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer que sa dominance stricte est nécessairement un ordre total. Or, cela ne correspond pas à la réalité de l'évaluation subjective, car il doit être possible de coder l'absence de distinction entre deux produits, en particulier lorsque les notes correspondantes attribuées par le juge sont proches. Ici, si peu significatif que soit l'écart entre deux notes, la supériorité de l'une sur l'autre est nécessairement induite. On peut donc s'attendre, pour des produits non réellement distingués par le juge, à des inversions de dominance sur les répétitions. Et cette instabilité provient de la précision excessive accordée aux notes.

Il est donc important de prendre en compte l'imprécision des notes, de façon à la répercuter sur les relations d'ordre qu'elles induisent.

1.1.4 Comparaison d'intervalles

Une solution simple permettant de prendre en compte l'imprécision consiste, pour chaque produit i , à considérer un intervalle $\bar{v}_i = [v_i^-, v_i^+]$ plutôt que la mesure u_i directement fournie par le juge. On signifie par là que u_i n'est que l'estimation d'une valeur v_i qui représenterait idéalement la perception du juge. Plutôt que de poser $u_i = v_i$ comme dans la comparaison de singletons précédemment décrite, on préfère considérer que v_i est connue de manière imprécise : $v_i \in \bar{v}_i$. L'intervalle \bar{v}_i représente l'ensemble des valeurs possibles de v_i compte tenu de la mesure u_i à disposition : on peut donc le concevoir comme une distribution de *possibilité* de v_i sachant u_i . Pour cette raison, l'intervalle \bar{v}_i contient logiquement la valeur u_i , et sa taille rend compte de l'imprécision de l'estimation du juge.

On définit alors une relation de dominance \bar{S} comme suit :

$$x\bar{S}y \Leftrightarrow v_x^+ \geq v_y^-.$$

Là encore, la réflexivité et la complétude sont évidentes.

La relation de dominance large \bar{S} peut ensuite être décomposée suivant la théorie classique des préférences.

La sous-relation de *dominance stricte* est ainsi définie par :

$$\bar{D} = \bar{S} \cap \bar{S}^d.$$

Elle contient l'ensemble des couples de produits $(x, y) \in X^2$ tels que $v_x^+ \geq v_y^-$ et $v_y^+ < v_x^-$, ce qui est équivalent à $v_x^- > v_y^+$. Par conséquent, $x\bar{D}y$ signifie que tous les éléments de \bar{v}_x sont supérieurs à tous ceux de \bar{v}_y . Puisque les intervalles \bar{v}_x et \bar{v}_y représentent respectivement les valeurs possibles des v_x et v_y , on en déduit que v_x est certainement strictement supérieur à v_y , au sens où l'événement contraire est impossible. En dépit de l'indétermination de v_x et v_y , $x\bar{D}y$ rend donc compte d'une certitude : $v_x > v_y$; il s'agit d'une *nécessité*. A l'inverse, $x\bar{S}y$ ne représente qu'une *possibilité*, celle de l'événement $v_x \geq v_y$, puisqu'elle autorise l'événement contraire $v_y > v_x$ pour les cas où les intervalles \bar{v}_x et \bar{v}_y se chevauchent.

On remarque que \bar{D} et \bar{S} s'interprètent respectivement comme une nécessité et une possibilité, mais qu'elles ne concernent pas rigoureusement le même événement. En effet, considérons le cas de deux intervalles \bar{v}_x et \bar{v}_y ayant comme unique point commun la borne supérieure de \bar{v}_y : $v_y^+ = v_x^-$. A cause de l'existence d'un tel point, on a la possibilité $x\bar{S}y$ de même que la possibilité $y\bar{S}x$, d'où l'absence de nécessité de $v_x > v_y$: $x\bar{D}^c$. Néanmoins, l'événement $v_x \geq v_y$ est nécessaire, car l'éventualité de son contraire $v_y > v_x$ est rigoureusement impossible : la valeur maximale de v_y , v_y^+ , est au mieux égale, à v_x (lorsque $v_x = v_x^-$).

La relation \bar{D} est asymétrique par construction, et transitive : pour tous produits $x, y, z \in X$, $x\bar{D}y$ et $y\bar{D}z$ implique $v_x^- > v_z^+$, soit $x\bar{D}z$. Elle n'est pas complète, car pour tout couple (x, y) pour lesquels \bar{v}_x et \bar{v}_y se chevauchent, il n'y a pas nécessité de $v_x > v_y$ ni de $v_y > v_x$: les produits x et y sont alors dits *indiscernables*. \bar{D} est donc un ordre partiel.

La sous-relation d'*indiscernabilité* $\bar{I} = \bar{S} \cap \bar{S}^{-1}$ est symétrique et réflexive, par définition. Elle contient donc l'ensemble des couples de produits (x, y) *indiscernables* : les intervalles \bar{v}_x et \bar{v}_y se chevauchant, on considère en effet que $v_x \geq v_y$ et $v_y \geq v_x$ sont également possibles, et que les produits x et y sont donc perçus par le juge de manière équivalente.

Enfin, la sous-relation de *conflit* $\bar{J} = \bar{S}^c \cap \bar{S}^d$ est vide, car \bar{S} est nécessairement complète.

Pourtant cette relation ordinale \bar{S} n'est guère plus robuste que la précédente S : le problème de la précision arbitraire des notes se trouve désormais reporté sur les bornes des intervalles. L'instabilité, pour deux produits, se situe maintenant au niveau de l'alternance entre dominance stricte et indiscernabilité.

En effet, considérons une répétition où deux produits $x, y \in X$ sont représentés par des intervalles \bar{v}_x et \bar{v}_y disjoints mais très proches l'un de l'autre, avec $v_x^- > v_y^+$. Sur cette répétition, on conclut donc à l'appartenance du couple (x, y) à \bar{D} . Considérons maintenant une nouvelle répétition, où les mesures sont identiques à la précédente, à une différence près : les u_x et u_y se trouvent à peine rapprochées, mais suffisamment pour que les intervalles correspondants \bar{v}_x et \bar{v}_y se trouvent désormais en contact. Cette fois-ci, (x, y) n'appartient plus à \bar{D} , mais à la sous-relation d'indiscernabilité \bar{I} . L'affectation d'un produit à \bar{I} ou \bar{D} est par conséquent instable.

On a donc reporté l'instabilité entre D et D^{-1} sur celle entre \bar{I} et \bar{D} . Deux intervalles se chevauchent ou ne se chevauchent pas, et c'est de cette dualité que découle l'instabilité. Les intervalles traduisent bien une imprécision, mais de façon exagérément précise, à cause de leurs frontières abruptes.

1.1.5 Comparaison d'intervalles flous

La théorie des sous-ensembles flous permet de coder de façon beaucoup plus satisfaisante cette notion d'imprécision. Comme précédemment, on considère que la valeur u_i attribuée par le juge, n'est qu'une estimation d'une valeur v_i qui correspondrait idéalement à l'intensité de sa perception du produit i . Plutôt que de décrire sa distribution de possibilité par un ensemble classique, on recourt cette fois à un sous-ensemble flou \tilde{v}_i . On définit plus précisément \tilde{v}_i comme un intervalle flou, qui correspond directement à l'extension de l'intervalle net précédent \bar{v}_i .

Ensuite, on construit une relation de dominance floue \tilde{S} en comparant les intervalles flous \tilde{v}_i . Tout comme on l'avait implicitement fait pour la comparaison des intervalles nets, on utilise le principe d'extension (cf. section 1.1, chap. 2, p. 37) :

$$\tilde{S}(x, y) = \sup_{a \geq b} \min(\mu_{\tilde{v}_x}(a), \mu_{\tilde{v}_y}(b)).$$

Cette définition correspond à une généralisation de la relation nette précédente \bar{S} , puisque l'on avait considéré $x\bar{S}y$, comme l'expression de la *possibilité* de l'événement $v_x \geq v_y$ (on peut en effet écrire : $\bar{S}(x, y) = \Pi(v_x \geq v_y)$).

Par construction, \tilde{S} est une relation réflexive, et correspond donc à une relation de surclassement flou. Elle est de plus complète, puisque le noyau d'un intervalle flou est non vide.

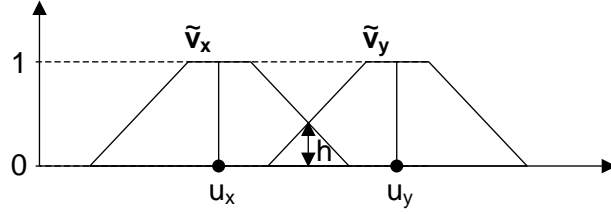


FIG. 3.1 – Exemple de comparaison d'intervalles flous

Sur la figure 3.1, p. 68, on observe un exemple de deux intervalles flous \tilde{v}_x et \tilde{v}_y modélisés par des fonctions d'appartenance trapézoïdales, respectivement centrées sur les mesures correspondantes u_x et u_y . On s'aperçoit que l'événement $v_y \geq v_x$ est totalement possible, puisque les éléments du noyau de \tilde{v}_y sont tous supérieurs aux éléments du noyau de \tilde{v}_x , d'où la valeur $\tilde{S}(y, x) = 1$. En revanche, il est impossible de déterminer deux éléments a et b de degrés d'appartenance respectifs $\mu_{\tilde{v}_x}(a)$ et $\mu_{\tilde{v}_y}(b)$, tels que $b \geq a$, avec $\min(\mu_{\tilde{v}_x}(a), \mu_{\tilde{v}_y}(b)) > h$. La valeur h correspondant à la hauteur d'intersection des deux intervalles flous définit ici la valeur de $\tilde{S}(x, y)$.

La théorie des préférences floues permet de décomposer \tilde{S} en sous-relations intéressantes. Nous appliquons les formules présentées à la fin de la section 3.2.3, chap. 2, p. 56.

La *dominance stricte floue* \tilde{D} est ainsi définie par :

$$\tilde{D}(x, y) = \max\left(\tilde{S}(x, y) - \tilde{S}(y, x), 0\right), \quad \forall x, y \in X.$$

Proposition 1.1 : La dominance stricte floue \tilde{D} issue de la décomposition d'une relation de dominance \tilde{S} obtenue par comparaison de nombres flous, est sa duale :

$$\tilde{D} = \tilde{S}^d.$$

Démonstration : pour tout couple d'objets $(x, y) \in X \times X$, les noyaux des nombres flous correspondants \tilde{v}_x et \tilde{v}_y sont, par définition, non vides, d'où :

$$\begin{aligned} \max(\Pi(v_x \geq v_y), \Pi(v_y \geq v_x)) &= 1 \\ \Leftrightarrow \max(\tilde{S}(x, y), \tilde{S}(y, x)) &= 1. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \tilde{D}(x, y) &= \max\left(\tilde{S}(x, y) - \tilde{S}(y, x), 0\right) \\ &= \max\left(\tilde{S}(x, y), \tilde{S}(y, x)\right) - \tilde{S}(y, x) \\ &= 1 - \tilde{S}(y, x) \\ &= \tilde{S}^d(x, y). \end{aligned}$$

La dominance stricte \tilde{D} est asymétrique par construction, et transitive : il s'agit d'un ordre partiel flou. En effet, c'est la forme duale de \tilde{S} , et Dubois et Prade ont démontré que cette relation définit un ordre partiel flou [18]. A ce titre, \tilde{D} généralise bien la relation précédente \bar{D} .

De plus, $\tilde{D}(x, y) = 1 - \tilde{S}(y, x)$ définit la mesure de nécessité de l'événement $v_x > v_y$, puisque $\tilde{S}(y, x)$ mesure la possibilité de l'événement contraire $v_y \geq v_x$. Comme la relation nette \bar{D} , la relation floue \tilde{D} traduit donc une nécessité des rapports de dominance : elle s'interprète bien comme une mesure de « dominance stricte ». Mais là encore, la nécessité de $v_x > v_y$ mesurée par $\tilde{D}(x, y)$ n'est pas rigoureusement identique à la nécessité de l'événement $v_x \geq v_y$.

Dans l'exemple de la figure 3.1, p. 68, la hauteur d'intersection h est non nulle, donc le produit x domine strictement y avec un degré de possibilité strictement inférieur à 1 : $\tilde{D}(x, y) = 1 - \tilde{S}(y, x) = 1 - h < 1$. La valeur $\tilde{D}(y, x)$ est nulle, car elle représente la nécessité de l'événement $v_y > v_x$, qui est égale au complémentaire à 1 de la possibilité de l'événement $v_x \geq v_y$: or ce dernier est totalement possible ($\tilde{S}(x, y) = 1$).

L'*indiscernabilité floue* \tilde{I} est ensuite définie par :

$$\tilde{I}(x, y) = \min \left(\tilde{S}(x, y), \tilde{S}(y, x) \right), \quad \forall x, y \in X.$$

Par construction, elle est symétrique et réflexive. \tilde{I} traduit la possibilité pour deux produits d'être indifférenciés. Sur l'exemple de la figure 3.1, p. 68, on montre aisément que $\tilde{I}(x, y) = h$. Cette valeur est non nulle, puisque l'intersection des intervalles flous, et plus exactement de leurs supports, n'est pas vide. $\tilde{I}(x, y)$ n'est pas non plus égale à 1, puisque l'intersection des noyaux est vide. Dans le cas de trapèzes identiques centrés sur les mesures u_x et u_y , on s'aperçoit que l'indiscernabilité est fonction croissante de ces deux mesures. Par conséquent, plus les mesures u_x et u_y sont proches, moins on considère les produits comme discernés ; l'indiscernabilité atteint son maximum dès que $|u_x - u_y| \leq l$, où l dénote la largeur du noyau des trapèzes. Inversement, plus u_x et u_y sont éloignées, plus les produits sont considérés comme discernés par le juge ; et l'indiscernabilité atteint son minimum dès que $|u_x - u_y| \geq L$, où L correspond à la largeur du support des trapèzes. Le degré d'indiscernabilité $\tilde{I}(x, y)$ traduit donc bien un degré d'incertitude du rapport ordinal des mesures u_x et u_y fournies par le juge : plus leur écart est grand, moins on peut douter du rapport exprimé.

Enfin, le *conflit flou* \tilde{C} est vide, puisque \tilde{S} est nécessairement complète :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x, y) &= \min \left(1 - \tilde{S}(x, y), 1 - \tilde{S}(y, x) \right) \\ &= 1 - \max \left(\tilde{S}(x, y), \tilde{S}(y, x) \right) \\ &= 1 - 1 = 0, \quad \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

1.1.6 Bilan de la modélisation ordinale floue

Les relations de dominance floues permettent donc d'extraire l'information ordinale des profils sensoriels, au niveau de chaque répétition. D'autre part, ce sont des relations de surclassement, et à ce titre elles se prêtent donc à l'analyse en préférences floues, par le biais d'une décomposition en sous-relations interprétables.

D'une certaine manière, on peut considérer que ces relations de dominance floues réalisent un compromis entre les approches « ordinale pure » et « quantitative pure » puisque, bien qu'ordinales, elles conservent la trace de certains écarts de notes entre produits. En particulier, il suffit d'employer des nombres flous triangulaires dont la largeur du support est supérieure ou égale à la moitié de l'échelle pour pouvoir retrouver tout écart de notes.

Cependant, la conservation partielle de l'information quantitative n'est pas un objectif en soi, mais un moyen pour apprécier le degré de certitude des différents rapports de dominance entre produits. On pourrait en effet imaginer de recueillir ces niveaux de certitude directement auprès des juges, en évitant une évaluation quantitative. De plus, l'information quantitative sera considérablement réduite au cours des traitements visant à synthétiser ou représenter les relations.

Par le terme d'approche « ordinale floue », nous préférons donc insister sur l'aspect ordinal, en signifiant la modélisation d'une information imprécise de nature ordinale. L'information quantitative des évaluations n'est pas retenue pour elle-même, mais pour quantifier l'imprécision de l'information ordinale, de façon à lui conférer une richesse d'information supérieure à celle des rangs classiques.

1.2 Nombres flous et paramètres

1.2.1 Discussion

La construction des relations de dominance floues dépend essentiellement des nombres flous choisis.

Pour les déterminer, nous avons envisagé les deux stratégies suivantes :

1. Acquisition de notes classique, puis génération de nombres flous types en fonction d'un modèle, que l'on centre ensuite sur les notes ;
2. Acquisition directe de nombres flous ; on peut procéder en demandant aux juges d'évaluer les produits à l'aide d'intervalles ; ceux-ci peuvent par exemple définir le support de nombres flous de forme prédéfinie. On a également envisagé l'acquisition de couples d'intervalles, correspondant directement aux support et noyau d'un nombre flou trapézoïdal.

Afin d'évaluer cette seconde stratégie, le laboratoire sensoriel de *PSA Peugeot Citroën* a mené une campagne d'acquisition d'intervalles simples, puis d'intervalles doubles. Il convient de souligner la complexité d'une telle expérience. Tout d'abord, l'acquisition d'intervalles doubles a manifestement perturbé les juges, les résultats étant apparus difficilement exploitables : les notions de noyau et support ont en effet posé de sérieux problèmes d'interprétation. L'acquisition d'intervalles simples s'est révélée plus satisfaisante, les in-

tervalles d'imprécision fournis par les juges paraissant assez pertinents. En annexe 3, p. 192, nous présentons une étude destinée à évaluer cette pertinence, au travers de la notion d'*invariabilité*. Les résultats décrits sont encourageants, mais ne suffisent pas à prouver une éventuelle supériorité de la qualité des relations floues ainsi dégagées.

Cette question de la pertinence des intervalles d'imprécision fournis par les juges appelle des investigations autrement plus poussées, tant au niveau des statistiques, que de la psychologie. Dans le cadre de cette thèse, à l'exception du travail présenté en annexe, nous nous restreindrons à la première stratégie. Il s'agit donc d'introduire du flou dans les mesures nettes fournies par le juge, à l'aide d'un modèle que nous allons présenter.

Dans un premier temps, nous nous bornerons à définir leur forme et leurs dimensions à un facteur près. Une technique présentée ultérieurement permettra de déterminer ce facteur.

1.2.2 Forme générale

Les critères à l'origine du choix de la forme sont les suivants :

- simplicité : le nombre flou devant être convexe, la forme générale en trapèze semble d'emblée intéressante ; en particulier, les comparaisons de nombres flous sont aisées ;
- ensemble non net : pour permettre la stabilité sur les répétitions, on a vu qu'il était important d'utiliser un ensemble flou ; une forme trop rectangulaire n'est donc pas adéquate ;
- noyau non vide : la stricte impossibilité pour un juge de distinguer deux produits, est une éventualité ; afin de lui faire correspondre une stricte indiscernabilité, en raison de la continuité de l'échelle, il est nécessaire que l'intersection entre noyaux puisse être non vide ; on peut de plus considérer que les notes sont entachées d'une incertitude minimale ; par conséquent, la forme strictement triangulaire s'en trouve éliminée.

Ces contraintes étant prises en compte, nous avons finalement porté notre choix sur un nombre trapézoïdal, de taille de noyau l et de taille de support $L = K \times l$. Nous avons a priori fixé la valeur de la constante K à 3.

Chaque nombre flou \tilde{v}_i traduisant l'imprécision de la mesure u_i attribuée par le juge, on le positionne en centrant le noyau comme le support sur cette valeur u_i .

1.2.3 Paramétrage de la taille

Le seul paramètre encore indéfini reste le coefficient l , qui permet de fixer la taille du nombre flou. Il renvoie directement à un degré d'imprécision, et il convient d'abord de s'interroger sur les facteurs dont il dépend.

Indirectement, l'imprécision permet de moduler le degré d'incertitude d'un rapport ordinal entre deux mesures, en fonction de l'importance de leur écart. Or, en observant les profils sensoriels, on se rend compte que les juges sont inégalement imprécis. Chez certains, les rapports ordinaux entre produits restent très stables sur les répétitions, même

pour des écarts de mesures très faibles. A l'inverse, chez d'autres, les écarts faibles ne se prêtent vraisemblablement pas à une interprétation ordinale, puisque les rapports ordinaux déduits ne se maintiennent pas sur les répétitions : cette incertitude doit être traduite par un coefficient l (imprécision) élevé.

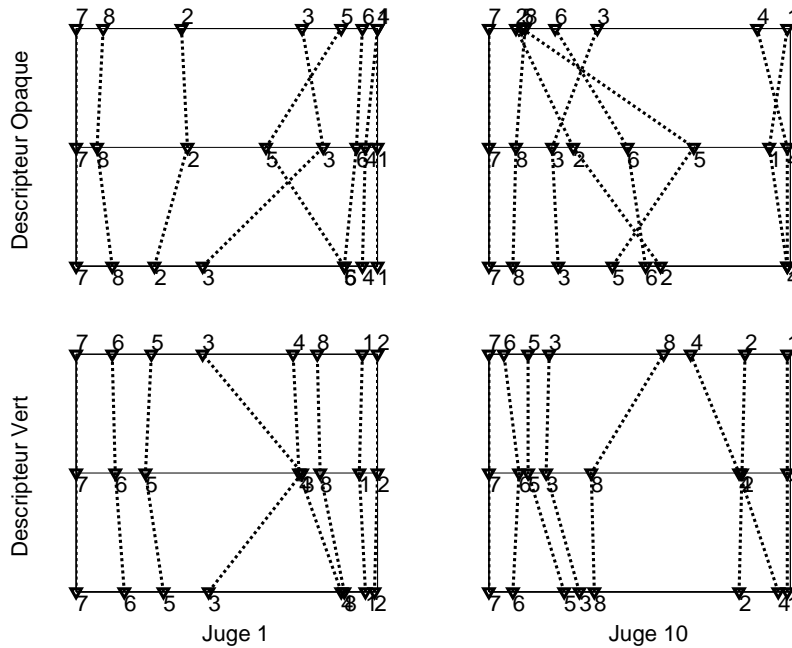


FIG. 3.2 – Variabilité de l'imprécision

L'imprécision dépend donc du juge. Ensuite, il apparaît préférable de considérer également le facteur descripteur, de façon à attribuer un coefficient l à chaque couple juge/descripteur. Sur la figure 3.2, p. 72, on s'aperçoit en effet que si les deux juges 1 et 10 sont globalement aussi précis pour le descripteur *vert* (en bas), il en est autrement pour le descripteur *opaque* (en haut). En dehors du couple de produits (5, 3) aberrant, il semble que le juge 1 soit très précis, puisque il maintient tous ses rapports ordinaux sur les 3 répétitions, malgré certains écarts de mesures extrêmement tenus (produits 6, 4 et 1, ou 7 et 8). Le juge 10 est en revanche beaucoup moins précis, puisque les 4 produits centraux comme les produits 1 et 4 sont systématiquement inversés.

On pourrait évidemment aller plus loin en rendant le coefficient d'imprécision fonction de la répétition, ou même du produit considéré : par exemple, les mesures des produits 7 et 8, fournies par le juge 10 pour le descripteur *opaque*, semblent plus précises que les autres (pas d'inversion, malgré des écarts relativement faibles). Cependant, cela n'apparaît pas complètement fondé, et surtout, cela compliquerait l'estimation de l telle qu'elle sera présentée après la description du processus d'agrégation. On considère donc que, pour un juge et un attribut donnés, tous les produits sont modélisés par un même nombre flou, dont la taille correspond à un coefficient l . Ce coefficient sera déterminé grâce à une technique d'optimisation.

Pour pallier l'impossibilité pratique de modéliser individuellement l'imprécision de chaque produit, nous avons cependant envisagé de modéliser l'*effet règle*. En effet, certaines

études [47] s'accordent à montrer que l'imprécision est d'autant plus forte que l'intensité perçue est éloignée des bornes de l'échelle (soit des maxima et minima). L'avantage d'une telle modélisation est très difficilement évaluable, à une exception près, qui concerne les produits dont les mesures sont affectées aux bornes de la règle. En effet, les juges sont entraînés à exploiter au mieux l'échelle de notation, en affectant aux produits extrêmes la note minimale ou maximale. L'imprécision de ces mesures a donc un statut particulier : dans l'esprit du juge, une note très proche d'une borne de la règle n'est pas assimilable à une note occupant précisément cette borne. Pour cette raison, nous avons conservé une version très simple de la modélisation de l'effet règle. A toute mesure x délivrée par un juge sur la règle, on associe un coefficient d'imprécision $c(x)$, qui servira à pondérer la base du nombre flou associé à la mesure x . Notre choix de fonction $c(x)$ vise simplement à atténuer le problème souligné : de forme trapézoïdale, elle est égale à 1 sur la large part centrale de la règle, à L_2 aux extrémités, et linéaire sur les deux segments de taille L_1 restant (cf. figure 3.3, p. 73). En pratique, nous avons fixé L_1 à 8% de la longueur de la règle, et L_2 à la valeur de pondération 0.1.

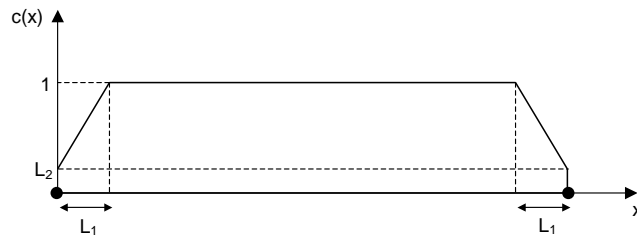


FIG. 3.3 – *Effet règle*

2 Agrégation *brute*

Au niveau de chaque répétition, on dispose d'une relation floue de dominance synthétisant l'information jugée pertinente. En dépit de la robustesse supposée du modèle choisi, il serait illusoire d'espérer obtenir des relations floues parfaitement similaires au cours des différentes répétitions. En effet, l'imprécision ne peut être qu'assez grossièrement estimée, mais surtout, les réponses du juge sont soumises à de nombreux facteurs de variabilité.

L'agrégation sur les répétitions consiste à résumer l'information ordinale sous la forme d'une nouvelle relation de dominance : le choix d'un traitement relatif de l'information impose en effet ce formalisme. Comme la moyenne dans les modèles quantitatifs, l'agrégation a pour rôle d'exploiter la variabilité de l'information sur les répétitions, pour en dégager une information plus fiable. Elle devra également permettre de mesurer la cohérence des répétitions.

On constate en fait que le traitement statistique proposé est assez analogue aux traitements standards (par exemple, basés sur une analyse de la variance), à ceci près que chez ceux-ci, l'information modélisée est de nature quantitative.

La présentation de la procédure d'agrégation sera axée sur le traitement des répétitions pour un juge donné. Cependant, elle s'appliquera de la même manière à la synthèse de

l'information ordinaire sur l'ensemble des juges. Les relations issues de l'agrégation des répétitions, pour chaque juge, pourront donc à leur tour être agrégées suivant cette même procédure, après un prétraitement que nous présenterons ultérieurement.

Enfin, on la distinguera d'une procédure complémentaire, qui sera exploitée ultérieurement afin de résoudre un problème de transitivité. En effet, on montrera qu'à l'issue de l'agrégation brute, les relations de dominance produites perdent une propriété essentielle du point de vue de l'interprétation : la transitivité de leur sous-relation de dominance stricte. Par conséquent, en préalable à l'analyse des résultats comme à l'agrégation sur les juges, il sera alors nécessaire d'utiliser une procédure correctrice, destinée à retrouver cette propriété.

A l'issue de l'agrégation, nous disposerons ainsi d'une relation de *dominance brute*, synthétisant l'information exprimée par un juge sur les répétitions, ou par l'ensemble des juges. Calculée individuellement sur chaque couple de produits, aucune consistance globale ne sera assurée, d'où le problème de transitivité évoquée. C'est en cela qu'il s'agit d'un résultat *brut* : elle ne représente qu'un résultat intermédiaire du traitement de l'information.

2.1 Principes

Contrairement à l'approche purement quantitative, l'approche ordinaire débouche sur une information de type qualitative. Celle-ci répond au problème de la comparaison de paires de produits, par des assertions (de degré de vérité variant entre 0 et 1), du type « le produit *a* domine le produit *b* ». Toutes ne sont pas compatibles, et nous avons convenu de certaines règles pour répondre aux situations litigieuses.

On définit ainsi le *conflit* comme l'inversion de dominance stricte sur deux répétitions : il s'agit d'une mesure d'incompatibilité entre les répétitions. Le juge peut en effet certifier la dominance stricte d'un produit *a* sur un produit *b*, puis ultérieurement, affirmer la relation inverse, *b* dominant strictement *a*. Le processus d'agrégation devra souligner ces situations de conflit, plutôt que de produire un compromis entre ces deux résultats.

Le conflit représente le degré le plus élevé de variabilité de l'information entre plusieurs répétitions. Il traduit un comportement fortement erratique du juge. Mais il existe une autre éventualité : l'opposition entre la dominance stricte d'un produit sur un autre, et leur indiscernabilité, sans qu'il y ait par ailleurs conflit. Dans ce cas, il nous a semblé important de retenir essentiellement la dominance stricte : le juge n'est pas nécessairement aussi performant sur toutes les répétitions, et on conçoit donc qu'il puisse affirmer une fois « *a* domine nécessairement *b* », contre « *a* et *b* indiscernables » les autres fois. Ces deux affirmations ne sont pas contradictoires, puisque l'indiscernabilité doit s'interpréter comme une hésitation du juge, ou comme une incertitude quant au rapport ordinaire qu'il exprime, plutôt que comme l'affirmation de l'équivalence des deux produits. Et en ce cas on préférera retenir l'information discriminante : soit la dominance stricte de *a* sur *b*.

En définitive, ces deux choix de synthèse d'information correspondent aux principes suivants :

- maximiser l'information discriminante, puisque l'on privilégie la dominance stricte par rapport à l'indiscernabilité ;

- rejeter l’information contradictoire, car l’existence de dominances strictes antagonistes est traduite en conflit, au détriment de toute discrimination.

Ces deux principes seront appliqués de deux manières :

- dans un premier temps, de façon radicale, à l’aide de l’opérateur max ;
- par la suite, de manière plus souple, à l’aide d’un opérateur paramétrable.

2.2 Type d’opérateur choisi

Dans les problèmes de décisions multi-critères (cf. l’ouvrage de Fodor et Roubens [25] p. 199-205), les relations de préférence complètes sont fréquemment agrégées par l’opérateur disjonctif max, notamment parce qu’il préserve la transitivité des préférences strictes. Fodor & Roubens montrent ensuite que l’on peut de façon parfaitement équivalente agréger les préférences strictes par un opérateur de type min.

Nous préférerons ce formalisme d’agrégation des relations de dominance stricte, car la dominance stricte représente le dénominateur commun des deux aspects de la stratégie évoquée : retenir le conflit (soit les dominances strictes antagonistes) et retenir la dominance stricte plutôt que l’indiscernabilité (soit l’absence de dominance stricte).

Pourtant l’agrégation conjonctive des dominances strictes ne correspond absolument pas aux principes énoncés. En particulier, elle ne permet pas de conserver le conflit, et privilégie l’indiscernabilité par rapport à la dominance stricte. En fait, c’est l’opérateur dual, le max, qui répond à nos exigences. C’est donc l’opérateur vers lequel nous sommes portés dans un premier temps, malgré que la transitivité de la dominance stricte agrégée soit perdue. Ensuite, nous avons étudié un opérateur disjonctif plus robuste, de type *owa*.

Pour garantir que les relations produites s’intégreront bien dans la théorie des préférences, qui ne manipule que des relations réflexives ou antiréflexives, on impose aux opérateurs la propriété d’*idempotence* (cf. section 2.3.3, chap. 2, p. 49). Les deux opérateurs étudiés vérifient bien cette propriété, ce qui garantit que la relation issue de l’agrégation de relations réflexives (respectivement antiréflexives) sera nécessairement réflexive (respectivement antiréflexive).

2.3 Définitions

Nous considérons désormais les différentes répétitions $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ propres à un couple juge/attribut donné, ce qui nous amène à indiquer les dominances larges issues de chaque répétition, ainsi que leurs sous-relations correspondantes.

Les relations nettes et floues seront agrégées par les mêmes techniques, on considère donc d’emblée des relations floues. On ne leur attribue donc plus une notation particulière.

Sur le tableau 2.3, p. 76, nous avons répertorié l’ensemble des relations utiles à la construction et à l’analyse de la relation antiréflexive L , défini comme le produit brut

S_k	la relation de dominance de la $k^{\text{ème}}$ répétition
(D_k, I_k)	la décomposition de S_k en dominance stricte et indiscernabilité
L	le <i>produit d'agrégation brut</i> des dominances strictes sur les répétitions, antiréflexive
$M = L^d$	sa duale, la <i>dominance large brute</i> , réflexive
(D_M, I_M, C_M)	la décomposition en préférences de M
D_M	la <i>dominance stricte brute</i>
I_M	l' <i>indiscernabilité brute</i>
C_M	le <i>conflit brut</i> , une nouvelle sous-relation

TAB. 3.2 – Notations pour l'agrégation des dominances strictes

d'agrégation des dominances strictes sur les répétitions. C'est cette relation L qui sera utilisée dans l'agrégation sur les juges.

Cependant, L ne s'interprète pas directement comme une relation de dominance large. Nous avons en effet opté pour le formalisme d'agrégation des dominances strictes, non des dominances larges. Formellement, L n'est pas une relation de dominance large (surclassement), car elle n'est pas réflexive, mais antiréflexive. L'utilisation d'un opérateur idempotent sur des relations de dominance stricte (antiréflexives) assure en effet leur antiréflexivité.

En pratique, c'est sa duale $M = L^d$ qui est une relation de dominance large, et qui se prête donc à la décomposition en préférences. En effet, L est un produit d'agrégation de dominances strictes, qui, au niveau des répétitions, sont duales de dominances larges. La composition de la duale par elle-même étant neutre ($(R^d)^d = R, \forall R$), on conçoit que la composition de L par la duale permette de retrouver la notion de dominance large, car L est le produit d'agrégation des dominances strictes, duales des dominances larges.

Pour s'en assurer, il suffit de constater que la duale d'une relation antiréflexive est réflexive : M est donc une relation de surclassement.

Enfin, nous nous intéressons maintenant à l'équivalence de l'information portée par les relations L et $M = L^d$, au niveau de leur décomposition en sous-relations de préférences. La décomposition définie par Fodor et Roubens s'intègre à la théorie des préférences, à condition de s'appliquer à des relations de surclassement. Néanmoins, les fonctions mises en jeu par cette décomposition peuvent être appliquées à toute relation quelconque R . Dans le cas net, ces fonctions correspondent aux définitions ensemblistes présentées dans la section 3.1.2, chap. 2, p. 51, alors que dans le cas flou, elles correspondent aux définitions des fonctions $\langle p, i, j \rangle$, présentées dans les sections 3.2.2, p. 55 et 3.2.3, chap. 2, p. 56.

Dans la proposition suivante, on montre la correspondance entre la décomposition d'une relation quelconque, et celle de sa duale.

Proposition 2.1 *Soit (P_R, I_R, J_R) la décomposition en sous-relations de préférences d'une relation R quelconque, et (P_Q, I_Q, J_Q) celle de sa duale $Q = R^d$. On a alors :*

$$P_Q = P_R, \quad I_Q = J_R, \quad J_Q = I_R.$$

Démonstration : on considère d'abord le cas net. On décompose Q et R en sous-relations suivant les définitions énoncées dans la section 3.1.2, chap. 2, p. 51 :

$$\begin{aligned} - P_Q &= Q \cap Q^d = R^d \cap (R^d)^d = R^d \cap R = P_R; \\ - I_Q &= Q \cap Q^{-1} = R^d \cap (R^d)^{-1} = R^d \cap R^c = J_R; \\ - J_Q &= Q^c \cap Q^d = (R^d)^c \cap (R^d)^d = R^{-1} \cap R = I_R; \end{aligned}$$

On traite ensuite le cas flou, en considérant le triplet de fonctions $\langle p, i, j \rangle$ défini par Fodor et Roubens. Ils montrent qu'un triplet $\langle p, i, j \rangle$ solution de leur décomposition (plus exactement, vérifiant les équations 2.4 et 2.9, p. 53) est tel que :

$$i(a, b) = j(c_\varphi(a), c_\varphi(b)) \Leftrightarrow p(a, b) = p(c_\varphi(b), c_\varphi(a)).$$

On peut ensuite vérifier avec Fodor et Roubens que les trois solutions de $\langle p, i, j \rangle$ décrites au paragraphe 3.2.3, chap. 2, p. 56 vérifient bien ces deux propriétés. Par conséquent :

$$\begin{aligned} P_Q(x, y) &= p(a, b), \text{ avec } a = Q(x, y) \text{ et } b = Q(y, x) \\ &= p(c_\varphi(b), c_\varphi(a)) \\ &= p(c_\varphi(Q(y, x)), c_\varphi(Q(x, y))) \\ &= p(Q^d(x, y), Q^d(y, x)) \\ &= P_R(x, y). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} I_Q(x, y) &= i(a, b), \text{ avec } a = Q(x, y) \text{ et } b = Q(y, x) \\ &= j(c_\varphi(b), c_\varphi(a)) \\ &= j(c_\varphi(Q(y, x)), c_\varphi(Q(x, y))) \\ &= j(Q^d(x, y), Q^d(y, x)) \\ &= J_R(x, y), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} I_R(x, y) &= i(a, b), \text{ avec } a = R(x, y) \text{ et } b = R(y, x) \\ &= j(c_\varphi(b), c_\varphi(a)) \\ &= j(c_\varphi(R(y, x)), c_\varphi(R(x, y))) \\ &= j(R^d(x, y), R^d(y, x)) \\ &= J_Q(x, y). \end{aligned}$$

Cette proposition nous permet de placer l'analyse du produit d'agrégation des dominances strictes (ici L) dans le cadre de la théorie des préférences. A toute relation R , on associe la décomposition en sous-relations de préférences de sa duale grâce à la définition suivante :

Définition 2.1 : on appelle décomposition duale en préférences d'une relation quelconque R , la décomposition de sa duale R^d suivant la solution de Fodor et Roubens garantissant l'asymétrie (cf. section 3.2.3, chap. 2, p. 56). On notera simplement $(P_{R^d}, I_{R^d}, J_{R^d})$ ou $(D_{R^d}, I_{R^d}, C_{R^d})$ le résultat.

On remarque que ce triplet est une structure de préférence si et seulement si R est une relation de surclassement (c'est-à-dire antiréflexive).

Par la suite, nous associerons à tout produit d'agrégation de dominances strictes, sa décomposition duale. Pour un produit asymétrique, il s'agira donc d'une structure de préférence, et on vérifiera que ses sous-relations s'interprètent bien comme en tant que dominance stricte, indiscernabilité et conflit.

2.4 Opérateur max

L'agrégation des dominances strictes D_k antiréflexives par l'opérateur idempotent max produit une relation brute $L = \max_k D_k$ antiréflexive. Par conséquent, sa duale M est réflexive, et sa décomposition duale (D_M, I_M, C_M) est bien une structure de préférence.

C_M est une nouvelle sous-relation, qui correspond au *conflit*. D'après la proposition 2.1, p. 76, on a $C_M = I_L = L \cap L^{-1}$. Par conséquent, C_M est égale à la part symétrique de L . Or L correspond au maximum des dominances strictes initiales, donc C_M mesure bien ce que l'on a appelé « conflit », soit l'opposition des dominances antagonistes.

La sous-relation I_M renvoie à ce qui n'est ni conflit, ni dominance stricte, soit l'indiscernabilité. En particulier, on s'aperçoit qu'elle est nécessairement nulle lorsque toutes les dominances strictes D_k sont complètes, soit dépourvues d'indiscernabilité.

Prenons l'exemple d'un juge évaluant un couple de produits (x, y) donné, au cours de trois répétitions :

k	$S_k(x, y)$	$S_k(y, x)$
1	1	1
2	1	0.2
3	0.5	1

On en déduit les dominances strictes correspondantes (sous-relations de préférence stricte) :

k	$D_k(x, y)$	$D_k(y, x)$
1	0	0
2	0.8	0
3	0	0.5

La répétition 1 est neutre : l'indiscernabilité entre x et y est totale, les dominances strictes sont donc nulles, il ne peut y avoir de conflit. En revanche, les deux autres sont conflictuelles, puisque les éléments strictement dominants sont d'abord x , puis y .

L'agrégation des relations de dominance stricte par l'opérateur disjonctif max conduit à la relation L définie par $L(x, y) = 0.8$ et $L(y, x) = 0.5$.

Voici les mesures induites de conflit, dominance stricte, et indiscernabilité :

	(x, y)	(y, x)
L	0.8	0.5
$M = L^d$	0.5	0.2
D_M	0.3	0
I_M	0.2	0.2
C_M	0.5	0.5

Le conflit entre les deux produits est élevé à cause de l'importance des dominances strictes antagonistes.

Les trois sous-relations D_M , I_M et C_M apparaissent comme satisfaisantes du point de vue de l'interprétation, puisqu'elles renvoient exactement aux notions recherchées.

En définitive, le produit d'agrégation brut L résume donc exactement l'information recherchée. L'interprétation est rendue possible grâce à la décomposition en préférences de la relation de dominance large M , définie comme sa duale.

2.5 Opérateur *owa*

2.5.1 Justification

L'agrégation par l'opérateur \max n'est cependant pas complètement satisfaisante, puisque l'opérateur est par définition trop sensible aux valeurs extrêmes, et donc aux aléas. Pour tout couple de produits (x, y) , définir $L(x, y)$ comme le $\max_k S_k(x, y)$, implique en effet qu'une répétition faiblement représentative puisse prévaloir sur toutes les autres. Plus exactement, la dominance stricte qu'elle exprime est susceptible de neutraliser toute autre information. On peut ainsi craindre les deux phénomènes suivants :

- une seule dominance stricte suffit à écraser toutes les indiscernabilités ;
- une seule inversion de dominance stricte suffit à écraser toute dominance au profit du conflit.

Or ceci devient très discutable lorsque le nombre de relations à agréger est élevé. Le dernier point semble particulièrement dommageable, puisque le conflit renvoie à une aberration du juge. La souligner est crucial lorsqu'il n'y a pas moyen d'extraire une information plus fiable ; mais ne retenir qu'elle en présence de nombreuses autres répétitions consistantes apparaît peu pertinent. Les évaluations conduites chez *PSA Peugeot Citroën* se déroulent en général sur trois répétitions, ce qui ne nécessite pas absolument l'utilisation d'un opérateur plus robuste que le \max . Il devient en revanche essentiel lorsqu'on considère l'étape ultérieure d'agrégation des résultats des juges. Ils sont d'une part plus nombreux (environ une douzaine), mais surtout, l'objectif de l'agrégation n'est plus le même : il ne s'agit plus de révéler une information fiable à partir de répétitions plus ou moins compatibles, mais d'obtenir un consensus sur une information supposée fiable. Un opérateur de type moyenne ou médiane apparaît donc beaucoup plus indiqué ; on peut même envisager le \min , si l'on souhaite considérer l'information commune à tous les juges. Nous admettons donc la nécessité de développer l'agrégation par un opérateur *owa*, et reprenons le cas des répétitions.

L'opérateur que nous proposons d'utiliser est l'opérateur *owa* (ou *Ordered Weighted Average*), présenté dans la section 2.3.3, chap. 2, p. 49. Il est d'un usage assez courant en aide à la décision multi-critères [25].

Nous définissons les coefficients de pondérations de l'*owa* à l'aide du degré de disjonction ρ proposé par Yager et Filev (cf. section 2.3.3, chap. 2, p. 49).

On note N le produit de l'application de l'*owa* de degré de disjonction ρ sur les relations de dominance stricte D_k comme suit :

$$N = Owa_{k \in \{1, \dots, n\}}(D_k, \rho)$$

Dans le cas de l'agrégation des répétitions, il peut être intéressant de faire varier le degré de disjonction de cet opérateur entre deux valeurs : 1 (le max) et 0.5 (la moyenne, car toutes les pondérations sont alors égales). En effet, la première valeur induit l'agrégation radicale précédente, tandis que la seconde permet d'obtenir une relation de dominance stricte brute moyenne : c'est-à-dire aussi proche que possible des répétitions (au sens de l'erreur quadratique). Cependant l'utilisation de la moyenne n'est pas compatible avec les principes fixés pour l'agrégation. C'est seulement dans l'hypothèse d'un nombre très élevé de répétitions que l'on pourra tendre vers la moyenne.

2.5.2 Problème

L'utilisation directe de l'opérateur *owa* sur les relations de dominance stricte de chaque répétition, contrairement à celle du max, engendre une contrainte non satisfaisante, qui doit être éliminée.

La relation N est bien antiréflexive, puisque les *owa* sont *idempotents*. On note $O = N^d$ sa duale réflexive, que l'on considère à l'instar de $M = L^d$ comme une relation de dominance large, et (D_O, I_O, C_O) sa décomposition.

Montrons que dans une situation particulière, dite de « conflit maximal », où aucune indiscernabilité n'est pourtant avérée ($I_k(x, y) = 0, \forall k$), la sous-relation d'indiscernabilité brute I_O n'est pas vide. Pour un nombre de répétitions pair, on peut montrer que cette configuration survient précisément lorsqu'une moitié des répétitions sont telles que $D_k(x, y) = 1$ et l'autre telles que $D_k(y, x) = 1$.

Notons $o_k(\rho)$ le coefficient de l'opérateur *owa* pondérant la $k^{i\grave{e}me}$ valeur croissante. On rappelle que l'*owa* est uniquement fonction de n et ρ .

Dans la situation considérée, le conflit $C_O(x, y) = C_O(y, x)$ est donc égal à : $C_{max}(n, \rho) = \sum_{k \in \{1 \dots \frac{n}{2}\}} o_k(\rho)$. Par conséquent, pour $\rho < 1$ (c'est-à-dire pour le cas où l'*owa* est différent du max), le conflit maximal $C_{max}(n, \rho)$ est donc strictement inférieur à 1.

Ce résultat n'est pas anodin. Les sous-relations (D_O, I_O, C_O) sont en effet liées par la propriété de complémentarité (cf. section 3.2.4, chap. 2, p. 57), ce qui implique l'inéquation suivante : $D_O(x, y) + I_O(x, y) > 0$. Or, dans la situation étudiée, il est aisé de montrer que $D(x, y) = D(y, x) = 0$.

Au travers de ce cas particulier du « conflit maximal », on a donc montré que le conflit $C_O(x, y)$ n'atteignait pas la valeur espérée 1, et que ce manque était contrebalancé par une valeur d'indiscernabilité $I_O(x, y)$ non nulle, malgré l'absence d'indiscernabilité sur les répétitions.

Il apparaît donc que la relation de dominance large O ne correspond pas exactement à nos attentes : si la dominance stricte D_O semble cohérente, la frontière entre les parts d'indiscernabilité I_O et de conflit C_O est mal définie.

2.5.3 Solution

On cherche donc à générer une relation de dominance large M plus satisfaisante que O . En particulier, on souhaite résoudre le problème de « d'équilibre » entre les sous-relations d'indiscernabilité et de conflit.

La solution que nous proposons consiste à évaluer indépendamment l'indiscernabilité, puis à compléter la relation de dominance brute en évaluant les parts de conflit et dominance stricte brutes. On remarque que cela revient à définir la relation de dominance large M par le biais de ses sous-relations (D_M, I_M, C_M) , à l'inverse de la procédure suivie jusqu'ici. Pour rester dans le cadre de la théorie des préférences, on ne s'intéresse donc qu'aux sous-relations constituant une structure de préférences.

En effet, il n'apparaît pas évident de construire une dominance stricte brute directement. La notion est complexe, en raison de l'antisymétrie des dominances strictes initiales, qui sont éventuellement conflictuelles. De ce fait, une fonction linéaire appliquée aux $D_k(x, y)$ ne s'interprète plus comme une dominance stricte. Le calcul de l'indiscernabilité brute est beaucoup moins délicat, car ce problème ne se pose pas : les indiscernabilités initiales sont symétriques.

On commence par construire une relation I_M d'indiscernabilité brute à l'aide d'un degré de disjonction ρ_1 fixant le rapport de priorité, au niveau des répétitions, entre indiscernabilité et dominance stricte :

$$I_M = owa_{k \in \{1, \dots, n\}}(I_k, \rho_1).$$

Puisque l'*owa* est *idempotent*, et que les I_k sont des relations d'indiscernabilité (réflexives), I_M est réflexive. En outre, les I_k étant symétriques, I_M l'est également. Elle correspond donc effectivement à une relation d'indiscernabilité floue.

Nous montrons maintenant en quoi le paramètre ρ_1 représente un rapport de priorité entre dominance stricte et indiscernabilité. Par définition, ρ_1 est un degré de disjonction, destiné à l'agrégation des indiscernabilités sur les répétitions. Par conséquent, plus il est élevé, moins l'indiscernabilité a besoin d'être répétée pour être retenue. Compte tenu de la complémentarité des sous-relations d'indiscernabilité et de dominance stricte sur chaque répétition, cela signifie que l'indiscernabilité prend l'avantage sur la dominance stricte : même répétée, le poids de la dominance stricte s'affaiblit. Dans le cas extrême $\rho_1 = 1$, l'opérateur *owa* devient le max, et pour un couple de produits (x, y) donné, l'indiscernabilité maximale écrase toutes les autres, c'est-à-dire les valeurs d'indiscernabilité plus faibles, qui correspondent également aux dominances strictes les plus fortes.

Ensuite, on calcule un produit d'agrégation des dominances strictes L' , où le degré de disjonction ρ_2 joue son rôle habituel, soit moduler l'importance des dominances strictes répétées, par rapport à celles isolées :

$$L' = Owa_{k \in \{1, \dots, n\}}(D_k, \rho_2).$$

Dans l'agrégation des dominances strictes sur les répétitions à l'aide de l'opérateur max, on peut montrer que l'indiscernabilité brute I_M qui en résulte est égale au $\min_{k \in \{1, \dots, n\}} I_k$, soit le produit de l'agrégation des indiscernabilités initiales par l'opérateur min, dual de l'opérateur max. On peut donc imaginer de reprendre cette dualité, dans le but de simplifier la détermination des deux paramètres ρ_1 et ρ_2 . Il suffit pour cela de imposer leur dualité par rapport à l'opérateur de complémentarité choisi ($c(x) = 1 - x$), en posant :

$$\rho_2 = 1 - \rho_1.$$

On obtient la relation de dominance correspondant à L' en la définissant comme sa duale : $M' = L'^d$. Soit $(D_{M'}, I_{M'}, C_{M'})$ la décomposition de M' .

A ce stade, nous disposons d'un côté de l'indiscernabilité brute I_M , et de l'autre de la relation de dominance large M' , que l'on doit exploiter pour générer les sous-relations manquantes D_M et C_M .

L'idée consiste à construire D_M et C_M , en imposant simplement, pour tout couple de produits $(x, y) \in X^2$, la conservation des parts relatives de conflit et de dominance stricte respectivement exprimées par $C_{M'}(x, y)$ et $\max\{D_{M'}(x, y), D_{M'}(y, x)\}$, et la complémentarité inhérente aux structures de préférences (cf. section 3.2.4, chap. 2, p. 57) :

$$\begin{aligned} C_M(x, y) &= k(x, y).C_{M'}(x, y) \\ D_M(x, y) &= k(x, y).D_{M'}(x, y) \\ 1 &= D_M(x, y) + D_M(y, x) + I_M(x, y) + C_M(x, y). \end{aligned}$$

On calcule ensuite les coefficients $k(x, y) = k(y, x)$ permettant de normaliser la structure de préférence :

$$\begin{aligned} D_M(x, y) + D_M(y, x) + I_M(x, y) + C_M(x, y) &= 1 \\ \Leftrightarrow k(x, y).(\max\{D_{M'}(x, y), D_{M'}(y, x)\} + C_M(x, y)) + I_M(x, y) &= 1 \\ \Leftrightarrow k(x, y). \max\{L'(x, y), L'(y, x)\} + I_M(x, y) &= 1. \end{aligned}$$

Pour tout (x, y) où $\max\{L'(x, y), L'(y, x)\} \neq 0$, la solution est donc :

$$k(x, y) = \frac{1 - I_M(x, y)}{\max\{L'(x, y), L'(y, x)\}}.$$

Le cas $\max\{L'(x, y), L'(y, x)\} = 0$ se présente dans les deux situations suivantes :

- Les dominances strictes initiales sont telles que $D_k(x, y) = D_k(y, x) = 0$ sur toutes les répétitions k ; dans ce cas, quel que soit ρ_2 , on a nécessairement $\max\{L'(x, y), L'(y, x)\} = 0$;

- ou bien, dans le cas contraire, certains des paramètres de l'*owa* sont nuls ; cela n'est possible que pour $\rho_2 \in \{0, 1\}$; mais seul le min ($\rho_2 = 0$) peut conduire à annuler $\max \{L'(x, y), L'(y, x)\}$.

Si l'on peut aisément contourner la seconde situation, en optant pour un degré de disjonction strictement positif, l'éventualité de la première est à prendre en compte. Dans le cas de l'agrégation sur les répétitions, cela signifie que l'indiscernabilité est totale : l'*owa* étant idempotent, on a donc, quel que soit ρ_1 , $I_M(x, y) = 1$; la valeur de $k(x, y)$ importe donc peu, puisque : $C_M(x, y) = D_M(x, y) = 1 - I_M(x, y) = 0$. On pose donc :

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - I_M(x, y)}{\max\{L'(x, y), L'(y, x)\}}; & \text{si } \max \{L'(x, y), L'(y, x)\} > 0; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Mais si l'on agrège les juges, il peut y avoir du conflit, et la complémentarité entre les indiscernabilités initiales et les dominances strictes initiales n'est plus assurée. L'existence d'une paire de produits (x, y) telle que $D_k(x, y) = D_k(y, x) = 0, \forall k$ est par conséquent possible. C'est une des raisons pour lesquelles nous proposons un prétraitement des relations synthétisant les perceptions de chacun des juges : en éliminant le conflit initial, l'agrégation sur les juges sera parfaitement équivalente à l'agrégation sur les répétitions.

On vérifie enfin que le triplet de sous-relations (D_M, I_M, C_M) obtenu est nécessairement une structure de préférence (cf. section 3.2.4, chap. 2, p. 57), grâce à sa complémentarité, à la symétrie et à la réflexivité de I_M (acquise grâce à l'idempotence de l'opérateur *owa*).

2.5.4 Résumé et exemple d'agrégation par un opérateur *owa*

Dans le tableau 2.5.4, p. 83, nous récapitulons la technique d'agrégation de n relations floues de dominance larges S_k .

$S_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$	les relations de dominance large à agréger
(D_k, I_k, C_k)	la décomposition de S_k
ρ	le degré de disjonction « global » de l'agrégation
$\rho_1 = 1 - \rho$	le rapport de priorité entre dominance stricte et indiscernabilité
$\rho_2 = \rho$	le degré de disjonction de l'agrégation des dominances strictes
$I_M = Owa_{k \in \{1, \dots, n\}}(I_k, \rho_1)$	l'indiscernabilité brute
$L' = Owa_{k \in \{1, \dots, n\}}(D_k, \rho_1)$	le produit d'agrégation (intermédiaire) des dominances strictes
$k(x, y), \forall x, y \in X$	la matrice de coefficients de normalisation de L' , symétrique, calculée suivant la formule 3.1, p. 83
$L(x, y) = k(x, y) \cdot L'(x, y), \forall x, y \in X$	la relation floue produit d'agrégation brut
$M = L^d$	la dominance large brute
(D_M, I_M, C_M)	les sous-relations de l'agrégation brute

TAB. 3.3 – Résumé de l'agrégation brute de n relations de dominance large

Nous allons maintenant appliquer cet algorithme à un cas particulier de deux dominances larges définies sur un ensemble d'objets $X = \{x, y, z\}$. On considère que chaque

relation est issue de la comparaison de mesures floues fournis par le juge au cours d'une répétition particulière. Pour cette raison, les dominances larges sont dépourvues d'incomparabilité.

Voici les dominances larges obtenues sur deux répétitions :

S₁	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	S₂	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>x</i>	1	1	1	<i>x</i>	1	0	1
<i>y</i>	0	1	1	<i>y</i>	1	1	1
<i>z</i>	0	1	1	<i>z</i>	0	0.4	1

On désire obtenir une description « moyenne » des évaluations du juge, et on choisit pour cela un degré de disjonction $\rho = 0.5$.

Afin de construire l'indiscernabilité brute, on commence par extraire les sous-relations d'indiscernabilité initiales :

I₁	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	I₂	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>x</i>	1	0	0	<i>x</i>	1	0	0
<i>y</i>	0	1	1	<i>y</i>	0	1	0.4
<i>z</i>	0	1	1	<i>z</i>	0	0.4	1

Le degré de disjonction $\rho_1 = 1 - \rho$ étant égal à 0.5, tous les poids sont égaux, et l'indiscernabilité brute est obtenue en moyennant les indiscernabilités initiales I_1 et I_2 :

I_M	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>x</i>	1	0	0
<i>y</i>	0	1	0.7
<i>z</i>	0	0.7	1

On cherche ensuite à construire le produit d'agrégation L' . Pour cela, on calcule les dominances strictes initiales :

D₁	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	D₂	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>x</i>	0	1	1	<i>x</i>	0	0	1
<i>y</i>	0	0	0	<i>y</i>	1	0	0.6
<i>z</i>	0	0	0	<i>z</i>	0	0	0

Le produit L' est alors obtenu en moyennant D_1 et D_2 , puisque $\rho_2 = \rho = 0.5$:

L'	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>x</i>	0	0.5	1
<i>y</i>	0.5	0	0.3
<i>z</i>	0	0	0

On calcule ensuite les coefficients de normalisation de L' , en appliquant la formule 3.1, p. 83 :

$\mathbf{1} - \mathbf{I}_M$	x	y	z	$\max(\mathbf{L}', \mathbf{L}'^{-1})$	x	y	z
x	0	1	1	x	0	0.5	1
y	1	0	0.3	y	0.5	0	0.3
z	1	0.3	0	z	1	0.3	0

\mathbf{k}	x	y	z
x	1	2	1
y	2	1	1
z	1	1	1

Finalement, le produit d'agrégation brut est construit en normalisant L' par multiplication terme à terme avec les coefficients de la matrice k :

\mathbf{L}	x	y	z
x	0	1	1
y	1	0	0.3
z	0	0	0

La duale de L constitue la dominance large brute M :

\mathbf{M}	x	y	z
x	1	0	1
y	0	1	1
z	0	0.7	1

Voici finalement les sous-relations brutes, issues de la décomposition de $M = L^d$:

\mathbf{D}_M	x	y	z	\mathbf{I}_M	x	y	z	\mathbf{C}_M	x	y	z
x	0	0	1	x	0	0	0	x	0	1	0
y	0	0	0.3	y	0	0	0.7	y	1	0	0
z	0	0	0	z	0	0.7	0	z	0	0	0

Comparons maintenant l'information contenue dans les relations de dominance large initiales, par rapport la synthèse des trois sous-relations brutes obtenues :

- Conflit (C_M) : le couple (x, y) apparaît totalement conflictuel. Ce résultat apparaît tout-à-fait consistant, au vue de l'information contraire $D_1(x, y) = D_2(y, x) = 1$. Grâce à l'opération de normalisation, aucune trace d'indiscernabilité n'affecte ce couple d'objets.
- Dominance stricte (D_M) : elle est totale pour le couple (x, z) , faible pour le couple (y, z) , et nulle ailleurs. En ce qui concerne (x, y) , le résultat témoigne de la parfaite cohérence entre les deux répétitions : x domine totalement y . La dominance stricte de y sur z résulte en revanche d'un compromis entre l'indiscernabilité totale de la première répétition, et la dominance stricte non négligeable de la seconde ($D_2(y, z) = 0.6$).
- L'indiscernabilité (I_M) : elle rend logiquement compte de l'indiscernabilité entre y et z , complète sur la première répétition, mais tempérée par une part de dominance stricte sur l'autre.

2.6 Agrégation sur les juges

Dans la présentation de l'agrégation brute, nous nous sommes focalisés sur le traitement des répétitions. Pourtant, cette méthode s'applique également au traitement des juges, comme au traitement de tout ensemble de relations de dominance elles-mêmes issues d'une procédure d'agrégation, et non nécessairement d'une simple comparaison de mesures. Mais en ce cas, nous allons montrer que l'agrégation brute nécessite un prétraitement. Sans restreindre la généralité de notre propos, nous nous intéressons à l'agrégation des juges, c'est-à-dire des relations de dominance résultant de l'agrégation par juge des répétitions.

En effet, lorsqu'on agrège les répétitions, chacune est représentée par une relation de dominance stricte et une relation d'indiscernabilité, et l'objectif est alors de produire des relations de dominance stricte et d'indiscernabilité synthétiques, ainsi qu'une relation de conflit destinée à rendre compte des inversions de dominance stricte.

Lorsqu'on agrège les juges, la situation est différente, puisque les relations de dominance traitées se composent non seulement de sous-relations de dominance stricte et d'indiscernabilité, mais aussi de conflit. Or, on souhaite que le produit d'agrégation reste une simple relation floue, décomposable selon la théorie des préférences floues : trois sous-relations doivent donc suffire à l'analyse. Mais il n'est pas possible de traiter indépendamment les relations à agréger, d'indiscernabilité, de conflit et de dominance stricte, tout en produisant une nouvelle relation de conflit, rendant compte des dominances strictes contraires : il faudrait alors quatre sous-relations. De trois sous-relations à agréger, il est donc nécessaire de revenir à deux, comme dans le cas des répétitions.

Une première solution consisterait à convertir le conflit présent dans les relations de dominance à agréger, en dominance stricte. Ainsi, la composante de conflit disparaîtrait, au profit d'une sous-relation de dominance stricte non antisymétrique. L'agrégation brute permettrait de révéler cette antisymétrie dans le conflit agrégé brut final, au même titre que les conflits des dominances strictes initiales. Ainsi, les conflits affectant les relations de dominances à agréger se trouveraient bien prises en compte dans la relation de conflit brute synthétisée.

Mais l'inconvénient d'une telle méthode réside dans la confusion du conflit agrégé obtenu. Il reflèterait aussi bien les aberrations effectuées par chacun des juges, que le *désaccord* entre leurs dominances strictes agrégées. Nous avons jugé cette confusion entre aberrations et désaccords peu souhaitable.

Le désaccord renvoie en effet à une notion essentielle, qu'il est important de pouvoir isoler lors du traitement des résultats du panel de juges. Au contraire, les aberrations ne sont qu'une forme d'incertitude, au même titre que l'indiscernabilité. On préfère donc envisager une seconde solution, consistant à transformer le conflit initial en indiscernabilité. La complémentarité entre les sous-relations initiales d'indiscernabilité et dominance stricte est, comme dans la première, assurée. Mais là, le conflit agrégé rend exclusivement compte des désaccords : c'est-à-dire de l'existence de juges témoignant de dominances strictes contraires.

La « confusion » se trouve déplacée vers l'indiscernabilité, qui rend aussi bien compte des équivalences de produits, que des aberrations. Dans cette sous-relation, on retrouvera donc à la fois les couples de produits dont les évaluations sont très proches, et ceux évalués

de façon incohérente, ces deux situations s'interprétant finalement comme une impossibilité des juges à témoigner d'un rapport de supériorité, et donc comme une incertitude de l'information ordinale exprimée.

On opéra pour cette solution. Le prétraitement des relations obtenues suite à l'agrégation des répétitions, pour chacun des juges, consiste donc à transformer le conflit en indiscernabilité. Soit M_1 le produit d'agrégation brute d'un juge donné, et $(D_{M_1^d}, I_{M_1^d}, C_{M_1^d})$ sa décomposition duale. En préalable à l'agrégation sur les juges, on le transforme donc en un produit M_2 de décomposition duale $(D_{M_2^d}, I_{M_2^d}, C_{M_2^d})$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_{M_2^d} &= D_{M_1^d} \\ I_{M_2^d} &= I_{M_1^d} \cup C_{M_1^d} \\ C_{M_2^d} &= \emptyset. \end{aligned}$$

En flou, on utilisera la t-conorme de Lukasiewicz.

Considérons le produit d'agrégation brut $(D_{M^d}, I_{M^d}, C_{M^d})$ des relations brutes de chacun des juges, et $(D_{M^d}^j, I_{M^d}^j, C_{M^d}^j)$ le produit de l'agrégation sur les répétitions d'un unique juge j . On note bien le changement d'interprétation :

- $I_{M^d}^j$ marque l'équivalence de perception du juge j , et $C_{M^d}^j$ ses évaluations aberrantes ;
- I_{M^d} marque aussi bien l'équivalence de perception, que l'incohérence des évaluations ;
- le conflit C_{M^d} témoigne des désaccords entre juges sur les rapports de dominance entre produits.

Au delà des différences d'interprétation, on peut aussi s'interroger sur les différences de paramétrage entre l'agrégation sur les répétitions, et celle sur les juges. En effet, l'objectif de l'agrégation sur les répétitions est plutôt de souligner les aberrations, et de ne retenir que les dominances strictes non-conflictuelles, d'où l'opérateur max ou un degré de disjonction ρ_2 proche de 1 (le max). On peut maintenir les mêmes paramètres pour le traitement des juges, de façon à souligner les désaccords. Mais il peut être préférable d'utiliser une approche plus consensuelle, avec $\rho_1 = \rho_2 = 0.5$: le produit d'agrégation brut traduit alors la perception moyenne des juges. Enfin, il est également possible de s'approcher du min, avec ρ_2 proche de 0 (et ρ_1 proche de 1) : dans ce cas, la stratégie serait de ne révéler que les dominances strictes unanimement marquées, en minimisant par ailleurs la manifestation des désaccords.

Nous avons préféré l'approche consensuelle, avec $\rho_1 = \rho_2 = 0.5$.

3 Résolution du problème de transitivité

3.1 Description du problème

Quelle que soit la technique utilisée ou le type d'agrégation réalisée (sur les juges ou répétitions), le produit d'agrégation brute L résume l'information recherchée au niveau de chaque paire de produits, et les sous-relations issues de sa décomposition duale d'indiscernabilité, de dominance stricte et de conflit décrivent les réponses du juge de manière

pertinent, car elles s'inscrivent dans la théorie des préférences, et s'interprètent parfaitement.

Mais L est un produit brut de l'agrégation opérant par couples de produits. Aucune consistance n'est vérifiée à un niveau global. En termes de propriétés, cela se traduit par la perte de transitivité (min-transitivité en flou) de la dominance stricte : les relations initiales D_k sont transitives, mais $D_{L^d} = D_M$ ne l'est plus. Or cela compromet son interprétation : si un produit x domine nécessairement un produit y , et si ce même produit domine nécessairement un produit z , alors il serait dommageable que x ne domine pas z .

Compte tenu de la technique d'agrégation retenue, une telle entorse à la transitivité est pourtant possible. Si l'on considère l'agrégation sur les répétitions, une dominance stricte énoncée sur une unique répétition, suffit en effet à occulter tout ou partie de l'indiscernabilité énoncée sur toutes les autres. L'exemple précédent se justifie alors parfaitement :

- x domine strictement z sur une répétition i_1 ; et (x, y) est indiscernable sur toutes les autres répétitions ;
- y domine strictement z sur une répétition $i_2 \neq i_1$; et (y, z) est indiscernable sur toutes les autres répétitions.

Par conséquent, aucune répétition ne traduit simultanément les dominances strictes de x sur y et de y sur z . La transitivité propre à toute relation de dominance stricte extraite d'une répétition n'assure donc à aucun moment la dominance stricte de x sur z . Or rien ne contraint le juge à la marquer : s'il s'en abstient, la dominance stricte issue de la décomposition duale de L n'est pas transitive.

Dans cette situation, il paraît naturel de compléter la dominance stricte avec le couple (x, z) . C'est même conforme à la stratégie d'agrégation choisie. En effet, avec un opérateur d'agrégation proche du max, on privilégie la dominance stricte sur l'indiscernabilité, ce qui revient à considérer que la totalité de l'information discriminante n'a nul besoin d'être exprimée sur chacune des dominances strictes pour être retenue. Dans notre exemple, il suffit d'étendre ce principe d'une tolérance à la non-exhaustivité de l'information délivrée, pour légitimer l'absence de certaines relations ordinales logiques, comme ici celle de x sur z . Le terme « logique » renvoie plus précisément à une justification par application d'une règle déductive de type *fermeture transitive* (cf. section 2.3.1, chap. 2, p. 47).

Nous venons ainsi de soulever un problème essentiel : la relation de dominance stricte brute devrait, dans certains cas qu'il conviendra de préciser, être complétée par une procédure de déduction logique. En exploitant la solution de la fermeture transitive, on devrait donc par là même résoudre le problème d'incohérence d'une dominance stricte non-transitive.

Enfin, il est évident qu'une simple correction de la dominance stricte brute est insuffisante. On souhaite en effet rester dans le cadre de la théorie des préférences, notamment en préservant le statut de structure de préférences des relations de dominance stricte, indiscernabilité et conflit. Par conséquent, ces deux dernières relations devront aussi subir un traitement correctif, de façon à les adapter à la dominance stricte corrigée.

L'objectif est donc de corriger les relations de dominance brutes issues de l'agrégation (D_M, I_M, C_M) , afin d'améliorer la cohérence de la dominance stricte, notamment en terme de transitivité, tout en préservant leur structure de préférence. On appelle sous-relations *corrigées* les relations solutions, que l'on note : (D, I, C) .

Pour représenter les relations, on utilise les mêmes notations en net comme en flou.

Nous allons présenter la correction des relations brutes comme un procédé logique fondé sur des règles. Les relations brutes constitueront les prémisses de ces règles, alors que les relations corrigées en seront les conclusions exhaustives. Pour cela, l'appartenance d'un couple de produits (x, y) à une relation s'interprétera comme une assertion (ou proposition). Prenons l'exemple d'une relation R de dominance, xRy s'interprétera comme l'assertion « x domine y ».

3.2 Procédure de transitivité - cas net

La première étape consiste à caractériser la dominance stricte corrigée D ; les définitions de C et I en découleront directement.

L'information discriminante exprimée par le(s) juge(s) est synthétisée au travers du produit d'agrégation brut L . Cette relation L définit l'ensemble des assertions discriminantes *explicites*, c'est-à-dire les assertions exprimées directement par le juge. Elle n'est pas anti-symétrique, à cause des conflits *explicites*, soit les assertions explicites qui coexistent avec leur inverse, mis en évidence par la sous-relation C_M . On a en effet : $L = D_M \cup C_M$, où (D_M, I_M, C_M) dénote sa décomposition duale (la relation de dominance brute M est en effet la duale de L).

A ce stade, il est possible de considérer deux voies de résolution distinctes, suivant l'information explicite que l'on juge *utile* à la construction de D :

1. Une première possibilité est de considérer l'ensemble des assertions du produit brut d'agrégation des dominances strictes L comme *utile*. On définit alors le *produit d'agrégation utile* de la façon suivante :

$$U_1 = L.$$

Dans ce cas, on définit la dominance stricte corrigée D_1 comme une fonction de L à déterminer : $D_1 = f_1(U_1)$. On prend donc en compte l'ensemble du produit d'agrégation des dominances strictes, sans négliger le conflit explicite C_M : $U_1 = D_M \cup C_M$. Toutes les assertions de L , qu'elles soient explicitement en conflit ou non, seront donc traitées de la même manière.

2. Une seconde solution possible est d'ignorer le conflit. On modifie donc la définition du *produit d'agrégation utile* :

$$U_2 = D_M,$$

où D_M est l'ensemble des assertions explicites non conflictuelles. On définit par $D_2 = f_2(U_2)$ la dominance stricte corrigée correspondant à cette seconde solution, où f_2 est là encore une fonction à déterminer. Ici, on choisit donc de rejeter la part de conflit C_M . Celui-ci représente l'ensemble des assertions aberrantes, qui, contrairement à la solution (1), ne sont donc pas considérées comme des assertions aussi valides que les autres. Ainsi qu'on le montrera par la suite, le fait de les ignorer permet d'abord d'éviter une propagation excessive du conflit explicite lors du processus de déduction d'assertions. Ensuite, cela permet éventuellement à certaines assertions en conflit explicite d'être validées par la règle de fermeture transitive.

Les relations U_i sont antiréflexives : L et D_M le sont par construction. Pour chacune des deux solutions $i \in \{1, 2\}$, on peut donc associer aux relations utiles U_i la structure de

préférence de leur duale, réflexive. De même qu'à L correspond la structure (D_M, I_M, C_M) de sa duale réflexive M , on associe donc aux U_i la structure de préférence $(D_{U_i^d}, I_{U_i^d}, C_{U_i^d})$. Il s'agit de la décomposition duale de U_i , que l'on notera $(D'_{U_i}, I'_{U_i}, C'_{U_i})$ pour simplifier.

On a par conséquent : $U_i = D'_{U_i} \cup C'_{U_i}$. L'information utile est donc constituée de la dominance stricte explicite $D'_{U_i} = D_M, \forall i$, et du conflit explicite : $C'_{U_1} = C_M$ pour la solution (1), et $C'_{U_2} = \emptyset$ pour la solution (2).

A chaque solution i , on associe ensuite la fermeture transitive affaiblie (cf. section 2.3.2) du produit d'agrégation utile U_i :

$$V_i = FT'(U_i).$$

La fermeture transitive affaiblie de U_i représente l'ensemble des assertions utiles du ou juges. En effet, U_i n'en représente que la partie explicite, c'est-à-dire effectivement exprimée. L'application de la règle de fermeture transitive affaiblie permet de déduire les assertions qui découlent logiquement de celles explicites : il s'agit des relations *implicites*. La forme "affaiblie" est préférée à celle classique de façon à assurer l'antiréflexivité de V_i . Implicitement comme explicitement, on considère que les juges ne s'expriment pas sur la comparaison d'un produit avec lui-même.

On montre ensuite que la dominance stricte associée à V_i par le biais de sa décomposition duale $(D'_{V_i}, I'_{V_i}, C'_{V_i})$ est transitive.

Proposition 3.1 *Soit R une relation antiréflexive et transitive affaiblie. Soit (D'_R, I'_R, C'_R) la décomposition duale de R . Alors (D'_R, I'_R, C'_R) est une structure de préférence, et sa dominance stricte D'_R est transitive.*

Démonstration : le statut de structure de préférence est évident, puisque R est antiréflexive : sa décomposition duale est donc la décomposition de la relation réflexive R^d .

Montrons maintenant la transitivité de $D'_R = D_{R^d}$.

$$\begin{aligned} D'_R &= R \cap R^d \\ &= FT'(R) \cap (FT'(R))^d \\ &= (FT(R) \cap \mathbf{I}_{R^c}^c) \cap (FT(R) \cap \mathbf{I}_{R^c}^c)^d \\ &= (FT(R) \cap \mathbf{I}^c) \cap (FT(R)^d \cup \mathbf{I}) \\ &= FT(R) \cap FT(R)^d \cap \mathbf{I}^c \\ &= D'_{FT(R)} \cap \mathbf{I}^c \\ &= D'_{FT(R)} = D_{FT(R)} \\ &= D_{FT(R) \cup \mathbf{I}} \end{aligned}$$

La relation $FT(R) \cup \mathbf{I}$ est réflexive et transitive. Or Fodor et Roubens ont montré que la préférence stricte issue de la décomposition en préférences d'une telle relation est transitive. Par conséquent, D'_R est bien transitive.

Ce résultat apporte donc la preuve de la transitivité de D'_{V_i} , qui représente la dominance stricte traduite par l'ensemble des relations utiles, explicites comme implicites : $FT'(U_i)$.

Sur le tableau 3.2, p. 91, on a répertorié l'ensemble des relations nécessaires à l'agrégation.

L	le produit d'agrégation brut
$M = L^d$	la relation de dominance brute
$(D_M, I_M, C_M) = (D'_L, I'_L, C'_L)$	la décomposition duale de L
U_i	le produit d'agrégation brut utile, selon la solution (i)
$(D'_{U_i}, I'_{U_i}, C'_{U_i})$	la décomposition duale de U_i
$V_i = FT'(U_i) \cap \mathbf{I}^c$	la fermeture transitive affaiblie de U_i
$(D'_{V_i}, I'_{V_i}, C'_{V_i})$	la décomposition duale de V_i
(D, I, C)	le résultat final de l'agrégation

TAB. 3.4 – Notations pour l'agrégation finale

Toutes les relations nécessaires ayant été introduites, à une définition de l'information *utile* près, on peut maintenant proposer une définition de la dominance stricte corrigée.

Définition 3.1 *On définit comme vraies les assertions utiles, dont les assertions inverses ne sont ni utiles, ni déduites d'assertions utiles, ainsi que les assertions qui s'en déduisent logiquement (soit par la règle de fermeture transitive).*

La dominance stricte agrégée D est alors définie comme l'ensemble des assertions vraies :

$$D = FT(D'_U \cap D'_V).$$

La formule donnée, valable pour les deux définitions d'*utile*, correspond bien à la définition proposée. En effet, D'_U représente les assertions utiles, dont les assertions inverses ne sont pas utiles. L'intersection avec D'_V stipule ensuite que, parmi les assertions utiles de D'_U , on ne s'intéresse qu'à celles dont les assertions inverses ne sont pas déduites d'assertions utiles. V contient en effet l'ensemble des assertions déduites de celles utiles : ce sont les assertions utiles explicites et implicites. Et D'_V , sa part antisymétrique, n'en retient que celles qui ne sont pas en conflit. Enfin on note que la fermeture transitive affaiblie n'est pas nécessaire, puisque $D'_U \cap D'_V$ est antiréflexive.

Proposition 3.2 *La dominance stricte ainsi définie est transitive et asymétrique.*

Démonstration : la transitivité est immédiatement acquise, par construction. L'asymétrie, provient de celle de D'_V . En effet, D'_V est construite comme la part antisymétrique d'une relation transitive, dont on a imposé la réflexivité. Elle est donc asymétrique par construction. D'après la proposition 3.1, p. 90, elle est également transitive. Or, la fermeture transitive d'une relation incluse dans une relation transitive, est nécessairement incluse dans cette relation. Donc, la dominance stricte corrigée D est incluse dans D'_V . Ce qui prouve son asymétrie.

Ce résultat valide la cohérence de la définition de la dominance stricte corrigée.

On définit maintenant le conflit C , comme une fonction de D et de L .

Définition 3.2 *La sous-relation de conflit corrigé C est définie comme l'ensemble des assertions telles qu'elles et leurs inverses soient ou bien utiles implicites ou bien explicites, sans être vraies.*

$$C = (D \cup D^{-1})^c \cap [(V \cup V^{-1}) \cup (L \cup L^{-1})].$$

La relation $(D \cup D^{-1})^c$ représente l'ensemble des assertions qui ne sont pas *vraies*. Ensuite, l'intersection avec $(V \cup V^{-1}) \cup (L \cup L^{-1})$ garantit que ces assertions sont bien : utiles explicites ou utiles implicites grâce à $(V \cup V^{-1})$, ou simplement explicites grâce à $(L \cup L^{-1})$. On note que dans la solution (1), toutes les relations explicites sont utiles explicites, alors que dans la solution (2), seules les relations non conflictuelles sont utiles explicites.

La définition de la dominance stricte corrigée D relève exclusivement des relations utiles. Pour C , ce n'est en revanche pas le cas, car son calcul nécessite absolument la relation L , du moins pour la solution (2), où les assertions de L ne font pas nécessairement partie des assertions utiles. En effet, dans cette solution (2), le conflit explicite est négligé. Cela signifie que les assertions conflictuelles sont, pour la génération de la dominance stricte, considérée comme non avenues : suite à l'action de la fermeture transitive, certaines assertions conflictuelles peuvent donc éventuellement se trouver validées, en devenant *vraies*. Elles feraient alors partie de la dominance stricte, et non du conflit. Mais dans l'hypothèse contraire où la fermeture transitive ne permettrait pas de valider ces assertions, il est important de justifier l'absence de dominance stricte par autre chose que de l'indiscernabilité : le conflit explicite, ignoré lors du calcul de D , doit, si besoin, justifier l'absence de dominance stricte. Dans la solution (1), L étant inclus dans U_1 , le problème ne se pose pas.

Proposition 3.3 *Le conflit corrigé ainsi défini est à la fois symétrique et antiréflexif.*

Démonstration : la symétrie est de C évidente, car dans sa définition, chacune des relations D , V et L est considérée au de travers de l'union avec son inverse.

L'antiréflexivité découle directement de celle de V et de L .

On définit finalement l'indiscernabilité corrigée I , par complémentarité.

Définition 3.3 *L'indiscernabilité corrigée I est définie comme l'ensemble des assertions qui ne sont affectées, elles et leurs inverses, ni à la dominance stricte D , ni au conflit C :*

$$I = C^c \cap (D \cup D^{-1})^c$$

Proposition 3.4 *L'indiscernabilité corrigée I ainsi définie, est symétrique et réflexive.*

Démonstration : c'est un résultat immédiat, puisque I est définie par complémentarité à $(D \cup D^{-1})$ et C qui sont toutes deux symétriques et antiréflexives.

Proposition 3.5 *Le triplet de sous-relations (D, I, C) ainsi défini est une structure de préférence.*

Démonstration : on sait déjà que D est asymétrique (cf. proposition 3.2, p. 91), que C est symétrique et antiréflexive (cf. proposition 3.3, p. 92), et que I est symétrique et réflexive (cf. proposition 3.4, p. 92). D'autre part, il est évident que $D \cup I \cup C$ est complète, puisque I a été construit par complémentarité. Il reste donc à prouver qu'elles sont deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} D \cap I &= D \cap [C^c \cap (D \cup D^{-1})^c] \\ &= (D \cap D^c) \cap C^c \cap (D^{-1})^c \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \cap C &= D \cap [(D \cup D^{-1})^c \cap (V \cup V^{-1} \cup L \cup L^{-1})] \\ &= (D \cap D^c) \cap (D^{-1})^c \cap (V \cup V^{-1} \cup L \cup L^{-1}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \cap C &= [C^c \cap (D \cup D^{-1})^c] \cap C \\ &= (C^c \cap C) \cap (D \cup D^{-1})^c \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Le triplet (D, I, C) vérifie donc toutes les propriétés nécessaires et suffisantes d'une structure de préférence nette.

3.3 Cas où le produit d'agrégation brut utile est transitif affaibli

Considérons la situation idéale où la fermeture transitive affaiblie utilisée dans la construction de la dominance stricte corrigée n'est pas nécessaire. Le juge a donc explicité toute l'information utile : il a lui-même déduit et fourni toutes les assertions correspondant à ses perceptions. Dans cette situation particulière, la procédure de correction des sous-relations devrait logiquement devenir inutile : c'est le résultat que nous allons montrer.

Mais auparavant, nous allons préciser la situation en question. La fermeture transitive affaiblie est utilisée pour compléter logiquement le produit d'agrégation brut utile : U . Si elle n'est pas nécessaire, c'est qu'aucune assertion utile n'est implicite. On considère donc U comme transitive affaiblie. On note remarque que la transitivité classique serait trop contraignante : U est antiréflexive par construction, et sa transitivité nécessiterait donc l'antisymétrie de U . Or cette absence de conflit n'est pas requise dans la situation idéale, elle postule seulement l'absence d'assertions implicites.

Proposition 3.6 *Si le produit d'agrégation brut utile U est transitif affaibli, alors le triplet de sous-relations corrigées (D, I, C) est identique au triplet (D_M, I_M, C_M) issu de la décomposition en préférences du produit d'agrégation brut M , et ce quelle que soit la solution de correction choisie.*

Démonstration : On sait que la relation U est transitive affaiblie, donc $V = FT'(U) = U$. D'où $D'_V = D'_U = D_M$, pour les deux solutions. Par conséquent, $D = FT(D'_U \cap D'_V) = FT(D_M)$. Or, d'après un résultat de Fodor et Roubens, la dominance stricte issue d'une relation de surclassement transitive est transitive. Puisque M est réflexive, alors c'est une relation de surclassement, et on a donc $D = D_M$.

Calculons maintenant le conflit. La relation $V \cup V^{-1}$ est égale à $U \cup U^{-1}$, qui est donc $L \cup L^{-1}$ selon la solution (1), ou $D_M \cup D_M^{-1} = D_L \cup D_L^{-1}$ selon la solution (2). Dans tous les cas, on a bien : $(V \cup V^{-1}) \subseteq (L \cup L^{-1})$. D'où la valeur du conflit : $C = (D \cup D^{-1})^c \cap (L \cup L^{-1}) = (D_M \cup D_M^{-1})^c \cap (L \cup L^{-1})$.

Le triplet (D_M, I_M, C_M) est une structure de préférence. Par conséquent, grâce aux équations de partition qu'elle vérifie (cf. paragraphe 3.1.3, chap. 2, p. 52), et à la définition de $I_M = M \cap M^{-1}$, on montre que :

$$C_M = (D_M \cup D_M^{-1})^c \cap I_M^c \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &= (D_M \cup D_M^{-1})^c \cap (M \cap M^{-1})^c \\ &= (D_M \cup D_M^{-1})^c \cap (M^c \cup (M^{-1})^c) \\ &= (D_M \cup D_M^{-1})^c \cap (L^{-1} \cup L). \end{aligned} \quad (3.3)$$

On retrouve donc rigoureusement la même définition $C = C_M$, tout comme on avait déjà $D = D_M$. A cause des complémentarités respectives des triplets (D, I, C) et (D_M, I_M, C_M) , leur égalité est acquise, car : $I = I_M$.

Dans cette situation idéale, on a donc montré que la procédure de correction est neutre, que l'on opte pour la solution (1) ou pour la solution (2). Cela permet de s'assurer de la cohérence des définitions proposées dans le paragraphe précédent.

3.4 Procédure de transitivité - cas flou

L'objectif est d'étendre au flou la structure de préférence nette présentée précédemment. Voici la procédure suivie :

1. Extension de la définition nette de la dominance stricte D , basée sur la décomposition en préférences floues et sur la contrainte d'équivalence $D = D_M$ dans la situation idéale évoquée précédemment ; puis vérification de son asymétrie et antiréflexivité ;
2. Extension de la définition nette du conflit C , basée sur la contrainte d'équivalence $C = C_M$ dans la situation idéale ; puis vérification de son antiréflexivité et de sa symétrie ;
3. Construction de l'indiscernabilité par complémentarité à $\mathbf{1}$ à partir des relations floues C et D , de façon à valider la structure de préférence floue.

Voici l'extension au flou du calcul de la dominance stricte corrigée

$$D = FT(D'_U \cap D'_V),$$

avec $V = FT'(U)$:

- Les fermetures transitives sont basées sur la min-transitivité, qui est la seule à garantir la transitivité des alpha-coupes (propriété également vérifiée par la forme affaiblie de la fermeture transitive) ;
- Les décompositions duales sont effectuées grâce aux formules de la théorie des préférences correspondant à la solution d'une préférence stricte asymétrique (cf. paragraphe 3.2.3, chap. 2, p. 56) ;
- Quant à l'opérateur d'intersection entre D'_U et D'_V , on choisit le min pour retrouver l'égalité $D = D_M$ dans la situation idéale; en effet, $FT(D'_U \cap D'_V) = FT(D_M \cap D_M) = D_M \cap D_M$; pour retrouver D_M , quelle que soit sa valeur, il faut une t-norme idempotente (cf. section 2.3.3, chap. 2, p. 49). Or le min est l'unique t-norme idempotente.

Explicitement, la définition devient :

$$\begin{aligned} D &= FT\left((U \cap_W U^d) \cap_{\min}(V \cap_W V^d)\right) \\ &= FT\left(\min(\max(U - U^{-1}, 0), \max(V - V^{-1}, 0))\right). \end{aligned}$$

La dominance stricte est asymétrique et min-transitive. L'asymétrie est en effet assurée par celle de D'_V , la dominance stricte asymétrique issue de la décomposition de V^d .

On étend ensuite la définition du conflit corrigé :

$$C = (D \cup D^{-1})^c \cap [(V \cup V^{-1}) \cup (L \cup L^{-1})],$$

dont on cherche à imposer l'équivalence avec C_M dans la situation idéale.

Dans ce cas, l'extension au flou de l'équation 3.2, p. 94 est nécessairement réalisée grâce au triplet de De Morgan utilisé dans les propriétés logiques entre sous-relations floues (cf. paragraphe 3.2.2, chap. 2, p. 55) : le triplet de Lukasiewicz.

En effet, la propriété de complémentarité de la structure de préférence (D_M, I_M, C_M) entraîne :

$$\begin{aligned} C_M &= 1 - (D_M + D_M^{-1} + I_M) \\ &= 1 - ((D_M \cup_{W'} D_M^{-1}) + I_M), \text{ car } D_M \text{ est asymétrique} \\ &= 1 - (\min((D_M \cup_{W'} D_M^{-1}) + I_M, 1)) \\ &= 1 - ((D_M \cup_{W'} D_M^{-1}) \cup_{W'} I_M) \\ &= ((D_M \cup_{W'} D_M^{-1}) \cup_{W'} I_M)^c \\ &= (D_M \cup_{W'} D_M^{-1})^c \cap_W I_M^c, \end{aligned}$$

à condition d'exploiter l'opérateur de complémentarité $c(x) = x$.

Ensuite, la relation I_M étant définie par $M \cap_{\min} M^{-1}$, on obtient l'extension de l'équation 3.3, p. 94 en introduisant le triplet de De Morgan nécessaire, basé sur la t-norme min, d'où :

$$C_M = (D_M \cup_{W'} D_M^{-1})^c \cap_W (L \cup_{\max} L^{-1}).$$

On procède alors à l'extension du conflit corrigé de la façon suivante :

- Dans la situation idéale, $V = U$, qui est égale à L si l'on adopte la solution (1) ; pour l'intersection entre $(V \cup V^{-1})$ et $(L \cup L^{-1})$, il faut donc une t-conorme idempotente ; la seule possible est donc le max. Si l'on adopte la solution (2), $V = D_M = D_M$ est incluse dans L , et l'équivalence est donc bien conservée ;
- les unions opérant dans les relations $V \cup V^{-1}$ et $L \cup L^{-1}$ sont, d'après ce qui précède, étendues par identification avec la formule classique du conflit : il faut donc choisir la t-conorme max ;
- l'union de la formule $D \cup D^{-1}$ est étendue grâce au max : la relation étant asymétrique, toute t-conorme conduirait au même résultat ;
- l'intersection est étendue par identification grâce à la t-norme de Lukasiewicz ;
- enfin, l'opérateur de complémentarité est étendu par la fonction $c(x) = 1 - x$, puisque c'est le choix que nous avons fait pour appliquer la théorie des préférences.

Ce conflit est antiréflexif, car D l'est également, et symétrique : chacune des relations R de la formule apparaît sous la forme $R \cup_{\max} R^{-1}$, qui est nécessairement symétrique.

Calculons C pour vérifier qu'il s'agit bien d'une relation floue : $C(x, y) \in [0, 1]$, $\forall x, y \in X$.

$$\begin{aligned} C &= (D \cup_{\max} D^{-1})^c \cap_W [(V \cup_{\max} V^{-1}) \cup_{\max} (L \cup_{\max} L^{-1})] \\ &= [1 - \max(D, D^{-1})] \cap_W \max(V, V^{-1}, L, L^{-1}) \\ &= \max\{[1 - \max(D, D^{-1})] + \max(V, V^{-1}, L, L^{-1}) - 1, 0\} \\ &= \max\{\max(V, V^{-1}, L, L^{-1}) - \max(D, D^{-1}), 0\} \end{aligned}$$

Or, on sait que D est inclus dans $D'_V = D_V$ au sens de la t-norme min, donc $D \subseteq D_V$. D'autre part, on a également $D_V \subseteq V$, d'où finalement : $D \subseteq V$. On peut donc supprimer le max global :

$$C = \max(V, V^{-1}, L, L^{-1}) - \max(D, D^{-1}) \supseteq \mathbf{1}^c.$$

Il s'agit donc bien d'une relation floue. D'autre part, on remarque :

$$C \subseteq \mathbf{1} - \max\{D, D^{-1}\},$$

ce qui démontre que la complémentarité est bien respectée : l'indiscernabilité obtenue par complémentarité à $\mathbf{1}$ est également une relation floue.

Enfin, l'indiscernabilité I est étendue très simplement au flou. Comme dans le cas net, on impose la complémentarité, dont on trouve l'extension floue dans la définition d'une structure de préférence floue (cf. section 3.2.4, chap. 2, p. 57) : $D + D^{-1} + I + C = \mathbf{1}$. D'où :

$$I = \mathbf{1} - (D + D^{-1} + C).$$

D'après les propriétés de D et C , elle est symétrique et réflexive.

On peut maintenant démontrer que la proposition 3.5, p. 93 reste vraie pour la forme floue de notre triplet de relations corrigées (D, I, C) .

Proposition 3.7 *Le triplet de sous-relations (D, I, C) ainsi défini est une structure de préférence floue.*

Démonstration : ce résultat est immédiat lorsque l'on considère la définition concise d'une préférence floue (cf. section 3.2.4, chap. 2, p. 57) : I est en effet réflexive et symétrique, et le triplet vérifie bien la relation de complémentarité : $D + D^{-1} + I + C = 1$. C'est donc une structure de préférence floue.

3.5 Distinction entre sous-relations implicites et explicites

Que ce soit pour les sous-relations de conflit C , ou de dominance stricte D , il peut être souhaitable de distinguer l'information explicite, que l'on retrouve directement dans les assertions fournies par le ou les juges, et celle implicite, que l'on doit uniquement à l'application de la procédure de transitivité.

Dans le cas net, la formule de la dominance stricte 3.1, p. 91 se prête aisément à cette distinction. On définit ainsi la *dominance stricte explicite* D^E et la *dominance stricte implicite* D^I de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D^E &= D'_U \cap D'_V \\ D^I &= D \cap (D^I)^c. \end{aligned}$$

L'extension au flou de D^I se fait de la même manière que pour D , grâce à la t-conorme max. On note que $D^I \subseteq D$, où l'inclusion des relations floues est celle proposée par Zadeh 2.7, chap. 2, p. 47. Quant à l'extension de D^E , nous utilisons le triplet de De Morgan dévolu aux interactions entre les trois sous-relations de dominance stricte, d'indiscernabilité et de conflit : celui de Lukasiewicz. D^D est bien définie, comme le prouve l'inclusion de D^I dans D . Voici les formules obtenues :

$$\begin{aligned} D^E &= \min \{ \max(U - U^{-1}, 0), \max(V - V^{-1}, 0) \} \\ D^I &= D \cap_W (D^I)^c \\ &= \max(D - D^E, 0). \end{aligned}$$

Nous proposons de même les composantes explicites et implicites du conflit pour le cas net, selon que le conflit provienne du conflit explicite $C_M = L \cap L^{-1}$ ou non :

$$\begin{aligned} C^E &= C \cap (L \cap L^{-1}) \\ C^I &= C \cap (C^E)^c. \end{aligned}$$

Afin que le conflit explicite de la situation idéale soit égal au conflit, il est nécessaire que l'intersection de C^E entre C et $(L \cap_{\min} L^{-1})$ soit la t-norme min. Quant à C_I , on utilise

comme précédemment le triplet de Lukasiewicz :

$$\begin{aligned} C^E &= \min \{C, \min(L, L^{-1})\} \\ C^I &= \max (C - C^E, 0) . \end{aligned}$$

On peut vérifier que la complémentarité à **1** liant le triplet (D, I, C) est conservée après distinction des parts explicites et implicites, soit dans le quintuplet (D^E, D^I, C^E, C^I, I) .

4 Détermination de la taille des nombres flous

4.1 Indicateur de pertinence et indicateurs de performance

Nous avons laissé en suspens la question de la détermination du coefficient de dilatation l propre à chaque couple juge/descripteur, car on ne disposait pas d'argument permettant a priori de préférer une valeur à une autre. Mais on dispose maintenant d'une procédure qui permet de synthétiser l'information délivrée par le juge, sous la forme d'un triplet de relations floues (D, I, C) . Si l'on disposait d'un moyen de mesurer la pertinence de cette information, on pourrait envisager de définir la taille des nombres flous, de façon à la maximiser. Une bonne modélisation de l'imprécision serait ainsi considérée comme une condition *sine qua non* d'une information pertinente.

C'est la solution vers laquelle nous nous sommes tournés. Il s'agissait donc de définir un bon indicateur de la pertinence du triplet recueilli. Rappelons d'abord la signification de chacune des sous-relations dégagées par l'agrégation des répétitions du couple juge/descripteur étudié, et montrons comment ces relations se comportent en fonction de la taille des nombres flous :

- la dominance D caractérise les couples de produits discriminés sans contradiction, soit ceux dont les écarts de mesures excèdent l'imprécision modélisée, et qui ne subissent aucune inversion marquée sur les répétitions (c'est-à-dire légitime compte tenu de l'imprécision). Par conséquent, on voit apparaître deux règles de variations : lorsque l'imprécision excède celle effective du juge, on risque de perdre de la dominance au profit de l'indiscernabilité ; inversement, lorsqu'on la sous-estime, on risque de faire apparaître des inversions marquées, et là encore, la dominance risque de chuter, cette fois-ci au profit du conflit ;
- l'indiscernabilité I caractérise les couples de produits dont les écarts de mesures sont faibles au regard de l'imprécision supposée. Si on sous-estime cette dernière, des inversions marquées risquent de surgir, traduisant des aberrations (conflit). Si au contraire, on la sur-estime, alors elle risque d'écraser la dominance ;
- le conflit C traduit les comportements erratiques du juge, soit les inversions entre produits que l'imprécision ne saurait justifier. Plus l'imprécision est faible, plus le risque de conflit augmente : une valeur l nulle sanctionne systématiquement toute inversion, aussi petits que soient les écarts de mesures concernés. Inversement, une imprécision trop grande légitimerait toutes les aberrations, au détriment de la dominance stricte.

On peut résumer ces quelques règles en énonçant la loi suivante : une imprécision inappropriée par rapport au comportement effectif du juge, provoque une chute de la dominance stricte. Celle-ci se fait au profit de l'indiscernabilité lorsque l'imprécision est excessive, et au profit du conflit lorsqu'elle est insuffisante (cf. figure 3.4, p. 100).

Une mesure de « proportion » de dominance stricte constitue par conséquent un bon indicateur de pertinence du triplet obtenu. On définit donc Q^D l'indicateur de dominance stricte, comme le cardinal normalisé de la relation floue D :

$$Q^D = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{(x,y) \in X \times X} D(x,y),$$

où la quantité $N(N-1)/2$ représente le cardinal flou maximal d'une relation floue asymétrique définie sur un référentiel X de taille N .

Une fois l'imprécision fixée, Q^D devient un *indicateur de performance*. En effet, sous réserve que le descripteur ait été bien compris, on estime *performant* un juge qui a marqué beaucoup de dominance stricte. Cette performance est donc directement rendue par Q^D .

On propose de compléter Q^D par deux autres indicateurs de performance qui permettent d'expliquer l'absence de dominance stricte, soit par la présence d'indiscernabilité (mesurée par l'indicateur Q^I), soit par celle de conflit (mesurée par l'indicateur Q^C) :

$$Q^I = \frac{1}{N(N-1)} \left(-N + \sum_{(x,y) \in X \times X} I(x,y) \right),$$

$$Q^C = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{(x,y) \in X \times X} C(x,y).$$

On note leur complémentarité à 1 :

$$Q^D + Q^I + Q^C = 1.$$

4.2 Maximum de dominance

Puisqu'on dispose d'un indicateur de pertinence de la quantité d'imprécision introduite, on peut l'optimiser a posteriori. En effet, il suffit de tester un ensemble de niveaux d'imprécision ($l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$), en les évaluant respectivement grâce à l'indicateur Q^D . On définit alors l'imprécision optimale a posteriori comme :

$$l^* = l_k, \text{ tel que } Q^D(l_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} Q^D(l_i)$$

L'imprécision l^* aboutit à la construction d'un triplet de sous-relations (D^*, I^*, C^*) , que l'on définit comme la structure de préférence optimale.

Bien sûr, il est important que l'argument optimal l^* soit correctement défini. Idéalement, la fonction échantillonnée de la variation de Q^d en fonction de l devrait être convexe

(ou plutôt croissante jusque l^* puis décroissante). En pratique, on a constaté que cette propriété était presque toujours vérifiée. On obtient généralement le type de courbe de la figure 3.4, p. 100, où l'argument optimal l^* est très bien défini.

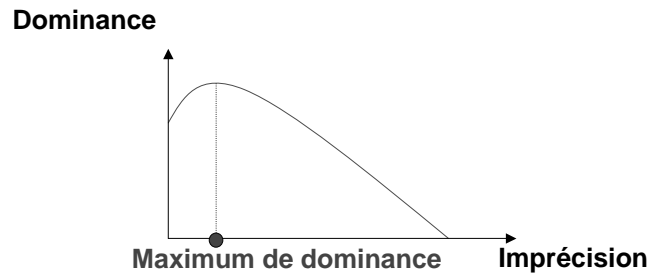


FIG. 3.4 – Variation de la dominance en fonction de l'imprécision

5 Bilan de la construction des relations floues

Nous résumons ici l'ensemble des techniques décrites dans ce chapitre, dont l'objet est de synthétiser des relations floues interprétables, à partir des évaluations quantitatives réalisées par les juges.

Tout d'abord, nous résumons le traitement de l'information fournie par chacun des juges (cf. figure 3.5, p. 100) :

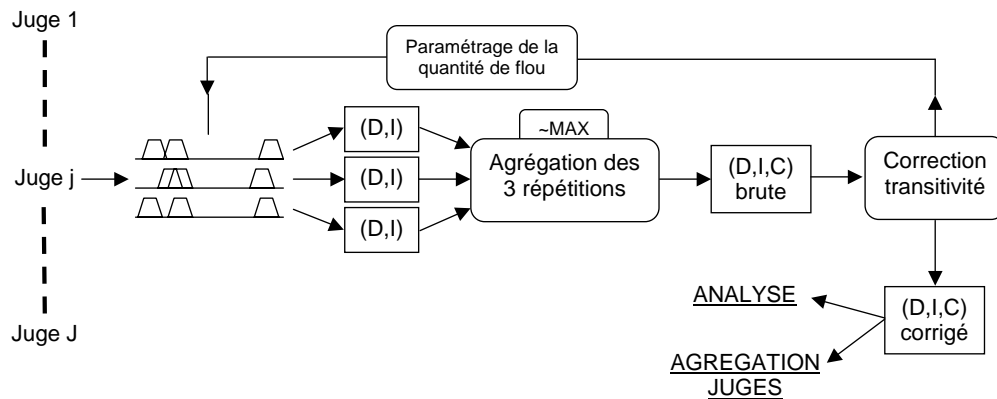


FIG. 3.5 – Agrégation sur les répétitions

1. Pour chacune des répétitions : on remplace chaque note par un nombre flou identique, et on en déduit la relation ordinale floue traduisant les rapports de dominance entre produits ;
2. les relations floues de chaque répétition sont agrégées par un max, ou par la procédure précédemment décrite basée sur un *owa* (avec un degré de disjonction ρ_2 proche de 1) ;

3. le produit d'agrégation brut obtenu est ensuite corrigé pour retrouver la transitivité de la dominance stricte ;
4. retour en (1) avec un autre nombre flou identique pour les trois répétitions, jusqu'à maximisation du cardinal normalisé de la dominance stricte Q^D ;
5. le résultat est alors disponible pour l'agrégation des juges ou pour l'analyse.

L'analyse et son interprétation seront l'objet du chapitre suivant.

On dispose alors pour chacun des juges, d'un triplet de sous-relations corrigées, qui résume la perception du juge. Ces relations peuvent encore être agrégées sur l'ensemble des juges (cf. figure 3.6, p. 101) :

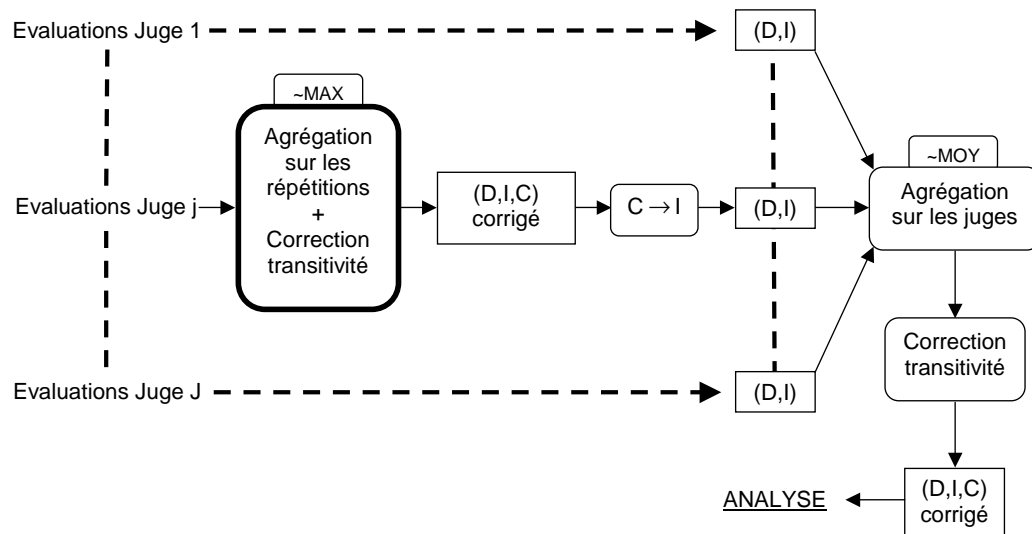


FIG. 3.6 – Agrégation sur les juges

1. Pour chaque juge, le conflit est transformé en indiscernabilité ;
2. les relations floues de chaque juge sont agrégées par la procédure précédemment décrite basée sur une *owa* (avec un degré de disjonction ρ_2 proche de 0.5) ;
3. le produit d'agrégation brut obtenu est ensuite soumis à la procédure de transitivité, pour être finalement analysé et interprété.

Chapitre 4

Représentation des relations floues

Nous avons précédemment fait l'hypothèse que les relations de dominance floues condensaient l'information pertinente recueillie auprès des juges. Après avoir détaillé les deux procédures à l'origine de cette synthèse, soit leur construction sur chaque répétition, puis leur agrégation pour un descripteur donné, nous nous préoccupons maintenant de leur exploitation. Il s'agit en effet de répondre aux objectifs de l'analyse de données sensorielles que nous avons retenus : décrire et expliquer les différences entre produits, et évaluer le comportement des juges. Comme dans les méthodes standards, nous distinguerons les analyses mono et multi-descripteurs, selon que le traitement concerne un ou plusieurs descripteurs. Dans ces deux situations, nous décrirons et justifierons les traitements appliqués. Mais au préalable, nous présenterons les outils statistiques sur lesquels ils se basent.

1 Analyse d'ordres partiels flous

L'objectif de cette partie est de proposer l'extension aux relations d'ordres partiels flous de concepts habituellement réservés aux relations d'ordres classiques : la corrélation ordinale et les rangs.

1.1 Extension au flou de fonctions ordinales

Les concepts de corrélation ordinale, rangs et écarts de rangs, peuvent être considérés comme des fonctions s'appliquant à des relations d'ordre, ou *fonctions ordinales*. Dans cette partie, nous proposons d'étendre au flou les fonctions ordinales portant sur des ordres totaux.

Dans leur cadre d'origine, l'ensemble des fonctions f étudiées ont comme arguments un ou plusieurs ordres totaux définis sur X , auxquels elles associent un réel : $f : \mathcal{L}_X^m \rightarrow \mathbb{R}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'arguments, et \mathcal{L}_X l'ensemble des ordres totaux définis sur X . C'est le cas par exemple de la corrélation de rang de Kendall, ou de Spearman, qui à un couple d'ordres totaux donné ($m = 2$), associent un coefficient compris dans l'intervalle $[-1, 1]$ rendant compte de leur similarité.

Ces fonctions ordinales sont généralement appliquées à m ensembles de n -uplets de mesures attribuées aux objets de X ($|X| = n$). Lorsque ces mesures appartiennent à un référentiel continu, on peut en effet associer à tout n -uplet, un ordre total sur X rendant compte des rapports de supériorité stricte entre objets. La composition de la fonction associant un ordre total à un n -uplet de valeurs, par la fonction ordinale s'appliquant aux ordres totaux, est donc parfaitement usuelle.

L'objectif de cette partie est d'une part d'étendre ces fonctions ordinales à des sous-ensembles flous d'ordres totaux, et d'autre part de les appliquer à des n -uplets de mesures floues (intervalles flous).

Dans la section 1.1, chap. 3, p. 63, nous avons montré que l'information ordinale issue d'un n -uplet d'intervalles flous pouvait être synthétisée au travers d'un ordre partiel flou particulier, tel que le degré d'appartenance de tout couple d'objets s'interprète comme la nécessité de leur rapport de dominance. Nous montrerons tout d'abord comment en extraire un sous-ensemble flou d'ordres totaux. Puis nous montrerons que le sous-ensemble flou obtenu est rigoureusement identique à celui défini à partir du n -uplet d'intervalles flous, par application du principe d'extension. Finalement, nous proposerons l'extension des fonctions ordinales pour le traitement des sous-ensembles flous d'ordres totaux issus d'ordres partiels flous. On disposera alors, comme dans le cas classique, de la possibilité d'appliquer ces fonctions ordinales directement à des relations d'ordre floues (ordres partiels flous), ou à des nombres flous (intervalles flous) par le biais de la composition de cette fonction ordinale par la fonction extrayant un sous-ensemble flou d'ordres totaux d'un ensemble de n nombres flous.

1.1.1 Ordre partiel et ensemble d'extension linéaires

Dans le paragraphe 2.1.3, chap. 2, p. 43, on a vu qu'on pouvait associer à tout ordre partiel P défini sur X son ensemble d'extensions linéaires $\Lambda(P)$, c'est-à-dire l'ensemble des ordres totaux définis sur X qui vérifient les contraintes ordinales de P . D'après un résultat de Szpilrajn (cité dans [23]), cet ensemble n'est jamais vide.

La fonction associant à tout ordre partiel, son ensemble d'extensions linéaires est notée $\Lambda : X \times X \rightarrow 2^{\mathcal{L}^X}$:

$$\Lambda(P) = \{L \in \mathcal{L}_X, \text{ tels que } P \subseteq L\}.$$

Proposition 1.1 *Une relation d'ordre total L est une extension linéaire d'une relation d'ordre partiel P si et seulement elle est incluse dans sa relation duale P^d .*

Démonstration :

$$\begin{aligned} P \subseteq L &\Leftrightarrow P^{-1} \subseteq L^{-1} \\ &\Leftrightarrow L^d \subseteq P^d \\ &\Leftrightarrow L \subseteq P^d. \end{aligned}$$

On peut donc donner une nouvelle définition de $\Lambda(P)$, équivalente à la précédente :

$$\Lambda(P) = \left\{ L \in \mathcal{L}_X, \text{ tels que } L \subseteq P^d \right\}.$$

On note que si P est total, alors $\Lambda(P) = \{P\}$, avec $P \in \mathcal{L}_X$.

On peut représenter l'ensemble $\Lambda(P)$ des extensions linéaires de P , à l'aide de la fonction d'appartenance suivante :

$$\begin{aligned}\mu_{\Lambda(P)}(L) &= \begin{cases} 1 & \text{si } L \subseteq P^d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \forall (x, y) \in L, (x, y) \in P^d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \min_{(x, y) \in L} P^d(x, y).\end{aligned}$$

$P^d(x, y)$ s'interprète comme le degré de possibilité que l'objet x domine (au sens large) l'objet y : $P^d(x, y) = \Pi(v_x \geq v_y)$, puisqu'on a vu précédemment que sa duale P s'interprète comme le degré de nécessité de l'événement dual : $P(x, y) = 1 - P^d(y, x) = N(v_x > v_y)$.

L'appartenance du sous-ensemble $L \subseteq X \times X$ à $\Lambda(P)$ est donc établie par $\min_{(x, y) \in L} P^d(x, y)$, que l'on peut interpréter comme une distribution de possibilité sur \mathcal{L}_X .

Dans le cas d'un ordre flou partiel \tilde{P} , on considère des degrés d'appartenance compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Le degré d'appartenance de L à $\Lambda(\tilde{P})$, l'ensemble flou des extensions linéaires de \tilde{P} , peut donc être défini grâce à la distribution de possibilité jointe de \tilde{P}^d sur $X \times X$:

$$\mu_{\Lambda(\tilde{P})}(L) = \min_{(x, y) \in L} \tilde{P}^d(x, y).$$

D'autre part, on obtient le calcul par α -coupe suivant :

$$\begin{aligned}\left[\Lambda(\tilde{P})\right]_{\alpha} &= \{L \in \mathcal{L}_X, \text{ tels que } \min_{(x, y) \in L} \tilde{P}^d(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{L \in \mathcal{L}_X, \text{ tels que } L \subseteq (\tilde{P}^d)_{\alpha}\}.\end{aligned}$$

On calcule alors la duale de $(\tilde{P}^d)_{\alpha}$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \left[(\tilde{P}^d)_{\alpha}\right]^d &\Leftrightarrow (y, x) \notin (\tilde{P}^d)_{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \tilde{P}^d(y, x) < \alpha \\ &\Leftrightarrow 1 - \tilde{P}(x, y) < \alpha \\ &\Leftrightarrow \tilde{P}(x, y) > 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \tilde{P}_{(1-\alpha)^+}.\end{aligned}$$

Toute α -coupe ou α -coupe stricte d'un ordre partiel flou étant un ordre partiel, $\tilde{P}_{(1-\alpha)^+}$ est un ordre partiel, et on peut donc lui appliquer la fonction Λ . On en déduit l'ensemble net des extensions linéaires incluses dans $(\tilde{P}^d)_{\alpha}$:

$$\begin{aligned}\left[\Lambda(\tilde{P})\right]_{\alpha} &= \{L \in \mathcal{L}_X, \text{ tels que } L \subseteq (\tilde{P}^d)_{\alpha}\} \\ &= \Lambda\left(\left((\tilde{P}^d)_{\alpha}\right)^d\right) \\ &= \Lambda\left(\tilde{P}_{(1-\alpha)^+}\right).\end{aligned}$$

1.1.2 Nombres flous et ensemble d'extensions linéaires

Dans la partie précédente, on a montré comment, à partir d'un ordre partiel flou, définir le sous-ensemble flou de ses extensions linéaires.

Nous nous intéressons ici à la façon de définir un sous-ensemble flou d'ordres totaux à partir d'un n -uplets d'intervalles flous.

Soit $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_X$ l'application associant à tout ensemble de n mesures réelles distinctes (v_1, \dots, v_n) définies sur \mathbb{R} l'ordre total qu'elles induisent.

$$\lambda(v_1, \dots, v_n) = L, \text{ avec } L \text{ l'ordre total (croissant) induit par } (v_1, \dots, v_n).$$

Le principe d'extension permet d'étendre cette fonction à tout ensemble de n mesures floues définies (dans notre cas) par des intervalles flous $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$:

$$\mu_{\lambda(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)}(L) = \sup_{(v_1, \dots, v_n)/L = \lambda(v_1, \dots, v_n)} \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \mu_{\tilde{v}_i}(v_i).$$

On propose ensuite le calcul par α -coupe :

$$\begin{aligned} L \in \lambda(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)_\alpha &\Leftrightarrow \sup_{(v_1, \dots, v_n)/L = \lambda(v_1, \dots, v_n)} \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \mu_{\tilde{v}_i}(v_i) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists (v_1, \dots, v_n)/L = \lambda(v_1, \dots, v_n) \text{ et } \mu_{\tilde{v}_i}(v_i) \geq \alpha \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow \exists (v_1, \dots, v_n)/L = \lambda(v_1, \dots, v_n) \text{ et } v_i \in (\tilde{v}_i)_\alpha \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow L \in \lambda((\tilde{v}_1)_\alpha, \dots, (\tilde{v}_n)_\alpha) \end{aligned}$$

Soit maintenant D l'application décrite dans la section 1.1.3, chap. 3, p. 65, qui associe à tout ensemble de n nombres réels, la relation de dominance stricte exprimant la nécessité des rapports de dominance pour tout couple de mesures. L'extension de cette application aux intervalles (notée \bar{D}), puis aux intervalles flous (notée \tilde{D}), a été développée dans les sections suivantes 1.1.4, p. 66 et 1.1.5, chap. 3, p. 67. Les singletons et les intervalles de taille non nuls sont des cas particuliers d'intervalles flous, et nous avons construit \tilde{D} de manière à ce qu'elle soit respectivement identique à D et \bar{D} pour ces deux cas. On désigne donc par Δ l'application associant à tout ensemble de n intervalles (singletons, intervalles de taille non nulle, ou intervalles flous) la relation de dominance stricte correspondante, qu'elle soit floue ou non.

Soit $\tilde{P} = \Delta(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$. On démontre la propriété suivante de ses α -coupes :

$$\begin{aligned} (i, j) \in (\Delta(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n))_{(1-\alpha)^+} &\Leftrightarrow \tilde{P}(i, j) > 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow N(\tilde{v}_i > \tilde{v}_j) > 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow 1 - N(\tilde{v}_i > \tilde{v}_j) < \alpha \\ &\Leftrightarrow \Pi(\tilde{v}_j \geq \tilde{v}_i) < \alpha \\ &\Leftrightarrow \nexists v_j \geq v_i / \min\{\mu_{\tilde{v}_i}(v_i), \mu_{\tilde{v}_j}(v_j)\} \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \nexists v_j \geq v_i / v_i \in (\tilde{v}_i)_\alpha \text{ et } v_j \in (\tilde{v}_j)_\alpha \\ &\Leftrightarrow \Pi((\tilde{v}_j)_\alpha \geq (\tilde{v}_i)_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow N((\tilde{v}_i)_\alpha > (\tilde{v}_j)_\alpha) = 1, \text{ car les } \alpha\text{-coupes sont non vides} \\ &\Leftrightarrow (i, j) \in \Delta((\tilde{v}_1)_\alpha, \dots, (\tilde{v}_n)_\alpha). \end{aligned}$$

L'objectif de cette partie, est de montrer l'équivalence entre le sous-ensemble flou d'ordres totaux directement défini à partir des n intervalles $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$, et celui défini indirectement à partir de $\Delta(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ grâce à la fonction Λ précédemment étudiée.

Proposition 1.2 *Soit n intervalles flous $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$. Alors la composition sur ces n intervalles flous de Δ par Λ est équivalente à λ :*

$$\lambda(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) = \Lambda(\Delta(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)).$$

Démonstration : nous renvoyons ici à la démonstration présentée dans un article sur le point d'être publié [15].

Cette propriété $\lambda(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) = \Lambda(\Delta(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n))$ est essentielle pour la suite : elle prouve que l'application du principe d'extension à toute fonction ordinaire initialement définie sur des n -uplets de réels, pour traiter des n -uplets d'intervalles flous, peut se faire en opérant sur la relation ordinaire floue construite à partir de ces intervalles flous. Après extraction de leur relation ordinaire floue, les intervalles flous eux-mêmes peuvent donc être ignorés.

1.1.3 Calcul des fonctions ordinales étendues au flou

On considère des fonctions f associant un réel à un ou plusieurs ordres totaux définis sur X : $f : \mathcal{L}_X^m \rightarrow \mathbb{R}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, où \mathcal{L}_X désigne comme précédemment l'ensemble des ordres totaux définis sur X .

Dans un premier temps, on peut étendre le calcul de f , à m sous-ensembles nets $\bar{L}_i \subseteq \mathcal{L}_X$. Le résultat est directement issu du calcul de l'image d'une fonction à partir d'un ensemble donné :

$$\bar{f}(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m) = \{r \in \mathbb{R} / \exists (L_1, \dots, L_m) \in (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m), r = f(L_1, \dots, L_m)\}.$$

L'ensemble $\bar{f}(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m) \subseteq \mathbb{R}$ obtenu n'est pas nécessairement un intervalle. Dans le cas du coefficient de corrélation de Kendall notamment, la corrélation de deux ordres totaux définis sur X de cardinal n , ne peut prendre que $n(n-1)/2$ valeurs différentes. L'ensemble obtenu est donc un ensemble fini de singletons inclus dans $[-1, 1]$.

Dans ce cas, on peut choisir de résumer l'ensemble obtenu par son enveloppe convexe, soit l'intervalle le plus précis contenant l'ensemble de ses éléments :

$$\bar{f}'(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m) = \left[\min_{(L_1, \dots, L_m) \in (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m)} f(L_1, \dots, L_m), \max_{(L_1, \dots, L_m) \in (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m)} f(L_1, \dots, L_m) \right].$$

Ha and Haddawy [27] ont proposé une solution de ce type, dans le cas particulier d'une fonction de corrélation ordinaire entre les extensions linéaires de deux ordres partiels classiques.

On qualifera de *surjectif* un tel intervalle, si toutes les valeurs discrètes r_i qu'il contient, telles que $r_i = f(L_1, \dots, L_m)$ avec $(L_1, \dots, L_m) \in \mathcal{L}_X^m$, sont effectivement atteintes par des éléments de $(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m) : \exists(L_1, \dots, L_m) \in (\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m) / r_i = f(L_1, \dots, L_m)$. Cette propriété est intéressante, car elle signifie que toutes les valeurs de l'intervalle potentiellement accessibles par f ont effectivement un antécédent parmi les ensembles d'ordres totaux considérés.

On considère ensuite m sous-ensembles flous \tilde{L}_i définis sur \mathcal{L}_X . Puisque \mathcal{L}_X est un référentiel discret, le principe d'extension de Zadeh permet d'étendre le calcul de f aux \tilde{L}_i pour $i \in \{1, \dots, m\}$ de la façon suivante :

$$\tilde{f}(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m)_\alpha = \tilde{f}\left((\tilde{L}_1)_\alpha, \dots, (\tilde{L}_m)_\alpha\right), \forall \alpha \in]0, 1],$$

où $(\tilde{L}_i)_\alpha$ est l'ensemble des ordres totaux dont le degré d'appartenance à \tilde{L}_i est supérieur ou égal à α .

Là encore, selon la fonction ordinale f étudiée, l'ensemble flou $\tilde{f}(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m)$ obtenu n'est pas nécessairement un intervalle flou. Comme pour \tilde{f} , on peut préférer résumer le sous-ensemble flou $\tilde{f}(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m)$, au travers de l'intervalle flou le plus précis le contenant : $\mu_{\tilde{f}(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m)}(r) \geq \mu_{\tilde{f}(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m)}(r), \forall r \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\tilde{f}'(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_m)_\alpha = \tilde{f}'\left((\tilde{L}_1)_\alpha, \dots, (\tilde{L}_m)_\alpha\right), \forall \alpha \in]0, 1].$$

Lorsque le sous-ensemble flou d'ordres totaux $\tilde{L}_i, i \in \{1, \dots, m\}$, est induit par un n-uplet d'intervalles flous $(\tilde{v}_1^i, \dots, \tilde{v}_n^i)$, on calcule l' α -coupe $(\tilde{L}_i)_\alpha$ par $\Lambda \circ \Delta((\tilde{v}_1^i)_\alpha, \dots, (\tilde{v}_n^i)_\alpha)$, ou, de manière équivalente, par $\Lambda\left((\Delta(\tilde{v}_1^i, \dots, \tilde{v}_n^i))_{(1-\alpha)^+}\right)$.

Par extension, un intervalle flou \tilde{f} sera dit *surjectif*, si l'ensemble de ses α -coupes sont des intervalles *surjectifs*.

1.2 Corrélation ordinale floue

1.2.1 Définitions

Il existe différents outils destinés à mesurer la similarité entre deux ordres totaux L_1 et L_2 , définis sur un ensemble fini X de cardinal n . Nous décrirons la mesure de τ de Kendall, mais nous soulignons également l'existence du coefficient de Spearman, défini comme la mesure de corrélation classique appliquée aux rangs.

Soit N le nombre de paires d'objets : $N = n(n-1)/2$, et d le nombre de paires discordantes : une paire (x, y) est dite *discordante* si elle appartient à L_1 et pas à L_2 , ou l'inverse. Le τ de Kendall est alors défini comme [32] :

$$\tau = 1 - \frac{2 \times d}{N}.$$

Avec un formalisme ensembliste, on obtient :

$$\tau = \frac{2 \times |L_1 \cap L_2|}{N} - 1.$$

Nous avons alors proposé la généralisation de cette définition de corrélation au traitement d'ordres partiels, selon le principe décrit dans la section 1.1.3, p. 107. Ce résultat a été proposé indépendamment par Ha et Haddawy [27]. Considérons deux ordres partiels P_1 et P_2 . Soit $\Lambda(P_1)$ et $\Lambda(P_2)$ leurs ensembles associés d'extensions linéaires. A tout couple d'ordres totaux (L_1, L_2) tel que $L_1 \in \Lambda(P_1)$ et $L_2 \in \Lambda(P_2)$, correspond une mesure de corrélation de rang r . L'ensemble fermé de taille minimale contenant toutes les valeurs r ainsi obtenues est alors appelé *intervalle de corrélation* entre P_1 et P_2 : c'est l'ensemble fermé le plus petit contenant toutes les mesures de corrélation possibles entre les extensions linéaires des deux ordres partiels.

Cette extension de la corrélation des ordres totaux aux ordres partiels est indépendante de la mesure utilisée : toutes sont donc applicables. On désigne par ρ la mesure de corrélation entre ordres totaux choisie. D'après la méthode exposée dans le paragraphe 1.1.3, p. 107, la définition formelle de l'intervalle de corrélation associée aux ordres partiels P_1 et P_2 est :

$$\bar{\rho}(P_1, P_2) = \left[\min_{L_1 \in \Lambda(P_1), L_2 \in \Lambda(P_2)} \rho(L_1, L_2), \max_{L_1 \in \Lambda(P_1), L_2 \in \Lambda(P_2)} \rho(L_1, L_2) \right]$$

En suivant le principe présenté dans la section 1.1.3, p. 107, on définit alors un tau de Kendall flou :

$$\left[\tilde{\rho}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \right]_{\alpha} = \tilde{\rho} \left(\left[\tilde{P}_1 \right]_{(1-\alpha)^+}, \left[\tilde{P}_2 \right]_{(1-\alpha)^+} \right), \forall \alpha \in]0, 1].$$

1.2.2 Méthodes de calcul

Le calcul de l'intervalle de corrélation représente un problème pratique non négligeable, à cause de sa complexité. En effet, le nombre d'extensions linéaires d'un ordre partiel croît exponentiellement avec le nombre de ses paires d'objets non-ordonnées. La solution immédiate consistant à générer la totalité des couples d'extensions linéaires possibles n'est donc pas judicieuse, même pour des ensembles d'objets de taille faible.

Une solution satisfaisante consiste à générer uniformément un nombre limité de couples d'extensions linéaires, par des méthodes de type Monte Carlo [4]. L'intervalle obtenu représente alors une approximation de l'intervalle de corrélation recherché.

Dans le cas particulier de la mesure de Kendall, nous avons proposé un algorithme [29] fournissant une mesure exacte de l'intervalle de corrélation. Basé sur une structure de programmation de type *branch and bound*, il n'est cependant pas utilisable pour des ensembles d'objets de trop grande taille (supérieure à 12).

1.2.3 Subjectivité de l'intervalle de corrélation basé sur le τ de Kendall

Avant d'être normalisé de façon à appartenir à l'intervalle $[-1, 1]$, le τ de Kendall correspond au nombre de paires d'objets identiquement ordonnées dans les deux ordres partiels comparés. Ainsi, pour un couple d'ordres partiels (P_1, P_2) , la borne inférieure

τ_{min} (respectivement, maximale τ_{max}) de l'intervalle de corrélation correspond au nombre minimal N_{min} (respectivement maximal N_{max}) de paires identiquement ordonnées dans les extensions linéaires de P_1 et P_2 .

On peut s'interroger sur l'interprétation de l'intervalle $[N_{min}, N_{max}]$. En particulier, on souhaite savoir si toute valeur entière de l'intervalle correspond au nombre de paires identiquement ordonnées d'un couple d'extensions linéaires de P_1 et P_2 . La proposition suivante montre que c'est bien le cas.

Proposition 1.3 *Soit un couple d'ordres partiels (P_1, P_2) , et $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ son intervalle de corrélation basé sur le tau de Kendall. Soient N_{min} et N_{max} les nombres d'objets identiquement ordonnés correspondant respectivement à τ_{min} et τ_{max} . Alors pour toute valeur entière $r \in [N_{min}, N_{max}]$, il existe au moins un couple d'extensions linéaires L_1 et L_2 appartenant respectivement à $\Lambda(P_1)$ et $\Lambda(P_2)$, dont le nombre de paires d'objets identiquement ordonnées est égal à r .*

Démonstration : cf. section 5, p. 149.

1.3 Rangs flous

1.3.1 Définitions

Nous allons généraliser aux ordres partiels flous la notion classique de rang (sans traiter le cas des rangs ex-æquos : on considère que les mesures affectées aux objets sont continues, et nécessairement distinctes). On considère un rang comme une fonction ν_L , définie de X dans \mathbb{N} , et associée à l'ordre total $L \in \mathcal{L}_X$. Pour tout objet x , on désigne par $X_L^p(x)$ et $X_L^s(x)$ les sous-ensembles de X associés à x selon L , respectivement définis comme les prédécesseurs et successeurs de x , selon L . Ces notions ont été définies dans la section 2.2, p. 44.

L'ordre L étant total, la relation suivante est vraie pour tout $x \in X$:

$$X = X_L^p(x) \cup X_L^s(x) \cup \{x\}.$$

Les cardinaux de ces ensembles vérifient la propriété suivante :

$$|X_L^p(x)| + |X_L^s(x)| + 1 = |X| = n,$$

d'où la définition proposée pour la fonction rang ν_L associée à l'ordre total L :

$$\nu_L(x) = 1 + |X_L^s(x)| = n - |X_L^p(x)|.$$

Cette fonction rang peut être considérée comme une fonction ordinale. En effet, il suffit pour cela de poser :

$$\nu_x(L) = \nu_L(x),$$

où ν_x est une fonction ordinale associée à chaque objet $x \in X$. Il est par conséquent possible de l'étendre à tout ensemble net d'extensions linéaires d'un ordre partiel P suivant

la méthode décrite dans la section 1.1.3, p. 107, puis à tout ensemble flou d'extensions linéaires d'un ordre partiel flou \tilde{P} .

Suivant ce principe on définit la fonction de rang $\bar{\nu}_P(x)$ associée à l'ordre partiel P , comme celle qui à tout objet $x \in X$, fait correspondre l'intervalle le plus précis contenant l'ensemble des rangs occupé par x sur l'ensemble des extensions linéaires de P :

$$\bar{\nu}_P(x) = \left[\min_{L \in \Lambda(P)} \nu_L(x), \max_{L \in \Lambda(P)} \nu_L(x) \right].$$

On note que $\bar{\nu}_P(x)$ est égal à $\bar{\nu}_x(P)$, l'extension de la fonction ordinale ν_x à l'ensemble des extensions linéaires de P . On n'utilisera toutefois pas cette notation.

Nous proposons ensuite l'extension au flou de la notion de rang, suivant le principe décrit dans la section 1.1.3, p. 107 :

$$[\tilde{\nu}_{\tilde{P}}]_{\alpha} = \bar{\nu}_{[\tilde{P}]_{(1-\alpha)^+}}, \quad \forall \alpha \in]0, 1].$$

1.3.2 Calcul

Le nombre d'extensions linéaires d'un ordre partiel est potentiellement très grand. Même pour une dizaine d'objets, la méthode consistant à étudier toutes les extensions linéaires d'un ordre partiel de façon à déterminer les rangs minimal et maximal d'un objet, n'est pas indiquée.

Nous préférons donc utiliser la formule de calcul suivante.

Proposition 1.4 *Soit P un ordre partiel défini sur X , et $x \in X$ un objet. Soit $X_P^p(x)$ (respectivement $X_P^s(x)$) l'ensemble des éléments de X prédécesseurs (respectivement successeurs) de x . On a alors :*

$$\bar{\nu}_P(x) = [1 + |X_P^s(x)|, n - |X_P^p(x)|].$$

Démonstration : cette proposition et la suivante sont démontrées dans la section 5, p. 149.

Comme dans le cas de la définition des intervalles de corrélation de Kendall, on s'intéresse aussi à la surjectivité des intervalles de rang.

Proposition 1.5 *Soit un ordre partiel P et un élément $x \in X$. Soit $\bar{\nu}_P(x)$ son intervalle de rangs sur P . Alors pour toute valeur entière $r \neq 0 \in \bar{\nu}_P(x)$, il existe au moins une extension linéaire $L \in \Lambda(P)$, selon laquelle le rang de x est r : $\nu_L(x) = r$.*

Démonstration : cf. section 5, p. 149.

1.3.3 Critique des rangs flous

Associés à des ordres totaux, les rangs résument la totalité de l'information ordinale, de sorte que, dans le langage courant, les notions d'ordre et de rangs sont souvent confondues.

Mais associés aux ordres partiels, les intervalles de rangs ne sont malheureusement pas aussi satisfaisants. Nous allons le montrer avec l'exemple qui suit.

On considère un référentiel $X = \{a, b, c, d\}$, sur lequel on définit deux ordres partiels P_1 et P_2 , en affectant à chacun deux uniques contraintes d'ordre :

- sur P_1 : aP_1b et cP_1d ;
- sur P_2 : aP_2d et cP_2b .

Les intervalles de rangs associés à P_1 et P_2 sont représentés sur la figure 4.1, p. 112 : les intervalles sont identiques, malgré les différences entre les deux ordres partiels. Cela signifie qu'une part de l'information ordinale est perdue. Le fait de traduire une relation d'ordre en rangs consiste en effet à convertir une information ordinale en information quantitative. L'approche relationnelle est abandonnée, et les rapports entre paires d'objets sont perdus. Seule subsiste une information quantitative absolue.

	1 ^{er}	2 ^{ième}	3 ^{ième}	4 ^{ième}
a		■		
b	■			
c		■		
d	■			

FIG. 4.1 – Représentation des rangs de P_1 et P_2

Dans cet exemple, on s'aperçoit que la seule donnée des intervalles permet juste d'affirmer que a et c sont « plus dominants » que les objets b et d : les premiers n'occupent jamais le rang 1, alors que les seconds ne peuvent occuper le rang 4. Mais il est impossible de préciser les rapports entre ces deux groupes d'objets. D'après la représentation, les objets a et c peuvent chacun dominer b ou d , alors que selon P_1 , a domine b et c domine d , et que selon P_2 , c'est l'inverse.

D'autre part, la représentation est trompeuse, car le recouvrement de deux intervalles n'indique en aucune manière l'absence de contrainte d'ordre sur les objets dont ils représentent les rangs. Par exemple, dans le cas de P_1 , les intervalles de rangs de a et b se chevauchent alors que a domine b . Les intervalles ont une signification absolue et non relative : ici, les intervalles de a et b montrent seulement que ces deux objets peuvent chacun en dominer un ou deux autres, sans préciser lesquels.

2 Restriction aux ordres d'intervalles flous

Parmi les ordres partiels se distingue la classe des ordres d'intervalles, qui regroupe les relations ordinales issues d'une comparaison d'intervalles. Ainsi, lorsque l'on considère

un ensemble X d'intervalles, la relation de dominance regroupant l'ensemble des couples ordonnés d'intervalles $(x, y) \in X \times X$ tels que la borne minimale de x domine strictement la borne maximale de y , définit un ordre d'intervalles.

Toute relation ordinale appartenant à cette classe, définie sur un ensemble fini d'objets X , se prête donc à une représentation évidente, sur une seule dimension, grâce à l'association d'un intervalle à chaque objet. C'est la simplicité de son interprétation qui rend cette représentation particulièrement intéressante, puisqu'un simple aperçu de deux intervalles suffit à déterminer la relation ordinale liant le couple d'objets correspondants : équivalence si l'intersection est non vide, et supériorité de l'objet dont l'intervalle domine strictement l'autre sinon (sa borne minimale excédant la borne maximale de l'autre intervalle).

Cette représentation d'une relation ordinale sur un seul axe nous est apparue très utile, notamment pour la synthèse multidimensionnelle d'un ensemble de relations ordinales.

Mais elle s'applique exclusivement aux ordres d'intervalles, et les relations de dominance strictes disponibles à l'issue des différentes procédures d'agrégations, appartiennent à la catégorie plus générale des ordres partiels. C'est pourquoi nous proposons une approximation des ordres partiels en ordres d'intervalles. Ainsi, nous sacrifions une part de l'information ordinale, la plus faible possible, de sorte que la relation réduite se prête à une représentation monodimensionnelle, par le biais d'intervalles. La perte d'information apparaît raisonnable pour deux raisons. D'une part, il est courant qu'une représentation synthétique de données complexes, notamment multidimensionnelles, se traduise par une réduction des données (exemple de l'ACP). Et d'autre part, la pratique montre que cette perte est dans la plupart des cas quantitativement négligeable : en dépit des incohérences dans les réponses des juges, on s'aperçoit que les relations de dominance strictes obtenues sont très proches d'ordres d'intervalles.

2.1 Rangs et pseudo-rangs

Tout ordre d'intervalles $Q \subseteq X \times X$ peut être représenté par un ensemble d'intervalles associés à chacun des objets de X . Parmi ceux-ci, sous la contrainte de bornes définies sur \mathbb{N} , s'en distingue un de compacité maximale. Nous allons ici montrer comment générer cette représentation.

C'est dans la continuité de nos travaux sur les rangs nets et flous, que nous avons défini la notion d'intervalles de pseudo-rangs en fonction des intervalles de rangs. Par la suite, nous avons réalisé que cette notion constituait un résultat classique de la théorie des ordres, où la notion de « pseudo-rangs » n'apparaît pas explicitement. Nous reprenons donc ici la présentation usuelle de ces intervalles caractéristiques particuliers [1], en la complétant par le rapport aux intervalles de rangs, non mentionné dans la littérature.

2.1.1 Définition des pseudo-rangs

Dans cette partie, on considère un ensemble d'intervalles $\{\bar{v}_Q(x), x \in X\}$ caractéristique de l'ordre d'intervalles Q selon la définition commune, c'est-à-dire tel que :

$$(x, y) \in Q \Leftrightarrow \bar{v}_Q(x)^- > \bar{v}_Q(y)^+,$$

à bornes définies sur \mathbb{N} .

On rappelle qu'une *antichaîne* A d'un ordre partiel P , est un ensemble d'objets mutuellement indifférents selon $P : \forall x, y \in A, (x, y) \notin P, (y, x) \notin P$, ou encore, de façon plus synthétique : $\forall x, y \in A, (x, y) \in P^c \cap P^d$.

On note $A_Q(i) \subseteq X$ les *antichaînes maximales* de Q , avec $i \in \{1, \dots, m_Q\}$, où m_Q désigne le nombre d'antichaînes maximales de Q .

Lemme 2.1 *A toute antichaîne maximale $A_Q(i)$, $i \in \{1, \dots, m_Q\}$, et en fonction de l'ensemble $\{\bar{v}_Q(x), x \in X\}$ caractéristique de Q , on associe l'intervalle $I_{\bar{v}_Q}(i) = [I_{\bar{v}_Q}^-(i), I_{\bar{v}_Q}^+(i)] = \bigcap_{x \in A_Q(i)} \bar{v}_Q(x)$. Alors :*

$$I_{\bar{v}_Q}(i) \neq \emptyset,$$

et d'autre part :

$$I_{\bar{v}_Q}(i) \cap I_{\bar{v}_Q}(j) = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j.$$

Démonstration : cf. section 5, p. 152.

Lemme 2.2 *Ordonnons les antichaînes maximales de telle façon que :*

$$i > j \Leftrightarrow I_{\bar{v}_Q}^-(i) > I_{\bar{v}_Q}^+(j).$$

Cet ordre est propre aux antichaînes maximales de Q , et ne dépend pas de l'ensemble d'intervalles caractéristique de Q :

$$i > j \Leftrightarrow \forall x \in A_Q(i) \cap (A_Q(j))^c, \forall y \in A_Q(j) \cap (A_Q(i))^c, (x, y) \in Q.$$

Démonstration : ce résultat est immédiat, étant donné que les $I_{\bar{v}_Q}(i)$ sont mutuellement disjoints, et que leur relation d'ordre est induite par Q .

Lemme 2.3 *Si un sous-ensemble B de X appartient à deux antichaînes maximales de Q , alors il appartient à toutes les antichaînes intermédiaires (selon l'ordre précédemment exposé) :*

$$\forall B \subseteq X, i < j < k \in \{1, \dots, m_Q\}, B \subseteq A_Q(i) \cap A_Q(k) \Rightarrow B \subseteq A_Q(j).$$

Démonstration : cf. section 5, p. 153.

Proposition 2.1 *Soit Q un ordre d'intervalles défini sur X , $\{A_Q(1), \dots, A_Q(m_Q)\}$ ses m_Q antichaînes maximales ordonnées, alors tout ensemble d'intervalles $\{\bar{v}_Q(x), \forall x \in X\}$ est caractéristique de Q si et seulement si :*

$$\begin{aligned} I_{\bar{v}_Q}(i)^- > I_{\bar{v}_Q}(j)^+ &\Leftrightarrow i > j, \forall i, j \in \{1, \dots, m_Q\} \\ \bar{v}_Q(x) \cap \bar{v}_Q(y) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, m_Q\} / \bar{v}_Q(x) \cap \bar{v}_Q(y) \cap I_{\bar{v}_Q}(i) \neq \emptyset, \forall x, y \in X, \end{aligned}$$

où $\{I_{\bar{v}_Q}(i), \forall i \in \{1, \dots, m_Q\}\}$, désigne l'ensemble d'intervalles associés aux antichaînes maximales de Q fonction des intervalles $\{\bar{v}_Q(x), \forall x \in X\}$.

Démonstration : cf. section 5, p. 153.

Proposition 2.2 *Soit Q un ordre d'intervalles défini sur X , $\{A_Q(1), \dots, A_Q(m_Q)\}$ ses m_Q antichaînes maximales, et $\{I_1, \dots, I_{m_Q}\}$ un ensemble d'intervalles associés à ces antichaînes, ordonnés de la même manière :*

$$i > j \Leftrightarrow I_i^- > I_j^+.$$

alors l'ensemble d'intervalles :

$$\left\{ \bar{\kappa}_Q(x) = \left[\min_{i/x \in A_Q(i)} I_i^-, \max_{i/x \in A_Q(i)} I_i^+ \right], \forall x \in X \right\}$$

est caractéristique de Q . On note que l'intervalle $\bar{\kappa}_Q(x)$ est défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{I_i, \forall i/x \in A_Q(i)\}$.

Démonstration : cf. section 5, p. 153.

Cette proposition décrit une manière très simple de construire un ensemble d'intervalles caractéristique d'un ordre d'intervalles Q , puisque que cette construction ne dépend que de la détermination de m_Q intervalles disjoints, associés à chacune des antichaînes maximales $\{A_Q(i), i \in \{1, \dots, m_Q\}\}$.

Définition 2.1 *On appellera désormais pseudo-rang chacun des indices des antichaînes maximales $\{A_Q(i), i \in \{1, \dots, m_Q\}\}$ d'un ordre d'intervalles Q , ordonnées suivant les spécifications de la proposition 2.2, p. 114.*

Dans le cas d'un ensemble d'intervalles caractéristique de Q construit suivant la proposition 2.2, p. 115, nous désignerons par le terme d'intervalle pseudo-rang, l'intervalle associé à chaque antichaîne maximale de Q . Ces intervalles sont à distinguer des intervalles de pseudo-rangs, qui caractérisent chaque objet $x \in X$, par l'enveloppe convexe des intervalles pseudo-rangs associés aux antichaînes maximales contenant x .

Proposition 2.3 *Soit Q un ordre d'intervalles défini sur X , $\{I_1, \dots, I_{m_Q}\}$ un ensemble d'intervalles pseudo-rangs de Q (ordonnés comme les antichaînes correspondantes), et $\{\bar{\kappa}_Q(x), \forall x \in X\}$ l'ensemble des intervalles de pseudo-rangs définis à partir de ces intervalles pseudo-rangs. Alors chacun de ces intervalles de pseudo-rangs $\bar{\kappa}_Q(x)$ est surjectif, au sens où il contient l'intervalle pseudo-rang I_i d'une antichaîne maximale $A_Q(i)$ si et seulement si cette antichaîne contient x :*

$$I_i \subseteq \bar{\kappa}_Q(x) \Leftrightarrow x \in A_Q(i).$$

Démonstration : ce résultat est directement issu du lemme 2.3, p. 114.

Cette proposition vise à faciliter l'interprétation d'un intervalle de pseudo-rangs associé à un objet quelconque $x \in X$: tous les intervalles pseudo-rangs qu'il inclut correspondent à des ensembles distincts d'objets mutuellement non ordonnés contenant x .

Définition 2.2 Soit Q un ordre d'intervalles défini sur X . Pour tout objet $x \in X$, on définit :

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_Q(x) &= \left[\bar{\kappa}_Q^-(x), \bar{\kappa}_Q^+(x) \right] \\ &= \left[\min_{i/x \in A_Q(i)} i, \max_{i/x \in A_Q(i)} i \right]\end{aligned}$$

comme l'intervalle de pseudo-rangs compacts de l'objet x selon Q .

Proposition 2.4 L'ensemble des intervalles de pseudo-rangs compacts est un cas particulier d'ensemble d'intervalles caractéristique de Q , élaboré suivant la notion d'enveloppe convexe présentée dans la proposition 2.2, p. 115, où les intervalles pseudo-rangs sont les pseudo-rangs eux-mêmes :

$$\begin{aligned}(x, y) \in Q &\Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(x)^- > \bar{\kappa}_Q(y)^+ \\ I_i = I_{\bar{\kappa}_Q(i)} &= \{i\}, \forall i \in \{1, \dots, m_Q\},\end{aligned}$$

et c'est l'ensemble d'intervalles caractéristique de Q le plus compact, au sens de la minimisation du critère suivant :

$$\max_{x \in X} \bar{\kappa}_Q^+(x) - \min_{x \in X} \bar{\kappa}_Q^-(x),$$

leurs bornes étant à valeur entière (définies arbitrairement sur \mathbb{N}^*).

Démonstration : cf. section 5, p. 153.

Exemple 2.1 Soit Q la relation définie sur $X = \{a, b, c, d\}$, décrite par le tableau suivant ($(x, y) \in Q \Leftrightarrow Q(x, y) = 1$) :

Q	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

Q spécifie par conséquent $a \succ b \succ c$ et $a \succ d$. Il s'agit d'un ordre d'intervalles, car il n'existe aucune paire de couples (w, x) et (y, z) telle que $(w, x) \in Q$ et $(y, z) \in Q$, qui ne vérifie pas $(w, z) \in Q$ ou $(y, x) \in Q$.

On dénombre $m_Q = 3$ antichaînes maximales de Q :

$$\begin{aligned}A_Q(1) &= \{c, d\} \\ A_Q(2) &= \{b, d\} \\ A_Q(3) &= \{a\}.\end{aligned}$$

Les antichaînes sont correctement ordonnées, car, pour $i \in \{1, 2\}$, tous les éléments d'une antichaîne maximale $A_Q(i)$ exclus de l'antichaîne maximale $A_Q(i+1)$ sont dominés par les éléments de $A_Q(i+1)$ qui n'appartiennent pas à $A_Q(i)$:

$$\begin{aligned}i = 1 &: (b, c) \in Q \\ i = 2 &: (a, b) \in Q \text{ et } (a, d) \in Q.\end{aligned}$$

Les pseudo-rangs sont donc les éléments de $\{1, 2, 3\}$, indices des antichaînes maximales. Et l'intervalle de pseudo-rangs compacts $\bar{\kappa}_Q(x)$ affecté à chaque produit $x \in X$ est défini comme l'intervalle minimal contenant l'union des pseudo-rangs dont l'antichaîne maximale associée contient x :

$$\begin{aligned} a \in A_Q(1)^c \cap A_Q(2)^c \cap \mathbf{A}_Q(3) &\Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(a) = [3, 3] \\ b \in A_Q(1)^c \cap \mathbf{A}_Q(2) \cap A_Q(3)^c &\Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(b) = [2, 2] \\ c \in \mathbf{A}_Q(1) \cap A_Q(2)^c \cap A_Q(3)^c &\Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(c) = [1, 1] \\ d \in \mathbf{A}_Q(1) \cap \mathbf{A}_Q(2) \cap A_Q(3)^c &\Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(d) = [1, 2]. \end{aligned}$$

Les intervalles de pseudo-rangs compacts de chacun des produits de X sont représentés sur la figure 4.2, p. 117.

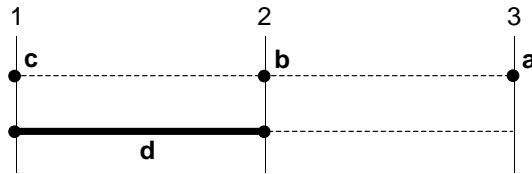


FIG. 4.2 – Intervalles de pseudo-rangs de l'exemple 2.1, p. 116

Proposition 2.5 Les bornes des intervalles de pseudo-rangs compacts d'un ordre d'intervalles sont constitués des rangs des bornes de ses intervalles de rangs, après assimilation des éléments ex-æquos :

$$\bar{\kappa}_Q(x) = \left[\nu_{\{\bar{\nu}_Q^-(y)/y \in X\}} \left(\bar{\nu}_Q^-(x) \right), \nu_{\{\bar{\nu}_Q^+(y)/y \in X\}} \left(\bar{\nu}_Q^+(x) \right) \right],$$

où $\nu_K(k)$ désigne le rang de l'élément $k \in K$ parmi les éléments distincts de l'ensemble quelconque K .

Démonstration : cf. section 2.5, p. 117.

Exemple 2.2 Reprenons le cas de l'exemple 2.1, p. 116. Dans le tableau ci-dessous, on a reporté pour chaque objet x , les valeurs suivantes :

- $|X_Q^s(x)|$ et $|X_Q^p(x)|$, les cardinaux de ses successeurs et prédécesseurs ;
- $\bar{\nu}_Q^-(x)$ et $\bar{\nu}_Q^+(x)$, les bornes de ses intervalles de rangs, fonctions des cardinaux précédents ;
- les rangs des valeurs de ces deux derniers ensembles, après rejet des ex-æquos ; notamment, pour les bornes inférieures, on attribue un rang à chacun des éléments $e \in \{4, 2, 1\}$, que l'on associe ensuite aux objets dont la borne inférieure a pour valeur e .

$x \in X$	$ X_Q^s(x) $	$ X_Q^p(x) $	$\bar{\nu}_Q^-(x)$	$\bar{\nu}_Q^+(x)$	$\nu_{\{\bar{\nu}_Q^-(y)/y \in X\}}(\bar{\nu}_Q^-(x))$	$\nu_{\{\bar{\nu}_Q^+(y)/y \in X\}}(\bar{\nu}_Q^+(x))$
a	3	0	4	4	3	3
b	1	1	2	3	2	2
c	0	2	1	2	1	1
d	0	1	1	3	1	2

On vérifie que les deux dernières colonnes correspondent respectivement aux bornes inférieure et supérieure des intervalles de pseudo-rangs compacts de chacun des objets.

2.1.2 Interprétation et représentations des pseudo-rangs

Tout d'abord, notre dénomination *pseudo-rangs* se justifie par sa similitude avec la notion de *rang*. On note en particulier qu'associés à des ordres totaux (ce qui constitue leur cadre classique de définition), les rangs coïncident exactement avec les intervalles de pseudo-rangs compacts.

Ces deux notions permettent une représentation quantitative d'objets uniquement cernés à travers des relations qualitatives de type ordinal. Par là même, ces représentations contiennent nécessairement une part d'arbitraire, au sens où il existe une infinité de représentations quantitatives dont les rapports ordinaux vérifient la relation ordinaire considérée.

Conceptuellement, rangs et pseudo-rangs se caractérisent par un principe d'*information exhaustive et non-redondante*. En ce qui concerne les rangs d'ordres totaux définis sur un ensemble X , $n = |X|$ niveaux qualitatifs totalement ordonnés sont nécessaires et suffisants pour traduire la relation ordinaire : à chacun correspond un et un seul objet, et aucune paire d'objets n'a des rapports ordinaux parfaitement identiques. On retrouve ce principe dans les pseudo-rangs d'un ordre d'intervalles Q , puisqu'ils sont en bijection avec un ensemble de m_Q niveaux qualitatifs totalement ordonnés (avec m_Q le nombre d'antichânes maximales de Q). Là encore, chacun est nécessaire, et l'ensemble, bien que de cardinal inférieur ou égal à n , suffit au codage de tous les rapports ordinaux spécifiés par Q . La différence avec les rangs réside dans le fait que les objets peuvent être représentés par une union de niveaux qualitatifs consécutifs.

Nous proposons donc d'interpréter les pseudo-rangs d'ordres d'intervalles de la même façon que les rangs d'ordres totaux, soit comme des niveaux qualitatifs totalement ordonnés. On peut ainsi imaginer de les mettre en correspondance avec des termes linguistiques rendant compte de cette hiérarchie. Dans l'exemple d'une relation d'ordre d'intervalles traduisant des rapports d'intensité de couleur, composée de $m_Q = 4$ antichânes maximales, les pseudo-rangs pourraient ainsi être dénommés « très clair », « clair », « foncé » et « très foncé ».

Au niveau de leur représentation, l'arbitraire est relativisé par un principe d'*uniformité*. Les rangs comme les pseudo-rangs compacts sont représentés chacun par des valeurs uniformément réparties sur un espace donné : $\{1, \dots, n\}$ pour les rangs, $\{1, \dots, m_Q\}$ pour les pseudo-rangs.

La caractérisation des pseudo-rangs compacts nous a permis de souligner le rapport entre les notions de rangs et de pseudo-rangs. Notamment, nous les avons d'abord définis

par le biais de la proposition 2.5, p. 117. Nous proposons cependant une autre convention de représentation des pseudo-rangs. La forme la plus compacte préalablement déterminée n'est en effet pas la plus satisfaisante, en particulier pour les raisons suivantes :

- selon qu'ils occupent un ou plusieurs pseudo-rangs, les intervalles de pseudo-rangs sont de nature différente : singletons ou intervalles de longueur non nulle ; or cette distinction entre valeur précise et valeur imprécise paraît excessive, puisque les représentations sont pareillement arbitraires dans les deux situations ;
- nous souhaitons pouvoir espacer les intervalles pseudo-rangs, dans le but d'améliorer les représentations multidimensionnelles des produits ; cela sera justifié par la suite.

Pour cela, nous préférons une autre forme compacte des intervalles caractéristiques d'un ordre d'intervalle Q , en définissant les intervalles pseudo-rangs par l'ensemble d'intervalles suivant, plutôt que par $\{1, \dots, m_Q\}$:

$$\{I_i = [(i - 1)(1 + K_e), (i - 1)(1 + K_e) + 1[, \forall i \in \{1, \dots, m_Q\}\}.$$

Cet ensemble d'intervalles a été défini par les contraintes suivantes :

- les intervalles sont de tailles 1 ;
- l'intervalle I_1 a sa borne inférieure égale à 0 ;
- les intervalles consécutifs sont espacés d'une distance égale au paramètre $K_e \geq 0$.

Il est de plus rigoureusement construit selon la procédure de la proposition 2.2, p. 115, car tous les intervalles sont bien disjoints : l'ouverture à droite des intervalles assure en effet la disjonction des intervalles voisins, même pour $K_e = 0$. Par conséquent, les intervalles $\{\bar{\kappa}_Q(x), \forall x \in X\}$ définis comme des enveloppes convexes des intervalles $\{I_i, \forall i \in \{1, \dots, m_Q\}\}$ sont bien caractéristiques de Q .

Cette représentation des objets est la plus compacte compte tenu du nouveau choix de contraintes : soit avec des intervalles fermés à gauche et ouverts à droite, de taille 1 et d'espacement égal à K_e . On note que la représentation définie par $K_e = 0$ est classique [1].

Le principe d'uniformité de la représentation est conservé, car les pseudo-rangs sont associés à une partition uniforme en m_Q catégories, définies chacune par un intervalle de taille $1 + K_e$.

Sur la figure 4.3, p. 119, nous reprenons l'exemple 2.1, p. 116, en adaptant la représentation des intervalles de pseudo-rangs par la transformation indiquée, avec $K_e = 1$.

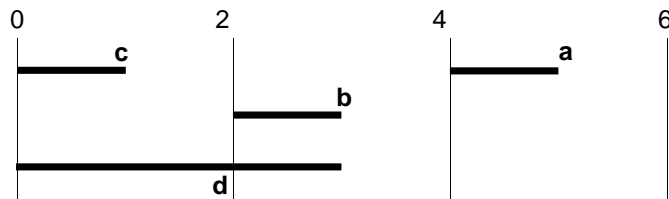


FIG. 4.3 – Intervalles de pseudo-rangs de l'exemple 2.1, p. 116 représentés sous la nouvelle forme

2.1.3 Vers des intervalles de pseudo-rangs flous

Nous n'avons pas finalisé le développement d'une méthode pertinente de construction de pseudo-rangs flous. Nous pouvons néanmoins souligner quelques uns des obstacles rencontrés.

La formule d'intervalle de pseudo-rangs compacts précédemment proposée n'est pas issue d'un principe d'extension. En effet, les intervalles de pseudo-rangs compacts d'un ordre total sont simplement ses rangs. Et nous avons préalablement décrit une extension de cette fonction *rangs* à un ordre partiel (ensemble particulier d'extensions linéaires), qui s'applique par conséquent aux ordres d'intervalles : il s'agit de la fonction d'intervalle de rangs, et non de pseudo-rangs compacts. Mais ces intervalles de rangs, même d'un ordre d'intervalles, ne se prêtent pas à la comparaison par paire : la comparaison de deux intervalles ne suffit pas à déduire le rapport ordinal du couple d'objets qu'ils représentent ; en particulier, une intersection d'intervalles n'implique pas l'indifférence des objets correspondants.

C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à une généralisation des intervalles de pseudo-rangs en intervalles de pseudo-rangs flous, de sorte que leur comparaison définisse un ordre d'intervalles flou.

Nous avons donc cherché à définir une méthode permettant de constituer un ensemble d'intervalles flous $\{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x), \forall x \in X\}$ caractéristique de l'ordre d'intervalles flou \tilde{Q} , c'est-à-dire tel que la comparaison par paire de ses éléments permette de déduire \tilde{Q} :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x, y) &= N\left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x) \geq \tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)\right) \\ &= 1 - \pi\left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y) > \tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)\right).\end{aligned}$$

Le lien entre l'ordre d'intervalles \tilde{Q} et les intervalles flous solutions $\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}$ s'exprime au travers de leurs α -coupes respectives :

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in]0, 1], (x, y) \in \left(\tilde{Q}\right)_\alpha &\Leftrightarrow N\left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x) \geq \tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)\right) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow 1 - \pi\left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y) > \tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)\right) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow 1 - \sup_{a > b} \min\left\{\mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)}(a), \mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)}(b)\right\} \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \sup_{a > b} \min\left\{\mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)}(a), \mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)}(b)\right\} \leq 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall a > b, \min\left\{\mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)}(a), \mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)}(b)\right\} \leq 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall a > b, \mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)}(a) > 1 - \alpha \Rightarrow \mu_{\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)}(b) \leq 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall a > b, a \in \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)\right)_{(1-\alpha)^+} \Rightarrow b \notin \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)\right)_{(1-\alpha)^+} \\ &\Leftrightarrow a \in \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)\right)_{(1-\alpha)^+} \text{ et } b \in \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)\right)_{(1-\alpha)^+} \Rightarrow a \leq b \\ &\Leftrightarrow \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(y)\right)_{(1-\alpha)^+}^+ \leq \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)\right)_{(1-\alpha)^+}^-.\end{aligned}$$

Or, pour tout ordre d'intervalles net Q , les intervalles de pseudo-rangs $\bar{\kappa}_Q(x)$ vérifient

cette propriété :

$$\forall (x, y) \in X^2, (x, y) \in Q \Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(y)^+ \leq \bar{\kappa}_Q(x)^-,$$

ce qui signifie que l'on sait représenter toute α -coupe stricte $\left(\tilde{Q}\right)_\alpha$. On dispose pour cela de la proposition 2.2, p. 115, qui permet de définir des intervalles de pseudo-rangs en fonction d'un ensemble quelconque d'intervalles pseudo-rangs. On peut notamment opter pour la solution des intervalles de pseudo-rangs compacts, ou pour la suivante, présentée dans la section 2.1.2, p. 118. Mais quel que soit ce choix a priori, les intervalles de pseudo-rangs ne peuvent être exploités directement, car les différentes coupes $[\bar{\kappa}_{\tilde{Q}_\alpha}(x)^- \bar{\kappa}_{\tilde{Q}_\alpha}(x)^+]$ ne sont pas imbriquées les unes dans les autres : elles ne constituent pas un nombre flou $\tilde{\kappa}_{\tilde{Q}}(x)$.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous restreindrons donc à représenter les ordres d'intervalles flous pour des α -coupes données, de façon indépendante.

2.2 Approximation d'un ordre partiel flou

Les intervalles de pseudo-rangs offrent une représentation monodimensionnelle d'une relation d'ordre d'intervalles. Or ceci peut se révéler utile, particulièrement pour une représentation multidimensionnelle d'un ensemble de relations, où chacun des axes serait dédié à une relation d'ordre.

Cependant, à l'issue d'une procédure d'agrégation, sur un ensemble de juges comme sur les répétitions d'un seul juge, la discrimination exprimée se trouve synthétisée dans une relation de dominance stricte \tilde{D} qui est un ordre partiel flou, et non nécessairement un ordre d'intervalles flou. Il n'est par conséquent pas possible de représenter les α -coupes de cette relation de façon monodimensionnelle, par attribution d'un intervalle à chaque produit.

La solution que nous proposons consiste à approximer l'ordre partiel flou \tilde{D} par un ordre d'intervalles flou $\tilde{Q} \subseteq \tilde{D}$. Comme mesure de la distance entre deux relations floues \tilde{Q}_1 et \tilde{Q}_2 , nous considérons le critère suivant :

$$\sum_{(x,y) \in X \times X} \left| \tilde{Q}_1(x, y) - \tilde{Q}_2(x, y) \right|.$$

Et nous définissons finalement l'approximation \tilde{Q} de \tilde{D} comme une relation floue d'ordre d'intervalles incluse dans \tilde{D} qui minimise ce critère.

Nous posons la contrainte d'inclusion $\tilde{Q} \subseteq \tilde{D}$ dans le but d'éviter un accroissement arbitraire de la discrimination exprimée. En effet, $\tilde{D}(x, y)$ rend compte du degré de nécessité de la dominance de l'objet x sur l'objet y , et sa modification entraîne donc une sous- ou surestimation de leur discrimination. De façon corollaire, la non-discrimination (qui s'interprète comme du conflit ou de l'indiscernabilité) se trouve surestimée ou sous-estimée. Mais dans notre étude, l'information prioritaire est la discrimination. Par conséquent, la sous-estimer signifie une perte d'information et ne suppose aucune erreur, alors que la sur-estimer signifie un ajout d'information et implique donc une prise de risque. Nous préférons donc la neutralité de la perte d'information. De plus, cette approximation vise essentiellement à faciliter les représentations multidimensionnelles, où il est courant d'autoriser une perte d'information au profit d'une meilleure synthèse (cf. ACP).

Le critère précédemment décrit doit être minimisé sous les contraintes suivantes :

$$0 \leq \tilde{Q}(x, y) \leq \tilde{D}(x, y), \forall (x, y) \in X \times X$$

\tilde{Q} est un ordre d'intervalles flou.

Pour la seconde contrainte, nous utilisons la condition nécessaire et suffisante de la définition 2.6, chap. 2, p. 46, avec le triplet de De Morgan habituel :

$$\min \left(\tilde{Q}(w, x), \tilde{Q}(y, z) \right) \leq \max \left(\tilde{Q}(w, z), \tilde{Q}(y, x) \right), \forall w, x, y, z \in X.$$

On s'aperçoit que le problème d'optimisation peut être traité par α -coupes. Notons $A = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p\}$ l'ensemble des p valeurs distinctes des $\left\{ \tilde{D}(x, y), (x, y) \in X \times X \right\}$, avec $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_p = \max_{(x, y) \in X \times X} \tilde{D}(x, y)$.

En effet, la solution \tilde{Q} est telle que $\tilde{Q}(x, y) \in A, \forall (x, y) \in X \times X$. On le montre par l'absurde.

Dans le cas contraire, il existe un ensemble de couples $(x, y) \in X \times X$, pour lesquels : $\exists i \in \{1, \dots, p-1\} / \alpha_i < \tilde{Q}(x, y) < \alpha_{i+1}$. Etudions les couples (x, y) de cet ensemble pour lesquels $\tilde{Q}(x, y) = \beta$ est maximal. Il est clair que la coupe large de niveau α_{i+1} est égale à la coupe stricte de niveau β . Modifier l'ensemble des degrés d'appartenances égaux à β en α_{i+1} ne génère donc pas de nouvelle α -coupe : la nouvelle coupe large de degré α_{i+1} égale l'ancienne stricte de niveau β . Puisqu'aucune nouvelle coupe n'est créée, toutes sont des ordres d'intervalles. De plus, la nouvelle coupe de niveau α_{i+1} est nécessairement incluse dans les coupes de niveau inférieur, de même qu'elle inclut les coupes de niveau supérieur. La modification des β en α_{i+1} ne change donc pas le statut de \tilde{Q} , qui reste un ordre d'intervalles flou. D'autre part, la propriété $\tilde{Q}(x, y) \leq \tilde{D}(x, y)$ est également conservée, puisque $\tilde{D}(x, y)$ prend ses valeurs dans A . Par conséquent, si $\tilde{D}(x, y) \geq \beta$, alors $\tilde{D}(x, y) \geq \alpha_{i+1}$.

La condition d'ordre d'intervalles flou imposant des contraintes disjonctives aux $\tilde{Q}(x, y)$, il n'existe pas d'algorithme polynômial capable de le résoudre (même dans le cas d'un ordre d'intervalles net). C'est pourquoi nous proposons un algorithme de type *branch and bound*. Celui-ci vise à maximiser le cardinal flou de \tilde{Q} , et procède par α -coupes, par ordre croissant, en *profondeur d'abord*.

L'algorithme consiste à explorer un arbre de recherche, dont chaque noeud est caractérisé par trois éléments :

- une relation \tilde{Q} courante ;
- un niveau de coupe α courant (à valeur dans $\{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p\}$), tel que les α -coupes de \tilde{Q} de niveau strictement inférieur à α sont des ordres d'intervalles ;
- un ensemble E d'éléments de $X \times X$ non encore traités : appartenant nécessairement aux coupes précédentes \tilde{Q} (soit $\tilde{Q}_{\alpha_i}, \forall \alpha_i < \alpha$), ils sont susceptibles d'appartenir à la coupe courante \tilde{Q}_α , mais la condition d'ordre d'intervalles de \tilde{Q}_α peut nécessiter leur rejet. Leur état d'appartenance ou de rejet doit donc faire l'objet d'une décision.

En chaque noeud, on cherche à valider la contrainte d'ordre d'intervalles sur la coupe α de la relation \tilde{Q} courante en minimisant le nombre de degrés tronqués, c'est-à-dire en

conservant un maximum de couples de E . Lorsque la condition d'ordre d'intervalles est d'emblée validée sur le niveau de coupe α courant (ce qui se produit notamment si E est vide), α est mis à jour avec la valeur $\alpha_i > \alpha$ d'indice i minimal sur lequel cette condition n'est plus vérifiée, et E est ensuite défini comme l'ensemble des couples de \tilde{Q}_α .

Un couple e quelconque de E est ensuite considéré. Le noeud s'ouvre sur deux branches conduisant chacune à un nouveau noeud, selon que l'appartenance de e à la coupe courante \tilde{Q}_α est validée ou non :

- le premier noeud fils est défini par l'appartenance de e à \tilde{Q}_α . La relation \tilde{Q} courante est donc mise à jour par la valeur suivante : $\tilde{Q}(e) = \alpha$. D'autre part, pour satisfaire la propriété de transitivité des coupes de \tilde{Q} , on ajoute également à \tilde{Q}_α l'ensemble des couples rendus nécessaires par l'ajout de e , selon la règle de transitivité. Si cela n'est pas possible (les couples à ajouter doivent en effet appartenir à E), la branche est coupée. Dans le cas contraire, E est ensuite mis à jour en rejetant e ainsi que l'ensemble des éléments qui ne pourront jamais satisfaire la contrainte d'ordre d'intervalles sur \tilde{Q}_α , compte tenu de l'acceptation de e . Le α courant conserve la même valeur ;
- le second noeud fils est défini par le rejet de e dans \tilde{Q}_α . Le degré d'appartenance de e à \tilde{Q} est mis à jour avec la valeur α_i , où i est l'indice maximal tel que $\alpha_i < \alpha$. L'ensemble E est diminué de e , et α conserve la même valeur. Mais là encore le noeud peut être abandonné, s'il n'est plus possible de satisfaire la contrainte d'ordre d'intervalles entre les éléments susceptibles d'appartenir à \tilde{Q}_α , dont e vient d'être exclu.

A la terminaison de chaque branche (non coupée) correspond une relation \tilde{Q} donnée, de cardinal maximal compte tenu des décisions prises en chacun des noeux prédécesseurs. Ce cardinal est effectivement maximal, car les rejets d'éléments de E n'ont lieu que tant que la condition d'ordre d'intervalles de la coupe courante n'est pas remplie. D'autre part, la relation obtenue est un ordre d'intervalles flou : le processus d'exploration s'arrête naturellement lorsque le dernier niveau de coupe α_p a été traité, et la procédure assure alors que toutes les coupes traitées sont des ordres d'intervalles.

Il n'est heureusement pas nécessaire d'explorer toutes les branches de l'arbre de recherche. Avant d'explorer un noeud, il est préférable de déterminer une borne maximale du cardinal flou des relations auxquelles il conduit : c'est le cardinal flou du \tilde{Q} courant. Si cette borne est inférieure ou égale au cardinal flou maximal atteint sur les terminaisons déjà explorées, la branche est aussitôt coupée.

L'intérêt de l'algorithme réside dans sa capacité à élaguer très rapidement l'arbre de recherche, ce qui le rend exploitable pour des ensembles X de cardinal approchant 15. En effet, la sélection comme le rejet de couples, grâce aux contraintes de transitivité et d'*ordre d'intervalles*, réduisent rapidement, pour une coupe donnée, les couples non traités. De plus, lorsqu'un couple est rejeté sur une coupe, la contrainte d'emboîtement entraîne son élimination de l'ensemble des coupes suivantes : la multiplication des coupes n'augmente donc pas outre mesure la complexité de l'optimisation.

Enfin, il est possible de simplifier cet algorithme par des heuristiques, notamment pour éviter le test de l'appartenance des couples déduits par transitivité aux couples sélectionnables.

3 Outils de représentation

3.1 Méthodes de représentation multidimensionnelle imprécises

Nous décrivons ici deux techniques statistiques destinées à la représentation multidimensionnelle de données imprécises. Il s'agit de deux outils usuels, dont l'extension au traitement de données floues a été récemment proposée par Dencœur et Masson [13][14][36].

3.1.1 Méthode de positionnement multidimensionnel de données imprécises

La méthode de positionnement multidimensionnel, en anglais *multidimensional scaling* (ou MDS) [2] [10], est communément utilisée pour l'analyse de mesures de dissimilarité entre objets. Nous reprenons ici une introduction proposée par Masson et Dencœur [36].

A partir des mesures de dissimilarités entre n objets, le positionnement multidimensionnel permet de bâtir une représentation de ces objets en associant à chacun un point dans un espace euclidien de dimension p , de telle sorte que les distances induites soient aussi proches que possible des dissimilarités exprimées. On obtient ainsi une « carte » d'objets aisément interprétable : la proximité de points renvoie à la similarité des objets correspondants, tout comme l'éloignement implique leur dissimilarité. La méthode de positionnement multidimensionnel a été exploitée assez tôt comme un outil de réduction de la dimension de l'espace de représentation : il est en effet possible d'approximer les distances d'un nuage de points d'un espace de grande dimension, dans un espace de dimension arbitraire p . Il s'agit alors de trouver un compromis entre l'erreur d'approximation, et la réduction dimensionnelle. Mais, par l'absence de contraintes sur les dissimilarités, le positionnement multidimensionnel constitue avant tout l'outil idéal d'analyse de dissimilarités exprimées par des sujets humains ; elle a ainsi été largement exploitée dans les sciences sociales.

Notons δ la relation de dissimilarité, qui à tout couple d'objets $(x, y) \in X \times X$, associe leur dissimilarité $\delta(x, y)$. Le problème consiste à définir une matrice $C = (c_{xj})$ de taille $n \times p$ représentant les coordonnées des n points associés à chaque objet $x \in X$, dans un espace de dimension p . Pour définir C , on cherche à rendre la relation δ aussi proche que possible de la relation D_C des distances inter-points, que l'on peut définir grâce à la distance euclidienne :

$$D_C(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^p (c_{xj} - c_{yj})^2}.$$

L'erreur d'approximation est évaluée à l'aide d'une fonction dite de *stress*, dont une définition peut être :

$$\sigma(C) = \sum_{x,y} (D_C(x, y) - \delta(x, y))^2.$$

La configuration optimale des points C est obtenue après minimisation de $\sigma(C)$ à l'aide d'une procédure itérative, initialisée par une configuration aléatoire de points.

Masson et Dencœur [36] ont proposé deux variantes de cette technique, destinées au traitement de dissimilarités floues : les données se présentent donc sous la forme de nombres flous $\tilde{\delta}(x, y)$. Afin de traduire l'imprécision modélisée par les nombres flous, la représentation finale dans un espace de dimension p ne consiste plus en n points, mais en n hypersphères « floues ».

Précisons la méthode dans le cas particulier où les nombres flous sont des intervalles classiques [13]. Les dissimilarités ne sont pas déterminées de façon précise, puisqu'encadrées par deux bornes. Un point de vue flou de l'intervalle de dissimilarité $\bar{\delta}(x, y)$ associé au couple d'objets (x, y) , est qu'il contient l'ensemble des valeurs possibles de la dissimilarité exacte du couple (x, y) . On peut par conséquent généraliser la méthode de positionnement multidimensionnel classique, en considérant toutes les configurations de points générées par l'ensemble des valeurs précises de dissimilarités des $\bar{\delta}(x, y)$, conjointement sur tous les couples d'objets $(x, y) \in X \times X$. Chaque objet est alors représenté non plus par un seul, mais par un ensemble de points.

C'est ce principe que les deux auteurs ont appliqué, mais en réduisant la complexité du problème. Ils considèrent en effet que ces ensembles de points sont assimilables à des hypersphères, caractérisées par la position de leur centre, et la valeur de leur rayon représentative d'une quantité d'imprécision. A tout couple d'objets (x, y) correspondent donc deux hypersphères de l'espace de dimension p , dont la distance imprécise doit approcher au plus près l'intervalle de dissimilarité $\bar{\delta}(x, y)$. Cette distance imprécise est définie comme l'intervalle constitué de l'ensemble des distances entre tout point de l'hypersphère de x , et tout point de celle de y . Le critère d'optimisation proposé consiste alors à mesurer les erreurs quadratiques entre les bornes des distances et des dissimilarités imprécises. L'interprétation des positions relatives entre deux hypersphères est assez intuitive : un chevauchement renvoie à une borne inférieure de dissimilarité nulle ; d'autre part, le rayon d'une hypersphère s'interprète comme la quantité d'imprécision présente sur l'ensemble des dissimilarités de l'objet correspondant.

Comme dans la méthode de positionnement multidimensionnel classique, les représentations graphiques des objets sont généralement proposées en deux dimensions, ce qui consiste à projeter les n hypersphères de dimension p sur des plans : les objets sont alors représentés par des cercles.

Masson et Dencœur généralisent ensuite cette approche à des dissimilarités floues $\tilde{\delta}(x, y)$, associées à tout couple d'objets (x, y) . En appliquant le principe d'extension, ils procèdent par α -coupes, en considérant que les coupes correspondantes des dissimilarités floues sont des intervalles : pour tout α , il est donc possible de représenter chaque objet par une hypersphère, selon le processus précédemment décrit. Mais pour assurer l'homogénéité des représentations, ils imposent la contrainte suivante : sur toutes les α -coupes, les hypersphères associées à un objet donné sont concentriques ; il s'agit donc d'hypersphères floues. Ils montrent en effet que ces hypersphères sont imbriquées, puisque pour des α croissants, les intervalles de dissimilarité se font plus précis, et les rayons des hypersphères correspondantes par conséquent plus petits. Dans la variante rapportée sous le nom de « modèle des moindres carrés », pour un ensemble d' α -coupes $\{\alpha_1 < \dots < \alpha_c\}$ donné, Masson et Dencœur montrent qu'un algorithme de descente de gradient permet de calculer les coordonnées C des centres des n hypersphères floues, ainsi que leurs $n \times c$ rayons correspondants (on note ${}^{\alpha_k}r_x$ le rayon de la coupe α_k de l'hypersphère floue associée à l'objet x).

On représente les résultats comme précédemment, en procédant par projection sur des plans. Pour un plan donné, si l'on affiche simultanément les c α -coupes de chaque hypersphère floue, tout objet x sera ainsi représenté par c cercles concentriques, de rayons $\alpha_k r_x, \forall k \in \{1, \dots, c\}$.

3.1.2 Méthode de positionnement multidimensionnel imprécis sphérique

Le choix d'un espace non euclidien conduit à une autre forme de positionnement multidimensionnel. Ainsi la méthode de positionnement multidimensionnel sphérique classique [9] consiste à représenter chaque objet par un point sur une hypersphère de dimension p , de sorte que les angles entre les points traduisent les dissimilarités correspondantes. Cette représentation sphérique est particulièrement bien adaptée aux données présentant des dissimilarités bornées, pour lesquelles les bornes minimales et maximales renvoient à une opposition intéressante : par exemple, les corrélations [51], comme dans la représentation des variables de l'ACP.

Considérons le cas d'une représentation sur une hypersphère \mathcal{S} de dimension p . Il s'agit d'associer à chaque objet $x \in X$ un point de \mathcal{S} , que l'on appelle x pour simplifier. On note $C = (c_x)$ la matrice contenant les coordonnées polaires de l'ensemble des points. Chaque point x est caractérisé par ses coordonnées polaires $c_x = (\theta^1(x), \dots, \theta^{p-1}(x))$, où $\theta^1(x) \in [0, 2\pi]$ et $\theta^q(x) \in [0, \pi] \forall q > 1$. A chaque couple d'objets (x, y) , on fait correspondre l'angle $\beta_C(x, y)$, mesuré dans le plan défini par le centre de l'hypersphère et les deux points x et y . On peut alors traduire la proximité entre les points x et y de la façon suivante (produit scalaire entre les vecteurs \vec{Ox} et \vec{Oy} , où O désigne le centre de l'hypersphère de rayon unité) :

$$D_C(x, y) = \cos(\beta_C(x, y)) \in [-1, 1].$$

Cette mesure est particulièrement adaptée au cas où les proximités entre objets sont déterminées par une matrice de corrélation δ . On peut alors utiliser le critère de stress classique de la méthode de positionnement multidimensionnel euclidien.

Sur la figure 4.4, p. 127, on donne un exemple de représentation sphérique, dans le cas d'une représentation sur un cercle ($p = 2$) : chaque objet x est alors caractérisé par un unique angle $\theta(x) \in [0, 2\pi[$. L'angle $\beta_C(x, y) = \theta(x, y)$ traduit alors la distance entre les représentations des objets x et y , et vise à approximer la dissimilarité $\delta(x, y)$.

Nous proposons une généralisation pour le traitement de données floues. On considère des dissimilarités exprimées sous forme de nombres flous, qu'il est possible, comme dans le cas euclidien, d'envisager sous la forme d'un couple de tableaux de dissimilarités classiques minimale et maximale, associés à chaque α -coupe considérée ($\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$). On représente alors chaque objet $x \in X$ par un point de coordonnées polaires c_x situé sur l'hypersphère, que l'on complète, pour chaque α_i , d'un degré d'incertitude $\alpha_i r_x$.

Dans le cas euclidien, l'imprécision de la situation d'un objet par rapports aux autres pour une coupe quelconque est rendue grâce à sa mise en correspondance avec un *point imprécis*, défini comme l'ensemble de points de l'espace euclidien identiquement représentatifs de l'objet considéré. Par commodité, Masson et Denœux l'ont caractérisé par une hypersphère dont le rayon est fonction monotone de l'imprécision.

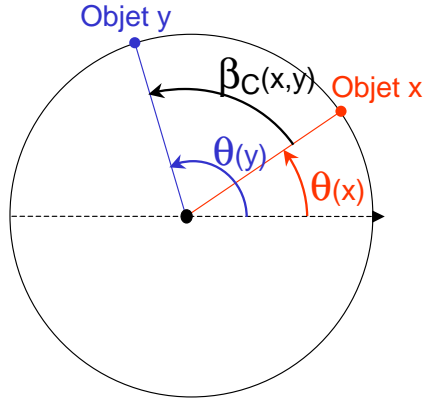


FIG. 4.4 – Positionnement multidimensionnel sphérique en dimension 2

Dans le cas sphérique, nous proposons d’exploiter cette même notion de *point imprécis*, adaptée à l’espace sphérique : nous imposons ainsi que l’ensemble de points représentatifs d’un objet soit inclus dans la surface (notée \mathcal{S}') de l’hypersphère de représentation \mathcal{S} . Le plus simple est sans doute de définir cet ensemble comme une *calotte hypersphérique*, soit un ensemble caractérisé par un point x de \mathcal{S}' , et un angle d’incertitude $r_x \in [0, \pi]$:

$$\{y \in \mathcal{S}' / \theta(x, y) \leq r_x\},$$

où $\theta(x, y)$ désigne l’angle entre les points x et y dans le plan passant par les points x, y et le centre O de \mathcal{S} . Une calotte hypersphérique de sommet x et d’angle minimal ($r_x = 0$) correspond au point x , alors que celle d’angle maximal ($r_x = \pi$) correspond à l’espace entier de représentation : la surface de l’hypersphère de dimension p .

Pour $p = 2$ (cas du cercle) avec des intervalles classiques, on obtient la représentation présentée en figure 4.5, p. 128. Les calottes hypersphériques sont alors des arcs de cercle. Pour $p = 3$ (cas de la sphère), on les représente à travers leur projection sur un plan : des ellipses, ou des espaces délimités par un arc d’ellipse (projection d’un arc du cercle constituant la base de la calotte hypersphérique) et le cercle de corrélation (c’est-à-dire la projection de l’hypersphère \mathcal{S}).

3.1.3 Analyse en composantes principales floue

Masson et Denœux ont également étendu l’ACP [14] présentée dans le chapitre 1. Les données consistent en un tableau $n \times p$ de nombres flous, caractérisant de façon imprécise n individus selon p variables. L’objectif est de fournir une représentation synthétique de ces n individus, à travers un tableau réduit de nombres flous de dimension $n \times q$ avec $q < p$. Bouillard et Kamp [3] ont montré que l’ACP pouvait être calculée sans diagonalisation explicite de matrice, à l’aide d’un perceptron autoassociatif. Masson et Denœux proposent d’étendre cette technique de calcul au flou pour définir les composantes principales floues du tableau initial.

L’interprétation est rigoureusement identique : les données initiales sont représentables dans un espace de dimension p par n hyperrectangles flous. Et ceux-ci sont alors virtuelle-

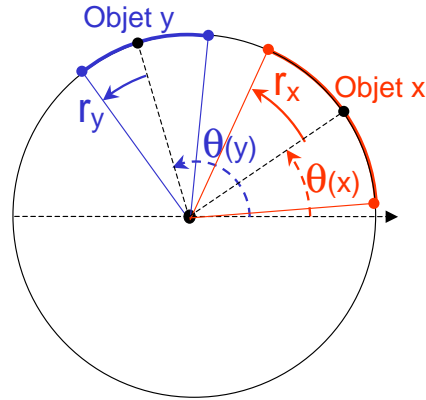


FIG. 4.5 – Positionnement multidimensionnel sphérique imprécis en dimension 2

ment projetés dans un sous-espace, de façon à constituer n nouveaux hyperrectangles de dimension réduite, dont les projections sur chacun des axes d’inertie dégagés définissent des nombres flous, coordonnées synthétiques des individus. Dans chaque plan de représentation, les objets sont donc représentés par des rectangles emboîtés correspondant aux α -coupes de leurs coordonnées.

Les auteurs proposent un algorithme de calcul des composantes principales pour des nombres flous trapézoïdaux. Enfin, les corrélations entre les composantes principales et les variables initiales peuvent être calculées grâce à la corrélation de mesures floues proposée par Liu et Kao [35].

Cazes *et al.* [7] a proposé une extension de l’ACP à des données de type intervalle, directement généralisable au traitement d’intervalles flous. Chacun des n individu est décrit, pour chacune des p variables, par un intervalle de valeurs. La représentation initiale des individus consiste donc en un ensemble de n hyperrectangles de dimension p . Les auteurs décrivent deux variantes, la *méthode des sommets* et la *méthode des centres*. La première consiste à associer à chaque individu l’ensemble des sommets de l’hyperrectangle le caractérisant, au nombre de 2^p dans un espace de dimension p . L’ACP est ensuite réalisée sur la matrice constituée des coordonnées des sommets de l’ensemble des individus, de taille $n2^p \times p$. Puis, pour chacun des individus, l’intervalle de composantes principales de chaque axe factoriel est défini à partir des valeurs inférieures et supérieures des composantes principales des sommets de son hyperrectangle sur l’axe considéré.

La seconde méthode, dite *méthode des centres*, est plus appropriée lorsque le nombre p de variables devient important, car moins coûteuse en calculs. L’ACP est en effet réalisée sur les coordonnées des centres des hyperrectangles. Les composantes principales de chaque individu pour tout axe factoriel sont ensuite définies comme l’intervalle de valeurs parcourues par la projection de tout point de son hyperrectangle sur l’axe considéré. Mais ce parcours est en pratique inutile, puisque ces bornes peuvent être directement calculées à partir d’une formule très simple.

L’avantage de ces deux méthodes sur celle proposée par Masson et Denceux réside dans sa capacité à déterminer les axes principaux de la représentation finale. Or, il sera intéressant pour nous de confronter les axes factoriels de la représentation multidimensionnelle

des produits de la méthode relationnelle floue avec ceux obtenus par la méthode classique, sur des données nettes. Ensuite, entre la *méthode des centres* et la *méthode des sommets*, nous optons pour la première, compte tenu de sa faible complexité. L'extension au flou de la méthode sera menée en réalisant l'ACP sur n points de l'espace de dimension p : à chaque individu, on associe en effet le point du noyau de son hyperrectangle flou, situé au plus près de la moyenne des centres des α -coupes de son hyperrectangle flou.

la moyenne des centres des hyperrectangles sur l'ensemble des α -coupes.

3.2 Représentations mono-descripteur

Généralement, l'étude de profils sensoriels s'échelonne en deux étapes successives. Les profils de chaque descripteur sont d'abord étudiés indépendamment, puis une analyse multi-descripteurs permet de synthétiser l'information de discrimination exprimée sur l'ensemble des descripteurs.

La première étape d'analyse mono-descripteur a pour but de rendre compte des discriminations exprimées individuellement par les juges, de fournir une représentation consensuelle des produits, et de qualifier les performances de chacun en terme de discrimination, répétabilité et consensus.

3.2.1 Représentation des produits

Dans l'analyse mono-descripteur d'un juge donné, on représente le descripteur au travers des rapports entre produits exprimés par le juge. Or ceux-ci sont synthétisés par un triplet de relations floues noté (D, I, C) :

- la relation de dominance stricte D , elle-même décomposable en une *dominance stricte explicite* D^E , et une *dominance stricte implicite* D^I (cf. section 3.5, chap. 3, p. 97) ;
- la relation de conflit C , qu'il est également possible de décomposer en un *conflit explicite* C^E , soit la part de conflit exprimée directement par le juge, et son complémentaire, le *conflit implicite* C^I ;
- la relation d'indiscernabilité I .

Cette partition de l'espace $X \times X$, où X dénote l'ensemble des n produits, se prête à une représentation graphique simple. Dans un tableau de taille $n \times n$, dont chaque case représente un couple de produits $(x, y) \in X \times X$, il est en effet possible de diviser chaque case en cinq espaces correspondants aux cinq sous-relations décrites, de sorte que les aires de ces espaces soient proportionnelles aux degrés d'appartenance du couple représenté. Ces degrés, pour chaque couples $(x, y) \in X \times X$ sont en effet complémentaires à 1.

Pour faciliter la lecture d'un tel tableau, les cases sont divisées selon quatre barres horizontales délimitant cinq espaces rectangulaires, coloriés chacun d'une couleur distincte. De haut en bas, voici les couleurs attribuées :

- le *rouge* code le conflit ; une teinte plus foncée permet de distinguer le conflit déduit de celui initial, mais elle n'apparaît que très rarement ;
- le *bleu* code la dominance stricte ; là encore, une teinte plus foncée permet de distinguer la dominance stricte déduite, assez rare ; la relation étant anti-symétrique, son

inverse est représentée par le *blanc* : ainsi, la case (x, y) , $x \neq y \in X$ a une composante bleue, si et seulement la case (y, x) a une composante blanche de même surface ;

- le *vert* code l’indiscernabilité ; on note que la diagonale du tableau est emplie de *noir* alors qu’il s’agit d’indiscernabilité : cette diagonale n’apportant aucune information, la couleur *noire* constitue simplement un repère du tableau.

Enfin, les produits sont réordonnés par ordre dominance croissante $\sum_{y \in X} D(x, y)$, de sorte qu’une discrimination totale entre produit se traduise par un demi-tableau supérieure gauche totalement bleu (à l’exception de la diagonale).

On désignera ce tableau par le terme de *représentation relationnelle*. Dans le cadre de ce mémoire, on complétera la représentation de la relation issue de l’agrégation des évaluations d’un juge, par un graphe de suivi des mesures sur les répétitions.

Sur la figure 4.6, p. 131, on a représenté le cas du juge 10 pour le descripteur *opaque*. Les répétitions d’un même juge sont agrégées avec un opérateur *owa* proche du max (de degré de disjonction $\rho = 0.2$). Et la taille de nombre flou optimale est déterminée suivant la technique exposée dans la section 4, chap. 3, p. 98.

- En haut figure le suivi des notes : chacun des 3 axes horizontaux correspond à une répétition (la première étant située en bas), et chaque produit est représenté sur chacun des axes par un point d’abscisse égale à la mesure attribuée, l’étiquette mentionnant l’indice du produit ;
- En bas se trouve le tableau couleur représentatif des relations exprimées par le juge ;
- Entre deux et au milieu, deux intervalles centrés et emboîtés représentent le support et le noyau du nombre flou optimal utilisé ; les demi-intervalles situés aux extrémités rendent compte de l’utilisation de l’*effet règle* (cf. section 1.2.3, chap. 3, p. 71), soit d’une pondération des tailles d’intervalles en fonction de leur position sur la règle ; ici, les intervalles ont en particulier une pondération neutre (égale à 1) au centre de la règle, et de 0.1 aux extrémités.

Globalement, la présence manifeste d’espaces verts et rouges traduit une discrimination incomplète du juge. Ainsi les couples de produits $(8, 7)$ et $(1, 4)$, marqués de *vert* n’apparaissent pas complètement discriminés, les notes étant estimées trop proches pour être significatives. Quant à l’ensemble de produits $\{6, 5, 2, 3\}$, empreint de *rouge*, il semble que ses mesures aient été assez conflictuelles. En particulier, on constate que les mesures des produits 2 et 3 ont été largement inversées au cours des répétitions 1 et 3.

Un résumé sommaire consisterait à souligner la présence de trois groupes mutuellement discriminés :

$$\{1, 4\} \succ \{6, 5, 2, 3\} \succ \{7, 8\}.$$

En mono-descripteur, l’approximation de la relation de dominance stricte par un ordre d’intervalles flou ne s’impose pas : la perte d’information ne doit en effet se justifier que par un gain de qualité de représentation. Or, le tableau couleur représentant le descripteur nous semble suffisamment explicite.

Après l’analyse individuelle, on peut conduire une agrégation des relations exprimées par l’ensemble des juges. On présente en figure 4.7, p. 131, le consensus obtenu pour le

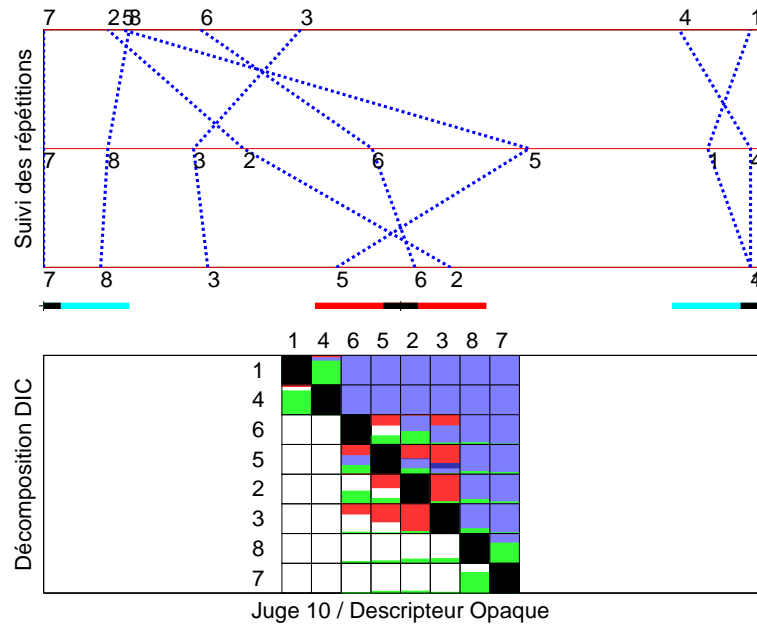


FIG. 4.6 – Descripteur Opaque, Juge 10

descripteur *opaque* avec un *owa* égal à l'opérateur *moyenne* : tous les juges ont donc une influence égale sur le résultat. Il peut être préférable d'éliminer des juges trop conflictuels ou discordants, de manière à améliorer la qualité du consensus. On note que préalablement à l'agrégation, la différenciation entre conflit et indiscernabilité a été éliminée (passage en indiscernabilité), de façon à ce que le conflit résultant de l'agrégation des juges marque leur désaccord. Celui-ci apparaît essentiellement entre les produits $\{6, 5, 3\}$, ce qui conforte la non-discrimination marquée par le juge 10. En revanche, cet ensemble de produits, selon le consensus, domine le produit 2.

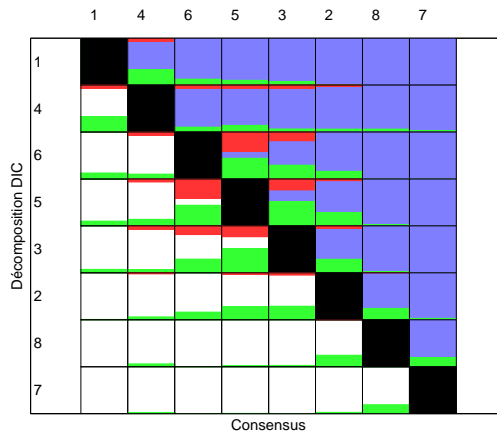


FIG. 4.7 – Descripteur Opaque, Consensus

3.2.2 Performances des juges

Comme on l'a rappelé, ces performances concernent les qualités de discrimination, de répétabilité et de consensus.

Les deux premières, discrimination et répétabilité, peuvent être étudiées en fonction des notions de dominance stricte, indiscernabilité, conflit, de la façon suivante :

- la *dominance stricte* désigne la part de discrimination consistante exprimée par le juge ; une grande proportion de dominance stricte, mesurée grâce à l'opérateur Q^D présenté dans le chapitre précédent (cf. 4.1, chap. 3, p. 98), témoigne d'une réelle qualité de l'évaluation du juge : à la fois discriminante et sans conflit ; c'est une performance de *discrimination* ; cependant, le terme de performance n'est pas tout-à-fait adéquat : une faible valeur de Q^D ne signifie pas une défaillance, car il faudrait pour cela préjuger des résultats attendus du juge ; de même, une valeur forte n'est pas nécessairement une marque de qualité : le juge peut ne pas avoir bien compris le descripteur, et conduire son évaluation selon un critère qui lui est propre ;
- l'indicateur de *conflit*, Q^C , rend compte des conflits effectués par le juge ; il sanctionne des évaluations incohérentes, et mesure donc une performance de *répétabilité* ;
- l'indicateur d'*indiscernabilité* Q^I ne traduit pas exactement une défaillance de *discrimination* ; l'indiscernabilité affecte les produits que les mesures attribuées par le juge ne permettent pas de discriminer clairement ; une forte valeur de Q^I ne devrait être considérée comme dépréciative, que si l'*individu moyen* est censé pouvoir les discriminer.

Un autre paramètre joue un rôle important : la taille du nombre flou utilisé, qui rend compte de l'*imprécision* du juge. Ce paramètre mesure une performance du juge, puisque plus il est élevé, plus il masque une quantité importante de conflit : mais il s'agit d'un conflit autorisé, car l'imprécision du juge est supposée légitime. Par conséquent, il ne doit pas être considéré comme une performance. Une imprécision aberrante implique une faible discrimination, et la mesure de l'imprécision n'apporte donc pas d'information supplémentaire.

On note qu'une erreur dans l'estimation de l'imprécision (soit la taille des nombres flous) déplace nécessairement la frontière entre conflit et indiscernabilité. Pour exploiter cette différenciation de la non-discrimination, il faut donc supposer juste l'estimation de l'imprécision. Nous le ferons couramment, mais pas au point d'attribuer à chacune des deux relations I et C , la même pertinence que D .

Sur la figure 4.8, p. 133, on a représenté, pour le descripteur *opaque*, les variations des indicateurs de performance (Q^D en bleu, Q^I en vert, et Q^C en rouge) en fonction de la taille du nombre flou utilisé (seule la taille est modifiée, le rapport entre taille du support et taille du noyau étant constant). Sur cette figure, les nombres flous qui déterminent la taille optimisée sont indiqués par une verticale bleue hachurée. On constate régulièrement un léger décalage avec le maximum de dominance, car en cas de pallier horizontal au niveau du maximum, nous recherchons la taille définissant sa borne maximale. Le critère du maximum de dominance a donc été légèrement corrigé : tant que la dominance (approximativement) maximale ne décroît pas, on juge la précision du nombre flou surestimée. On note ensuite que les courbes de dominances strictes suivent bien le schéma voulu : d'abord croissante puis décroissante. En cas de léger pallier au niveau de la valeur maximale, on privilégie

simplement l'imprécision la plus grande.

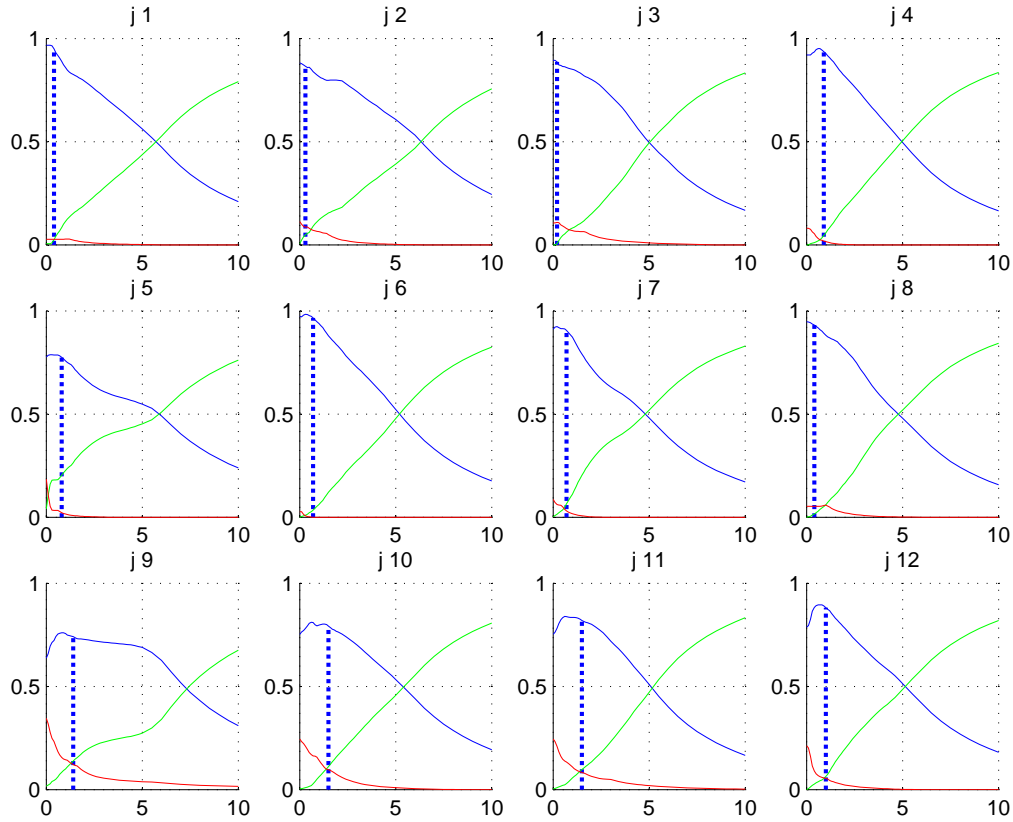


FIG. 4.8 – Indicateurs de dominance du descripteur *opaque* en fonction de la taille du nombre flou choisie, par juge ; les indicateurs Q^D , Q^I et Q^C sont respectivement représentés par les courbes bleue, verte et rouge ; la taille de nombre flou réalisant le maximum de dominance corrigé est indiquée par une verticale bleue en pointillés

Les caractéristiques descriptives retenues sont donc les indicateurs Q^D , Q^I et Q^C , dont la complémentarité à 1 (cf. 4.1, chap. 3, p. 98) permet d'utiliser une représentation en couleur similaire à celle des relations elle-même : on découpe une barre verticale selon deux axes horizontaux de sorte que les surfaces des trois rectangles obtenus soient proportionnelles aux trois indicateurs.

On considèrera que l'indicateur de dominance stricte Q^D mesure une performance de discrimination, et que Q^C mesure l'inverse d'une performance de répétabilité. Quant à l'indicateur Q^I , qui se déduit des deux mesures précédentes, il renseigne simplement sur la qualité de l'information non-discriminante : cohérente ou non.

Sur la figure 4.9, p. 134, on a ainsi représenté les caractéristiques de l'ensemble des juges pour le descripteur *opaque*. On remarque notamment des différences importantes dans leurs parts de dominance stricte : les juges $\{6, 1, 4, 8\}$ marquent une discrimination bien plus complète ou plus consistante que les juges $\{9, 5, 10, 11\}$.

Sur la figure 4.10, p. 134, on a reporté les caractéristiques du consensus. Le conflit révèle la présence de désaccords.

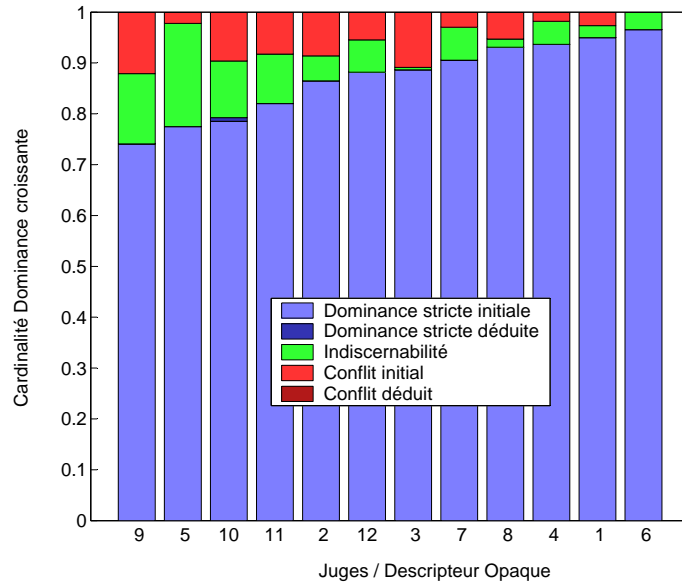


FIG. 4.9 – Descripteur Opaque, Performances des juges

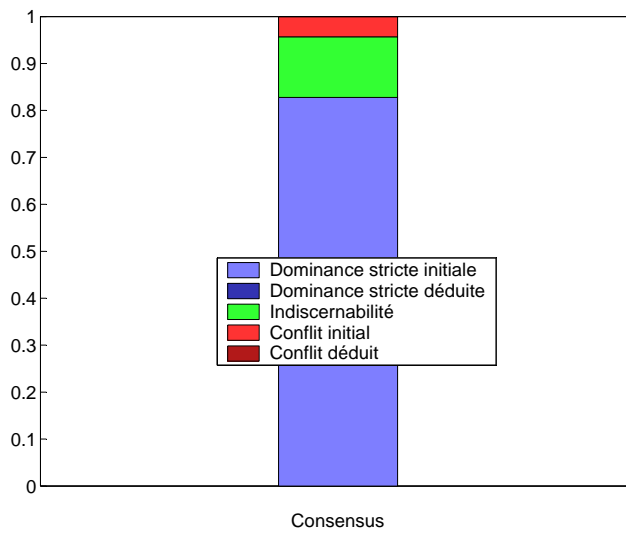


FIG. 4.10 – Descripteur Opaque, Performances du consensus

Il nous reste à caractériser la qualité du consensus, et le caractère consensuel de chacun des juges.

Pour cela, nous calculons les corrélations floues entre les relations floues de dominance stricte des différents juges, complétées par la relation issue de l'agrégation des juges. Ces corrélations sont ensuite représentées sur un plan grâce à un positionnement multidimensionnel euclidien imprécis.

Cependant cette méthode requiert une relation floue de dissimilarité. Or les corrélations floues sont signées. On les transforme en dissimilarités par la simple application linéaire transformant l'intervalle la corrélation minimale -1 en la dissimilarité maximale 1 , et la corrélation maximale 1 en la dissimilarité minimale 0 .

La figure 4.11, p. 136 montre la représentation des coupes $\{0.65, 0.80\}$ des dissimilarités floues entre relations floues. L'erreur d'approximation est représentée en figure 4.12, p. 136. Elle est relativement faible, et la représentation est donc interprétable. Des niveaux de coupes plus faibles peuvent être utilisés de façon à montrer des recouvrements plus larges des cercles de dissimilarités, mais à cette précision, on observe déjà un fort consensus. En effet, à l'exception du juge 9, l'ensemble des relations exprimées ont une distance minimale assez faible (l'échelle de la figure couvrant moins d'une moitié de $[0, 1]$). Si, de plus, on écarte les juges 12, 5, 3 et 4, les recouvrements deviennent très systématiques.

En plus des douze juges, on a représenté la relation issue de leur agrégation, étiquetée C . On note qu'en dépit d'un indicateur Q^D relativement élevé (que les cercles de faible dimensions signalent), elle est très proche d'un groupe de cinq juges : 7, 1, 8, 6 et 10. Cela tend à conforter la pertinence de la relation de consensus obtenue.

Comme alternative à la méthode de positionnement multidimensionnel euclidien, dont l'interprétation nécessite l'appréciation de l'échelle, on peut préférer sa version sphérique, où les cosinus des angles rendent directement compte des corrélations minimales et maximales entre relations.

Nous disposons d'un algorithme permettant de calculer et représenter le positionnement multidimensionnel sphérique en trois dimensions. La figure 4.13, p. 137 présente l'erreur d'approximation, qui se trouve être généralement supérieure à celle de la version euclidienne en deux dimensions. Cependant, la représentation sphérique reste fréquemment exploitable, comme dans ce cas. Le plan $(1, 2)$ (cf. figure 4.14, p. 137) ne facilite pas l'identification des juges, puisque toutes les projections se situent globalement au même endroit, sur le cercle de corrélation. Cela signifie cependant qu'un positionnement multidimensionnel circulaire aurait suffi, et que les angles du plan $(1, 2)$ sont égaux aux corrélations approchées. Sur la figure 4.15, p. 138, le plan $(2, 3)$ n'apporte aucune information sur les corrélations, mais permet de distinguer plus nettement les juges consensuels.

De même qu'avec la représentation euclidienne, on remarque que le juge 9 est le moins consensuel, avec ensuite les juges 12, 5, 4 et 3. Les juges les plus proches de la relation consensuelle marquée C , sont les juges 7, 1, 8, 6, 10, et 2. Seul le juge 2 n'avait pas été reconnu comme fortement consensuel dans la représentation euclidienne, mais à tort : en effet, sur la figure 4.11, p. 136, le centre des deux cercles attribués à ce juge est un peu plus éloigné de C que les autres, mais leurs rayons plus importants compensent largement cette distance.

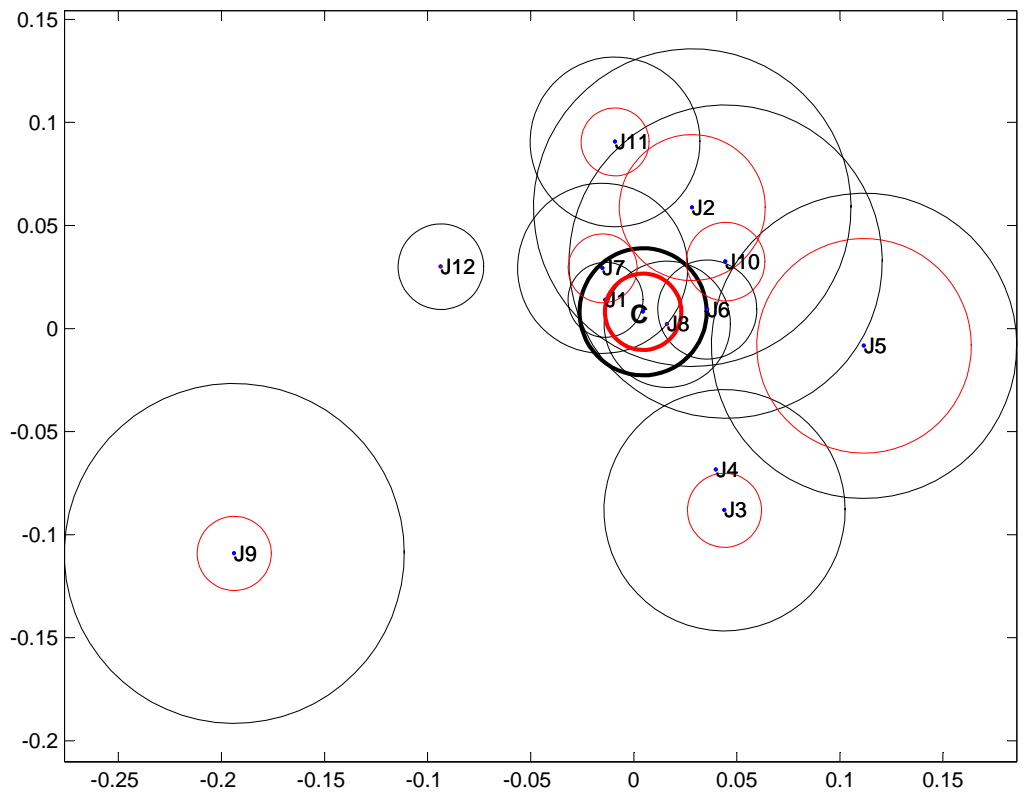


FIG. 4.11 – Représentation euclidienne du consensus sur le descripteur Opaque

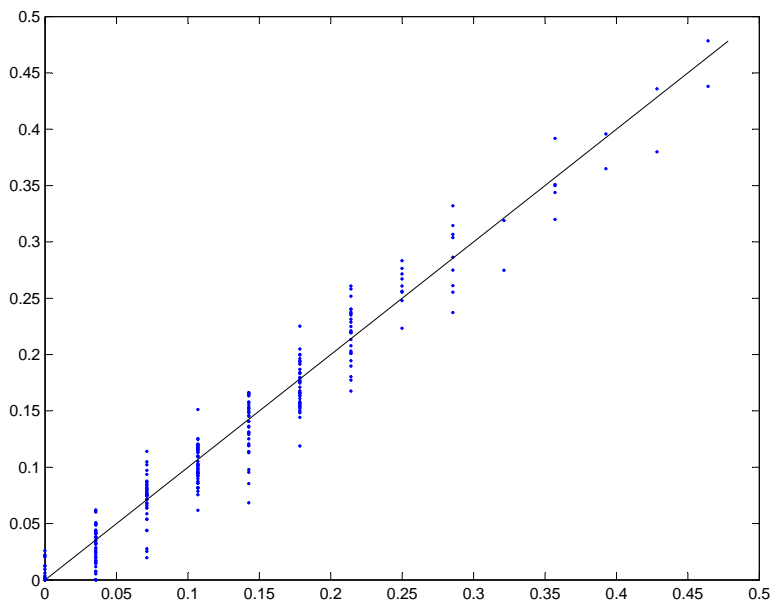


FIG. 4.12 – Erreurs d'approximation sur la représentation euclidienne du consensus du descripteur Opaque

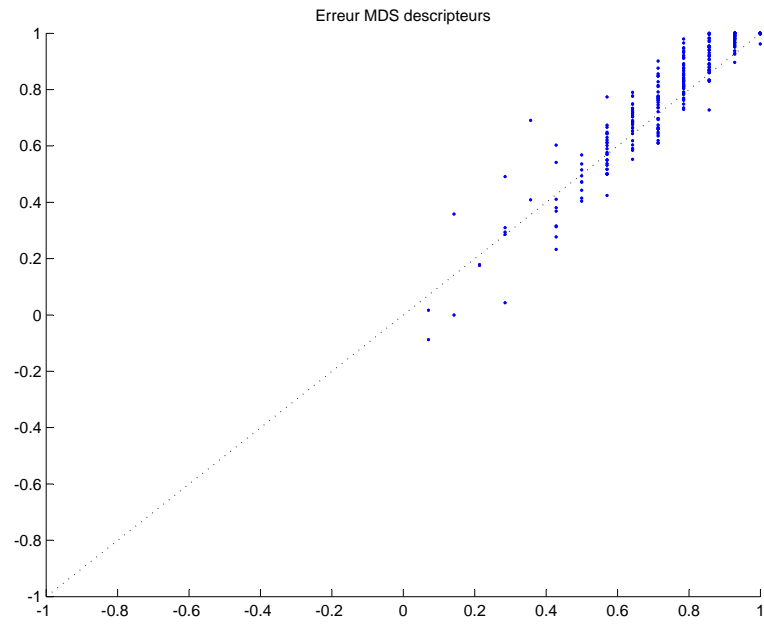


FIG. 4.13 – Erreurs d’approximation sur la représentation sphérique du consensus du des-

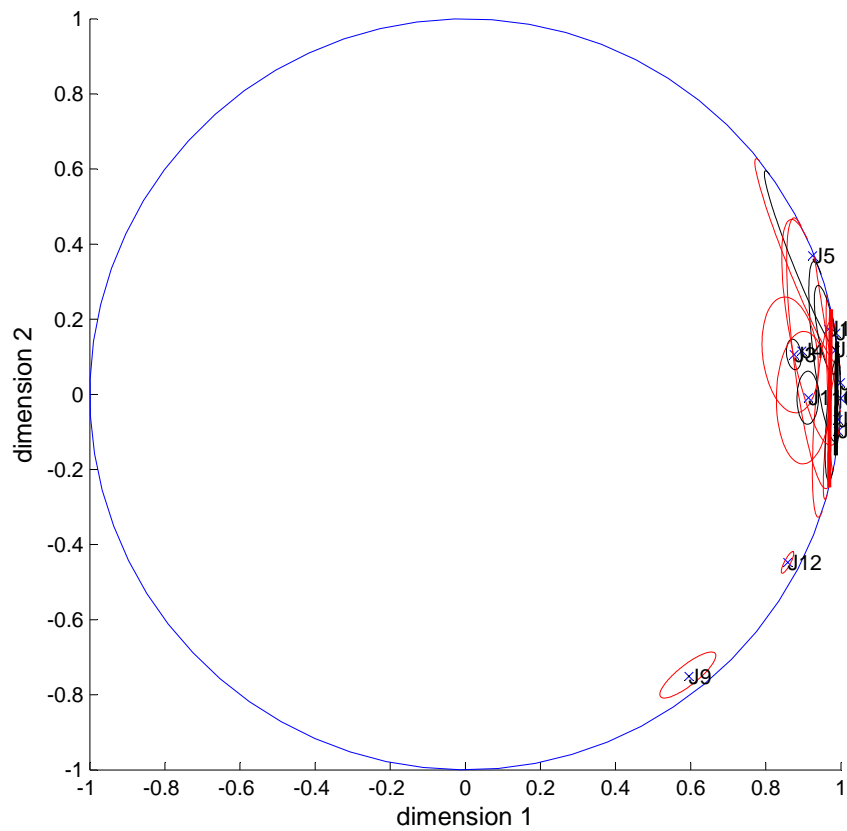


FIG. 4.14 – Plan (1,2) de la représentation sphérique du consensus sur le descripteur Opaque

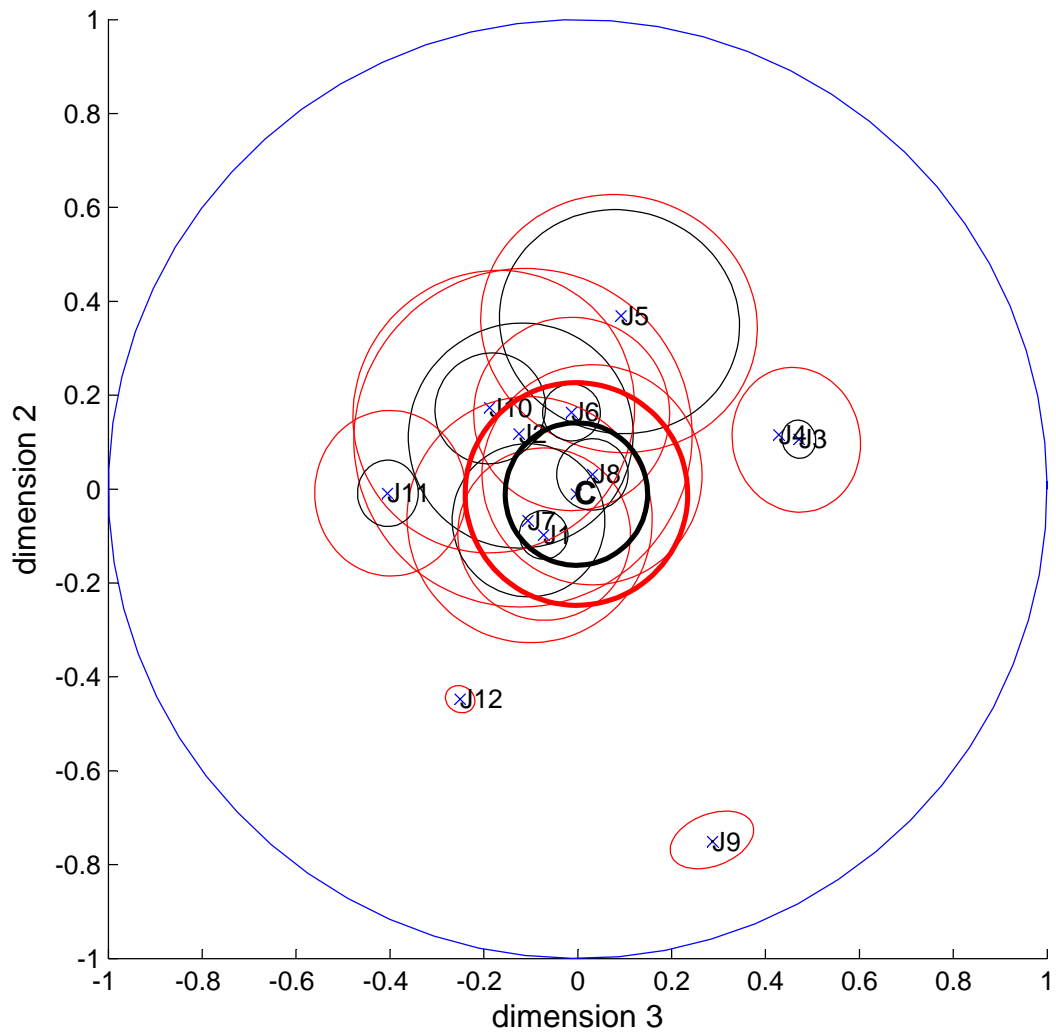


FIG. 4.15 – Plan (2,3) de la représentation sphérique du consensus sur le descripteur Opaque

Dans le cas d'erreurs d'approximations trop conséquentes, euclidiennes ou sphériques, il est toujours possible de recourir aux corrélations floues elles-mêmes, que l'on peut afficher dans un tableau $J \times J$ (où J désigne le nombre de juges).

3.3 Représentations multi-descripteurs

L'objectif est d'obtenir une représentation synthétique des produits, qui se prête à une interprétation en fonction des descripteurs. D'autre part, on souhaite également analyser les corrélations inter-descripteurs.

3.3.1 Représentation des produits

La construction d'une représentation multi-descripteurs des produits est rendue possible grâce à l'approximation des relations consensuelles de dominance stricte de chacun des descripteurs, par des ordres d'intervalles flous. En effet, toute α -coupe d'un ordre d'intervalles flou peut être représentée sur un axe, par attribution d'un intervalle de pseudo-rangs à chacun des produits. De cette manière, les approximations des dominances strictes consensuelles des huit descripteurs sont représentées dans un espace de dimension 8, en affectant un hyperrectangle à chacun des produits. Une analyse en composantes principales sur des données intervalles permet ensuite de synthétiser la représentation, en privilégiant les axes de plus forte inertie, sur lesquels on espère une bonne discrimination des produits.

La première étape consiste donc à approximer l'ordre partiel flou propre à chaque descripteur par une relation d'ordre d'intervalles floue, pour ensuite la réduire à l'une de ses α -coupes. Cette solution est préférable à celle consistant à approximer une α -coupe particulière de l'ordre partiel flou, car elle permet une gestion plus fidèle de l'imprécision de la relation d'ordre partiel flou.

Nous commençons par vérifier que les approximations des relations consensuelles de chacun des descripteurs n'engendrent pas une erreur trop importante. On note D_i la relation floue consensuelle du descripteur $i \in \{1, \dots, 8\}$, et Q_i son approximation par un ordre d'intervalles. Le critère d'optimisation des Q_i consistant à maximiser leur cardinal flou, de façon à minimiser l'écart entre le cardinal flou de Q_i et celui de la relation D_i correspondante, on peut exprimer cet écart en fonction de l'indicateur de dominance stricte $Q_{D_i}^D$ de D_i , et $Q_{Q_i}^D$ de Q_i . Les valeurs sont reportées dans le tableau 3.3.1, p. 140. On s'aperçoit que toutes ces erreurs sont négligeables.

Chaque relation floue Q_i est ensuite réduite à l'une de ses α -coupes (ici, $\alpha = 0.7$). On peut alors représenter les rapports ordinaux entre produits qui la caractérisent, par le biais de ses intervalles de pseudo-rangs (définis avec un espacement $K_e = 4$). Les figures 4.16, p. 140 et 4.17, p. 140 présentent les plans (1, 2) et (2, 3) de l'analyse en composantes principales imprécises, conduite sur ces intervalles de pseudo-rangs selon la méthode de Cazes *et al.* (*méthode des centres*) décrite dans la section 3.1.3, p. 127.

$Q_{D_i}^D$	$Q_{Q_i}^D$	Erreur $(Q_{D_i}^D - Q_{Q_i}^D)/Q_{D_i}^D$
0.8276	0.8276	0%
0.7106	0.7097	0.12%
0.9043	0.9043	0%
0.7764	0.7748	0.20%
0.8355	0.8332	0.28%
0.8009	0.8009	0%
0.5770	0.5633	2.36%
0.5845	0.5826	0.34%

TAB. 4.1 – Erreur d'approximation des relations *descripteurs* flous par des ordres d'intervalles flous

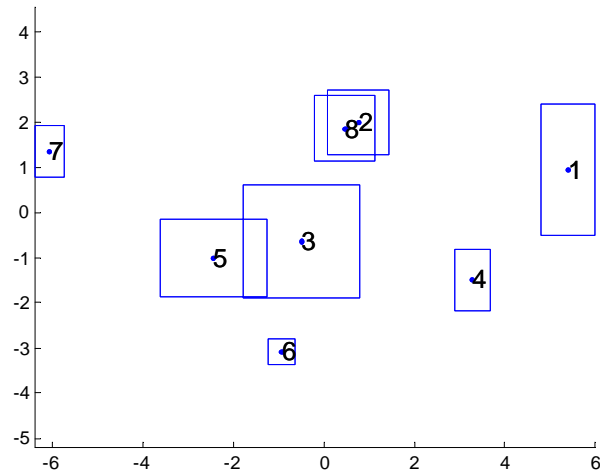


FIG. 4.16 – Plan (1, 2) de l'ACP sur les produits de l'analyse multi-descripteurs

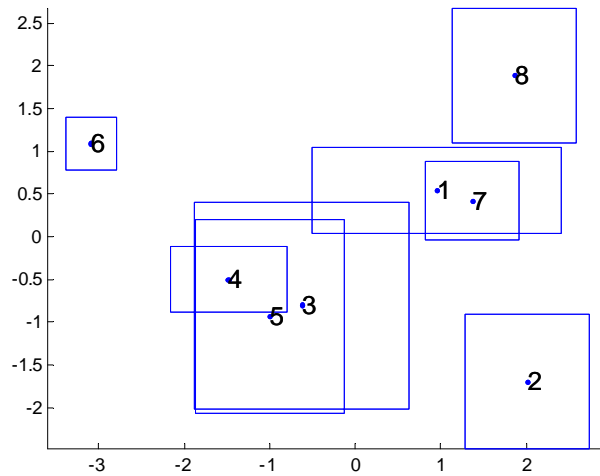


FIG. 4.17 – Plan (2, 3) de l'ACP sur les produits de l'analyse multi-descripteurs

3.3.2 Représentation des descripteurs

On peut représenter les corrélations ordinales floues entre chacun des descripteurs, de la même manière que les corrélations ordinales floues entre les dominances strictes de chacun des juges pour un descripteur donné.

Cependant, il peut être intéressant de compléter cette représentation avec de nouveaux descripteurs, afin d'expliquer la représentation des produits obtenue par l'analyse en composantes principales. Chacun des axes d'inerties dégagés par l'ACP sur les données intervalles induit en effet une nouvelle relation ordinale nette entre produits : après projection sur l'axe, les hyperrectangles caractéristiques de chaque produit peuvent être comparés entre eux, de façon à générer un ordre d'intervalles, que l'on appellera *descripteur sous-jacent*.

On préconise ainsi une interprétation ordinale des projections sur les axes. Une interprétation quantitative serait également envisageable, qui s'accompagnerait d'une mesure de dissimilarité entre descripteurs définie par un intervalle de coefficients de corrélation classique, suivant la méthode de Liu et Kao [35]. Néanmoins il nous semble préférable de poursuivre dans la voie ordinale : de cette manière, les corrélations entre les descripteurs non sous-jacents sont parfaitement indépendantes de la représentation en intervalles de pseudo-rangs choisie, et restent donc fidèles à l'information délivrée par les juges, .

Les corrélations ordinales entre les huit descripteurs initiaux (consensuels) et les trois descripteurs *sous-jacents* correspondant à chaque axe de l'ACP, sont d'abord représentées à l'aide d'un positionnement multidimensionnel euclidien, sur la figure 4.18, p. 142. On peut alors identifier les descripteurs corrélés avec chacun des axes de l'ACP. Les erreurs d'approximation, peu élevées, sont tracées sur la figure 4.19, p. 142.

Une représentation sphérique des corrélations est également intéressante, puisqu'elle met en évidence les oppositions entre les descripteurs anticorrélés, comme ici les descripteurs *opaque* et *nacré*. On constate de nouveau une erreur de représentation un peu plus importante que sur la représentation euclidienne (cf. figure 4.20, p. 143). Les figures 4.21, p. 143 et 4.22, p. 144 montrent les deux plans de représentation des corrélations sphériques inter-descripteurs. Le rôle du paramètre d'espacement K_e intervenant dans la définition des intervalles pseudo-rangs d'un ordre d'intervalles peut être illustré ici : on pourrait montrer que les rapports de distance entre les centres des intervalles de pseudo-rangs sont indépendants de K_e , et donc qu'il en est de même pour l'ACP sur ces centres. En revanche, le rapport entre la taille des intervalles de pseudo-rangs et des distances entre leur centre est fonction décroissante et bornée de K_e . Dans la méthode de Cazes, ce paramètre n'influence donc que la taille des projections des hyperrectangles. Dans une certaine mesure, il est donc possible d'influencer les chevauchements entre les intervalles composantes principales, et par conséquent d'avoir un contrôle global sur le pouvoir discriminant des descripteurs sous-jacents. Avec $K_e = 4$, nous avons ainsi des descripteurs un peu plus précis qu'avec un espacement nul ($K_e = 0$), ce qui facilite leur interprétation par rapport aux descripteurs initiaux. Notons que si, suite à une modification de K_e , deux intervalles composantes principales viennent à se séparer sur un axe sous-jacent, alors les hyperrectangles correspondants sont de toute façon disjoints : il n'y avait pas lieu d'estimer les produits équivalents. Quant à l'équivalence perdue sur l'axe considéré, elle s'explique simplement par notre choix de rendre les descripteurs sous-jacents plus discriminants.

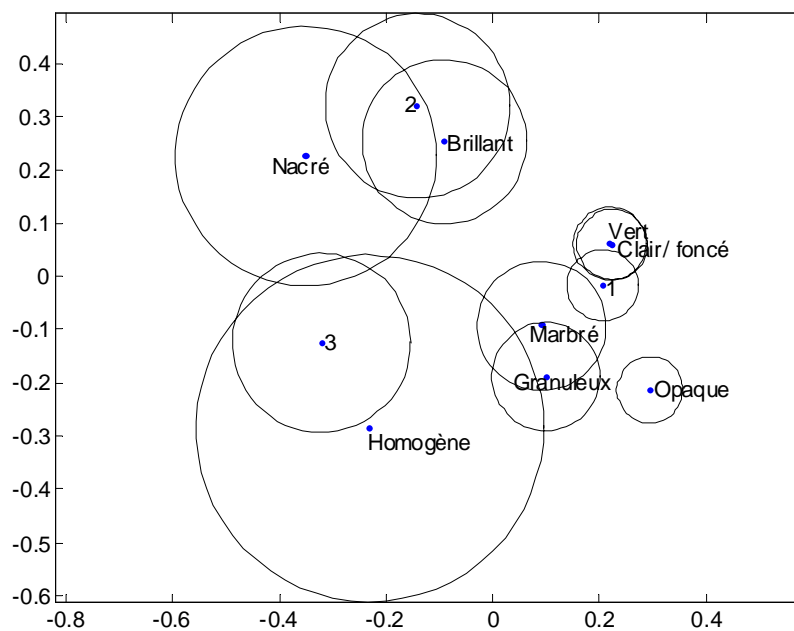


FIG. 4.18 – Représentation euclidienne de la corrélation inter-descripteurs ; en abscisse sont reportées les bornes inférieures et supérieures des intervalles de dissimilarités issues des corrélations inter-juges des deux niveaux de coupe considérés ; à chacune de ces bornes, on associe en ordonnée son approximation mesurée sur la représentation

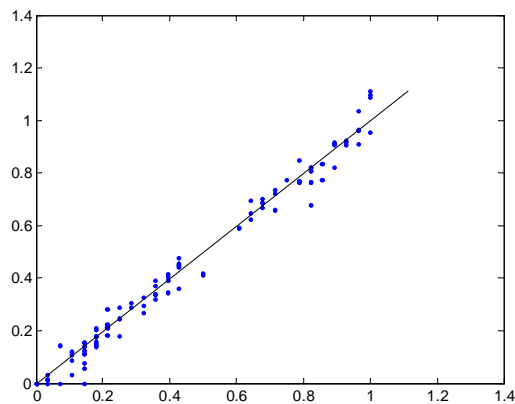


FIG. 4.19 – Erreurs d'approximation sur la représentation euclidienne de la corrélation inter-descripteurs ; en abscisse sont reportées les bornes inférieures et supérieures des intervalles de dissimilarités issues des corrélations inter-juges des deux niveaux de coupe considérés ; à chacune de ces bornes, on associe en ordonnée son approximation mesurée sur la représentation

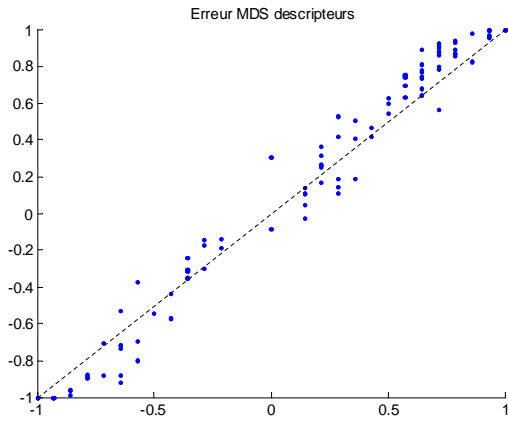


FIG. 4.20 – Erreurs d’approximation sur la représentation sphérique de la corrélation inter-descripteurs ; en abscisse sont reportées les bornes inférieures et supérieures des intervalles de dissimilarités issues des corrélations inter-juges des deux niveaux de coupe considérés ; à chacune de ces bornes, on associe en ordonnée son approximation mesurée sur la représentation

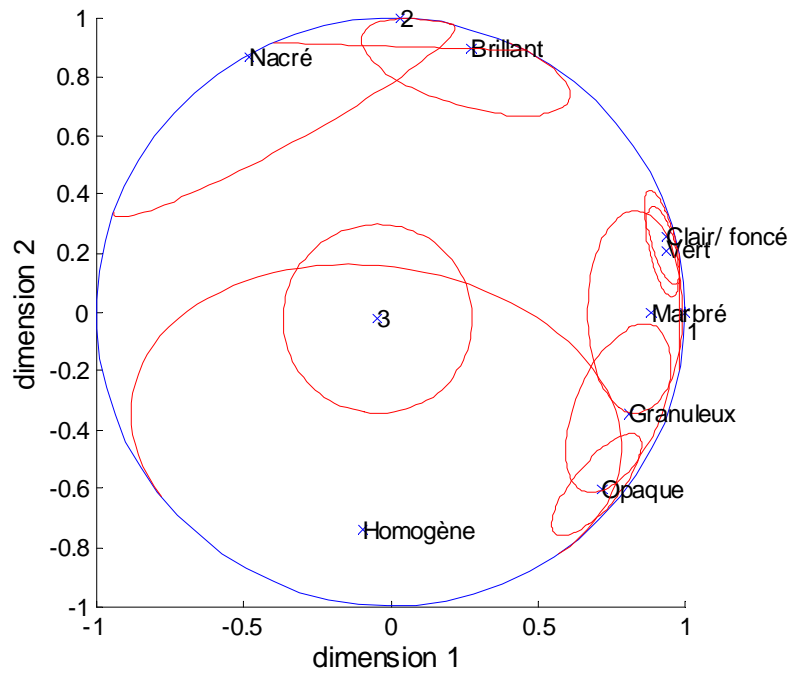


FIG. 4.21 – Plan (1,2) de la représentation sphérique de la corrélation inter-descripteurs

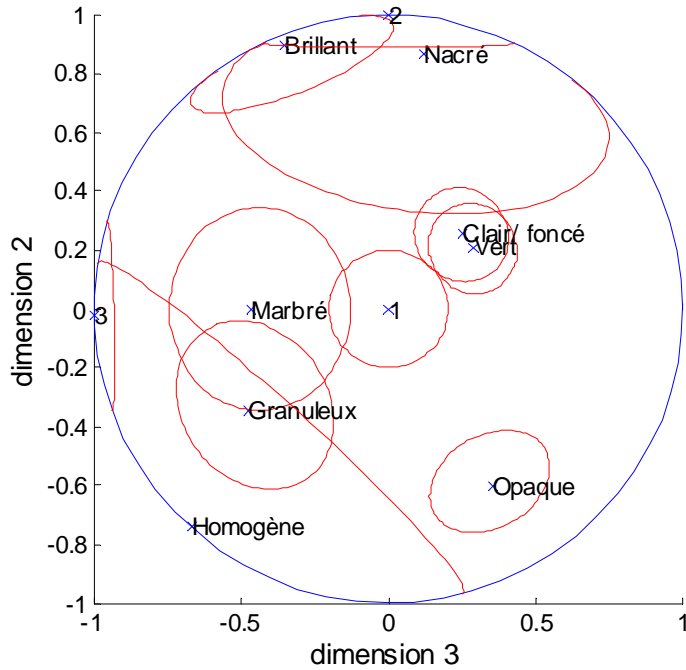


FIG. 4.22 – Plan (2, 3) de la représentation sphérique de la corrélation inter-descripteurs

3.3.3 Performances des juges

Afin de qualifier globalement le comportement des juges, il est possible de moyenner leurs indicateurs de dominance stricte, indiscernabilité et conflit, sur l'ensemble des descripteurs. De même, il peut être intéressant de moyenner sur l'ensemble des juges, les indicateurs de chacun des descripteurs.

On présente ainsi, respectivement sur les figures 4.23, p. 145 et 4.24, p. 145, les indicateurs de performances globaux des juges, puis des descripteurs. On constate ainsi que selon la moyenne de leurs performances sur les descripteurs, les deux juges 9 et 11 se distinguent défavorablement. Leur indicateur de conflit n'est pas beaucoup plus élevé que chez la plupart des autres juges, et c'est leur indicateur d'indiscernabilité qui explique la faiblesse de leur dominance stricte. Dans cette situation où la part d'indiscernabilité est atypique, par rapport à l'ensemble des autres juges, il est légitime de conclure à une défaillance dans la discrimination.

Quant aux performances moyennées sur les juges pour chacun des descripteurs, elles témoignent de différentes qualités de descripteurs : ainsi, le descripteur *vert* apparaît très discriminant, alors que les descripteurs *homogène*, *nacré* et *brillant* le sont beaucoup moins. Cependant, les indicateurs de dominance stricte ne rendent pas seulement compte de la qualité de compréhension des descripteurs : en effet, l'indicateur d'indiscernabilité ne mesure pas nécessairement une défaillance. En revanche, les indicateurs de conflit soulignent bien l'instabilité des mesures de l'ensemble des juges.

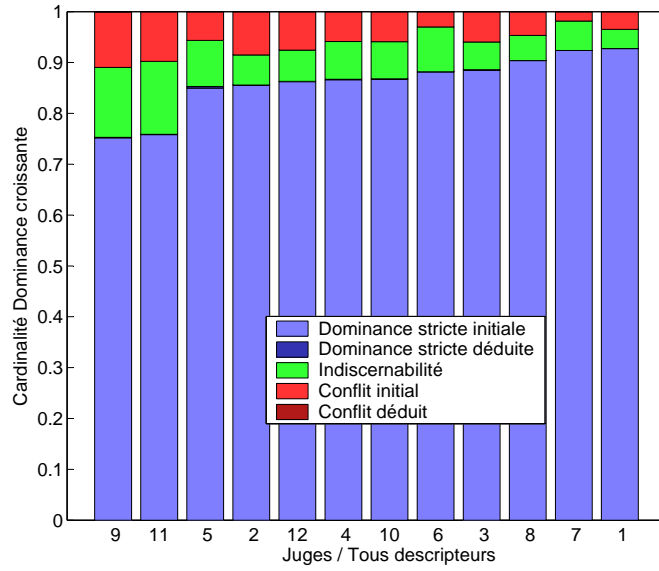


FIG. 4.23 – Indicateurs de performance moyennés sur les descripteurs, par juge

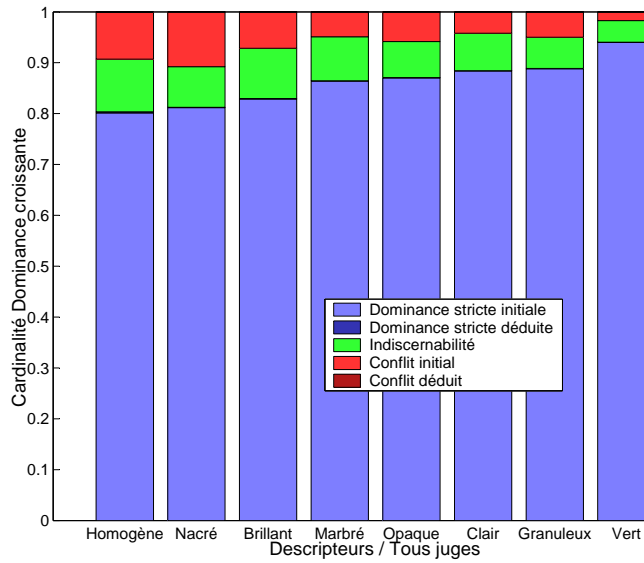


FIG. 4.24 – Indicateurs de performance moyennés sur les juges, par descripteur

4 Bilan de la représentation des relations floues

Nous proposons ici un résumé de l'ensemble des outils de représentation proposés.

Le schéma de la figure 4.25, p. 146 présente les représentations proposées dans le cadre d'une étude mono-descripteur :

- les représentations relationnelles permettent de décrire la manière dont les produits sont perçus par chacun des juges, ainsi que par le panel de juges à travers la relation consensuelle du descripteur ;
- les indicateurs de performances obtenus pour chacun des juges peuvent être présentés sous forme d'un diagramme en bâtons ;
- enfin, l'utilisation d'une méthode de positionnement multidimensionnel flou, sphérique ou euclidien, permet de visualiser les corrélations floues entre les relations de dominance stricte propres à chaque juge.

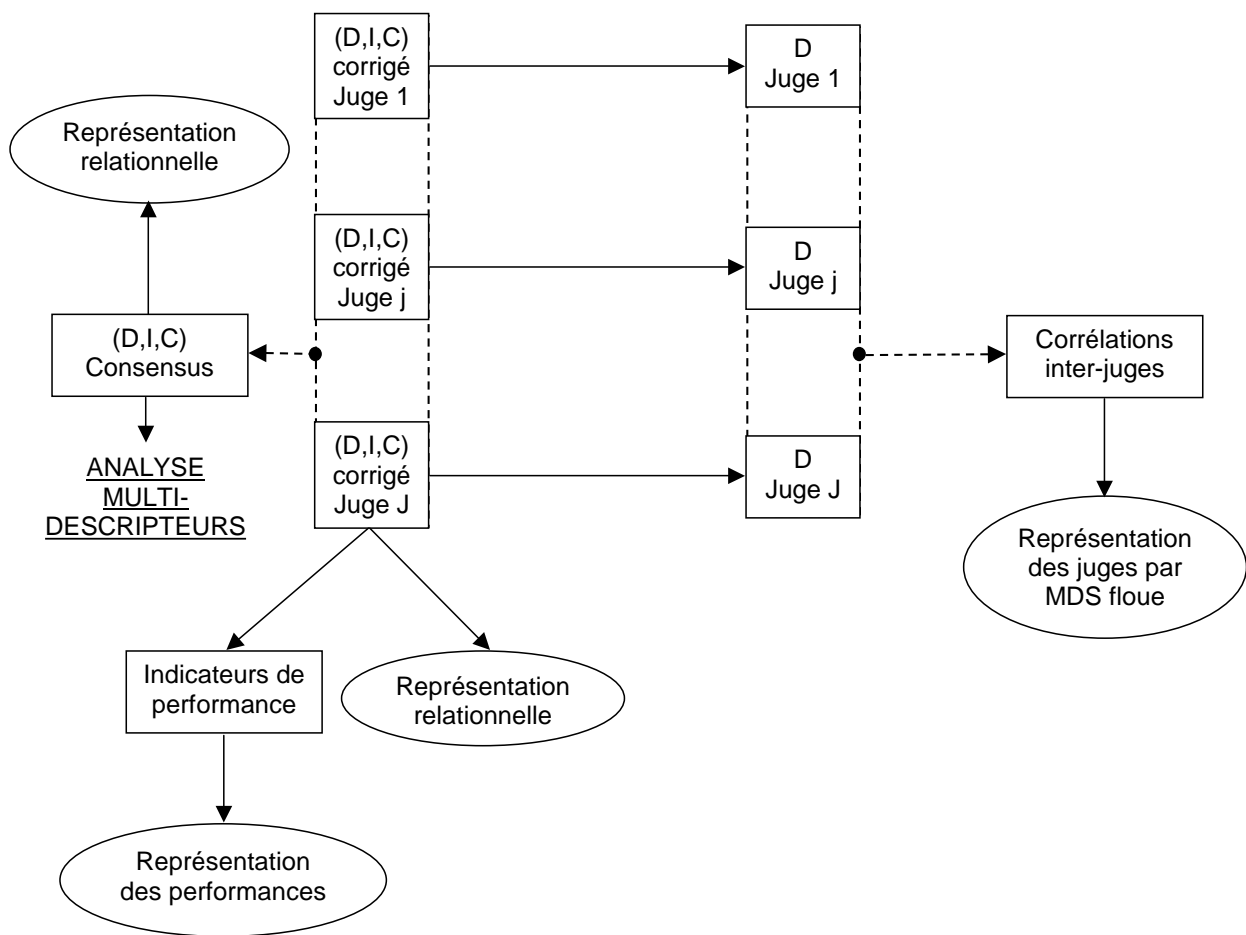


FIG. 4.25 – Représentations mono-descripteur

Sur le schéma 4.26, p. 148, nous traitons le cas multi-descripteurs :

- La représentation multidimensionnelle des produits est construite en approchant la relation consensuelle de dominance stricte de chaque descripteur par une relation

- d'ordre d'intervalles floue ; après sélection d'un niveau d' α -coupe, les relations ordinales de chaque descripteur sont ensuite caractérisées par un ensemble d'intervalles de pseudo-rangs, représentant chacun un produit ; puis une ACP sur des données intervalles permet leur représentation dans un espace de dimension réduite ;
- la représentation multi-dimensionnelle des descripteurs consiste à décrire les corrélations floues entre les relations de dominance stricte consensuelles par un positionnement multidimensionnel flou. La restriction à une unique α -coupe n'est pas nécessaire pour cette représentation, sauf si l'on souhaite la compléter avec les descripteurs sous-jacents. En effet, chacun des axes principaux issus de la représentation multidimensionnelle des produits induit une relation ordinale nette, interprétée comme la relation caractéristique d'un descripteur sous-jacent. Ses corrélations avec les autres descripteurs, initiaux et sous-jacents, peut donc également être représentées, mais uniquement sur l' α -coupe utilisée dans l'ACP de la représentation des produits.

Ajoutons en outre que les performances individuelles des juges calculées en mono-descripteur sont susceptibles d'être combinées de façon à produire des indicateurs synthétiques, caractérisant soit les performances de chacun des juges sur l'ensemble des descripteurs, soit la performance moyenne des juges pour chacun des descripteurs.

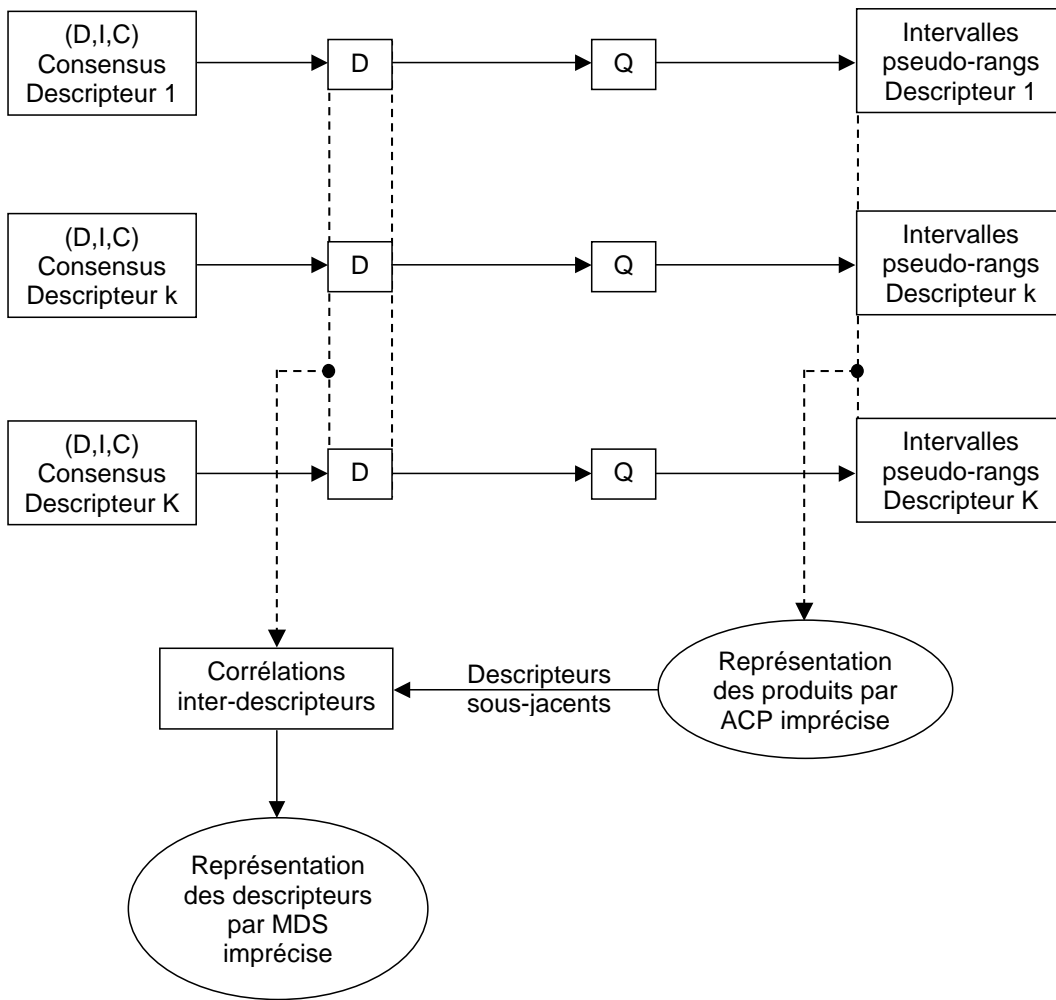


FIG. 4.26 – Représentations multi-descripteurs

5 Démonstrations

Preuve de la proposition 1.3, p. 110

Soient L_1^- et L_2^- des extensions linéaires des ordres partiels respectifs P_1 et P_2 , dont la corrélation atteint la borne inférieure τ_{min} (c'est-à-dire qu'elles ont exactement N_{min} paires identiquement ordonnées en commun).

Soient L_1^+ et L_2^+ leurs pendants pour la borne supérieure τ_{max} .

On appelle *permutation élémentaire* d'une relation d'ordre total, l'inversion de l'ordre de deux objets de rangs voisins. Montrons qu'il existe un chemin permettant de passer de L_1^- en L_1^+ , par une succession de permutations élémentaires, tout en ne générant que des extensions linéaires de P_1 .

Supposons d'abord qu'à un stade donné, il n'existe aucune permutation élémentaire permettant de s'approcher de L_1^+ . Cela signifie que tous les couples d'objets de rangs voisins sont ordonnés comme dans L_1^+ . Par conséquent L_1^+ est déjà atteinte.

Supposons ensuite qu'à un stade donné, L_1^+ ne soit pas atteinte, et qu'il n'existe aucune permutation élémentaire permettant de tendre vers L_1^+ , qui satisfasse la condition « extension linéaire de P_1 ». D'après le paragraphe précédent, cela implique l'existence d'au moins un couple d'objets (x, y) de rangs voisins, dont l'inversion permette d'ordonner x et y de la même façon que dans L_1^+ . Le seul obstacle tiendrait donc dans la condition d'extension linéaire. Mais c'est absurde : si la paire (x, y) est ordonnée différemment dans la relation actuelle (qui est supposée être une extension linéaire de P_1) et dans L_1^+ (qui est également une extension linéaire de P_1), c'est qu'elle est nécessairement non ordonnée dans P_1 .

Il est donc possible de construire une séquence d'extensions linéaires de P_1 , débutant en L_1^- et finissant en L_1^+ , dont chaque élément dispose exactement d'une paire d'objets de plus que le précédent, identiquement ordonnée avec L_1^+ .

On peut donc construire une séquence de couples d'extensions linéaires de P_1 et P_2 , dont le nombre de paires d'objets identiquement ordonnées couvre toutes les valeurs discrètes comprises entre N_{min} à N_{max} . Il suffit pour cela de partir du couple (L_1^-, L_2^-) , puis de rapprocher alternativement l'une et l'autre extension linéaire courante vers leur cible respective L_1^+ et L_2^+ . Ainsi, le nombre de paires identiquement ordonnées n'évolue que par pas de $+1$ ou -1 : toutes les valeurs entières comprises entre N_{min} et N_{max} sont donc bien atteintes.

Preuves des propositions 1.4, p. 111 et 1.5, p. 111

Nous démontrons simultanément ces deux résultats. Le principe utilisé consiste à construire parallèlement des ordres totaux sur des ensembles constituant une partition de X diminué de l'élément x , qui vérifient les contraintes ordinales de P . Ces ordres totaux seront ensuite ordonnés, de façon totale, toujours en veillant au respect des contraintes de P . L'élément x sera finalement inséré dans cet ordre total, et nous déduirons notre résultat, des différents rangs qu'il sera susceptible d'occuper.

Notons $Y_P(x)$ l'ensemble des objets de X n'appartenant pas à $X_P^p(x) \cup X_P^s(x) \cup \{x\}$. Par définition, ils ne sont pas ordonnés par rapport à l'objet x selon l'ordre partiel P . On a représenté les relations ordinales entre ces quatre ensembles d'objets de X sur la figure 4.27, p. 150, dont voici la légende :

- un cercle représente un ensemble d'objets partiellement ordonnés ;
- un carré représente un ensemble d'objets totalement ordonnés ;
- une flèche pleine partant d'un ensemble A vers un ensemble B signifie que tous les éléments de A dominent tous les éléments de B ;
- une flèche en pointillés partant d'un ensemble A vers un ensemble B signifie qu'aucun élément de B ne domine un élément de A .

Pour simplifier le schéma, lorsqu'une flèche pleine relie un ensemble A à un ensemble B , et une autre de même type relie cet ensemble B à un ensemble C , nous ne représentons pas le lien entre A et C , comme dans les diagrammes de Hasse.

Par conséquent, deux ensembles A et B ne sont pas liés par une flèche dans deux situations :

- il existe une suite d'ensembles entre A et B , connectés l'un à l'autre par des flèches pleines, et tous les éléments de A sont liés par une même relation de dominance à tous les éléments de B ;
- ou, il n'existe aucune relation ordinale entre les éléments de A et ceux de B .

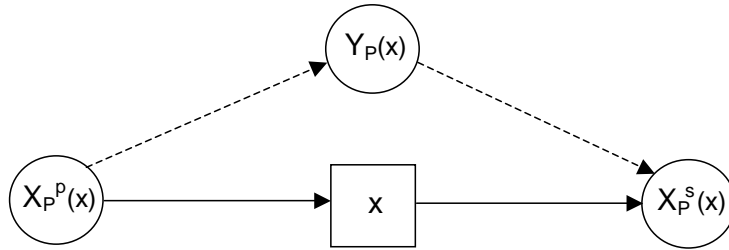


FIG. 4.27 – Graphe représentant les relations ordinales selon P entre les sous-ensembles d'objets $\{x\}$, $X_P^p(x)$, $X_P^s(x)$ et $Y_P(x)$

Sur la figure 4.27, p. 150, tous les ensembles d'objets, à l'exception de l'élément x , sont représentés par des cercles. En effet, P définit sur chacun d'eux une relation d'ordre partiel : tout sous-ensemble de $X' \times X'$ extrait d'un sous-ensemble de $X \times X$ vérifiant une relation d'ordre partiel, avec $X' \subseteq X$, définit un ordre partiel. Quant à l'objet x , on peut considérer que c'est un ordre total.

Les deux flèches pleines se justifient simplement par définition des ensembles $X_P^p(x)$ et $X_P^s(x)$. Les flèches pointillées s'en déduisent : s'il existait un élément $y \in Y_P(x)$ dominant un élément de $X_P^p(x)$, alors, à cause de la transitivité de P , y dominerait x , ce qui irait à l'encontre de la définition de $Y_P(x)$. De même, aucun élément de $X_P^s(x)$ ne peut dominer un élément de $Y_P(x)$.

L'objectif étant d'obtenir des extensions linéaires de P , on procède par ajout de contraintes ordinales entre les éléments de X : il s'agit de compléter P .

Sur chacun des sous-ensembles $X_P^p(x)$, $X_P^s(x)$ et $Y_P(x)$, on commence par définir des ordres totaux. En effet, on a vu que P définit sur chacun d'eux une relation d'ordre partiel. Or, à tout ordre partiel on peut associer au moins un ordre total respectant ses contraintes d'ordre. Sur les objets de $X_P^p(x)$, on construit donc un ordre total respectant toutes les contraintes imposées par P . Puis on procède de même pour les ensembles $Y_P(x)$ et $X_P^s(x)$, sans spécifier les extensions linéaires construites (cf. figure 4.28, p. 151).

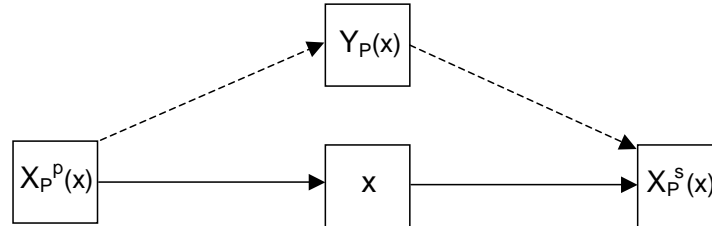


FIG. 4.28 – Construction d'ordres totaux sur chaque sous-ensemble de X

Ensuite, on ordonne les sous-ensembles $X_P^p(x)$ et $Y_P(x)$ l'un par rapport à l'autre, tout comme les sous-ensembles $Y_P(x)$ et $X_P^s(x)$. Pour respecter les contraintes de P entre ces trois sous-ensembles, il suffit que tous les éléments de $X_P^p(x)$ dominent tous les éléments de $Y_P(x)$, et que tous les éléments de $Y_P(x)$ dominent tous ceux de $X_P^s(x)$: des flèches pleines se substituent à celles en pointillés. On obtient alors le graphe représenté en figure 4.29, p. 151.

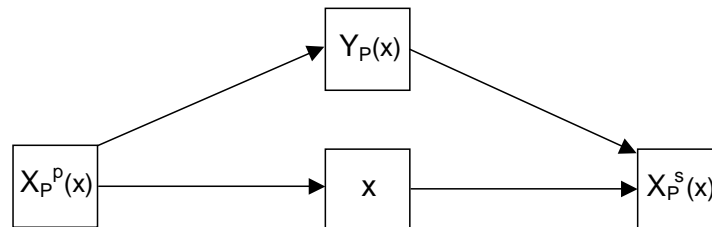


FIG. 4.29 – Ajout de contraintes d'ordres entre les sous-ensembles de X

Les ordres totaux construits sur chaque sous-ensemble vérifient les contraintes de P , de même que leurs relations deux à deux : en effet, durant la procédure de construction, nous avons veillé à respecter les contraintes de P ; la relation a simplement été complétée. On note que la relation sur X diminué de l'élément x ainsi construite est un ordre total.

Essayons d'y insérer l'élément x . Il est dominé par les éléments de $X_P^p(x)$, il domine les éléments de $X_P^s(x)$, et il n'est contraint par rapport à aucun des éléments de $Y_P(x)$: cela signifie qu'il peut être inséré à n'importe quelle place au sein de l'ordre total défini sur $Y_P(x)$.

Considérons l'ordre total construit sur X diminué de x , en indiquant chaque objet par ordre de dominance croissant (l'élément dominant tous les autres étant indicé $n - 1$). On désigne par a le rang du premier élément de $Y_P(x)$, et $b > a$ celui du dernier : les objets de $X_P^s(x)$ occupent les $a - 1$ premiers rangs, ceux de $Y_P(x)$ les $b - a + 1$ suivants, et ceux restants sont occupés par les éléments de $X_P^p(x)$.

D'après ce qui précède, l'objet x peut donc être inséré dans cet ordre total entre toute paire d'éléments de rangs respectifs $(i, i + 1)$ tels que $a - 1 \leq i \leq b$ (cf. figure 4.30, p. 152).

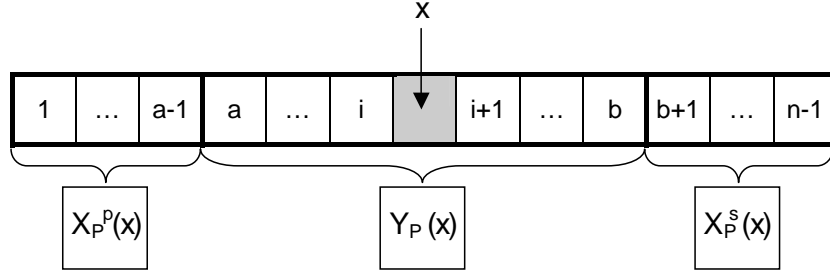


FIG. 4.30 – Positionnement de l'objet x dans l'extension linéaire de P construite

En fonction du positionnement de l'élément x , on peut alors construire $b - a + 2 = |Y_P(x)| + 1$ ordres totaux distincts, vérifiant chacun les contraintes ordinales de P : ce sont bien des extensions linéaires de P . On en déduit l'intervalle le plus petit contenant l'ensemble des rangs occupés par x parmi les extensions linéaires de P :

$$[a, b + 1] = [1 + |X_P^s(x)|, n - |X_P^p(x)|] .$$

On a donc obtenu les bornes d'un intervalle de rangs, tout comme sa propriété de *surjectivité*.

Cependant, il reste à montrer que x ne peut occuper un rang situé hors de cet intervalle : ce résultat est trivial, car P impose la dominance de tous les éléments de $X_P^p(x)$ sur x , de même qu'il impose la dominance de x sur tous les éléments de $X_P^s(x)$. Le rang de x est donc nécessairement situé dans l'intervalle calculé.

Preuve du lemme 2.2, p. 114

Considérons une antichaîne maximale $A_Q(i)$ donnée. Puisque l'ensemble $\{\bar{v}_Q(x), x \in X\}$ est caractéristique de Q , pour tout couple d'éléments $x \neq y \in A_Q(i)$, $\bar{v}_Q(x) \cap \bar{v}_Q(y) \neq \emptyset$. Les intervalles \bar{v}_Q correspondants aux objets de $A_Q(i)$ sont donc d'intersection deux à deux non vide. Or si p intervalles I_k sont d'intersection deux à deux non vides, alors $\bigcap_{k=1}^p I_k \neq \emptyset$. Par conséquent : $I_{\bar{v}_Q}(i) \neq \emptyset$.

D'autre part, les $A_Q(i)$ étant des antichaînes maximales, il n'existe aucun objet $x \notin A_Q(i)$, tel que x est indifférent à tous les éléments de $A_Q(i)$. Or l'ensemble $\{\bar{v}_Q(x), x \in X\}$ est caractéristique de Q , donc :

$$\forall x \notin A_Q(i), \bar{v}_Q(x) \cap I_{\bar{v}_Q}(i) = \emptyset.$$

Enfin :

$$\begin{aligned} i \neq j &\Leftrightarrow A_Q(i) \neq A_Q(j) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A_Q(j) / x \notin A_Q(i) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A_Q(j) / \bar{v}_Q(x) \cap I_{\bar{v}_Q}(i) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow I_{\bar{v}_Q}(j) \cap I_{\bar{v}_Q}(i) = \emptyset. \end{aligned}$$

Preuve lemme 2.3, p. 114

Supposons qu'il existe $b \in B$ tel que b n'appartienne pas à $A_Q(j)$. Alors d'après le lemme précédent 2.2, p. 114 :

$$\exists a \in A_Q(i) / (b, a) \in Q \text{ et } \exists c \in A_Q(k) / (c, b) \in Q.$$

Or c'est absurde, car cela contredit : $B \subseteq A_Q(i) \cap A_Q(j)$. Par conséquent, tout élément $b \in B$ appartient à l'antichaîne maximale intermédiaire $A_Q(j)$, ce qui valide le lemme.

Preuve de la proposition 2.1, p. 114

D'après le lemme 2.2, p. 114 :

$$\begin{aligned} (x, y) \in Q &\Leftrightarrow x \in A_Q(i), y \in A_Q(j) \Leftrightarrow i > j \\ &\Leftrightarrow \bar{v}_Q(x) \cap I_{\bar{v}_Q}(i) \neq \emptyset \text{ et } \bar{v}_Q(y) \cap I_{\bar{v}_Q}(j) \neq \emptyset \Leftrightarrow i > j \\ &\Leftrightarrow \nexists i / \bar{v}_Q(x) \cap \bar{v}_Q(y) \cap I_{\bar{v}_Q}(i) \neq \emptyset \text{ et } I_{\bar{v}_Q}(i) \subseteq \bar{v}_Q(x), I_{\bar{v}_Q}(j) \subseteq \bar{v}_Q(y) \Leftrightarrow i > j \\ &\Leftrightarrow \bar{v}_Q(x) \cap \bar{v}_Q(y) \neq \emptyset \text{ et } I_{\bar{v}_Q}(i) \subseteq \bar{v}_Q(x), I_{\bar{v}_Q}(j) \subseteq \bar{v}_Q(y) \Leftrightarrow I_{\bar{v}_Q}(i)^- > I_{\bar{v}_Q}(j)^+ \\ &\Leftrightarrow \bar{v}_Q(x)^- > \bar{v}_Q(y)^+. \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 2.2, p. 115

D'après le lemme 2.2, p. 114, le résultat est immédiat :

$$\begin{aligned} (x, y) \in Q &\Leftrightarrow \forall i/x \in A_Q(i), \forall j/y \in A_Q(j), i > j \\ &\Leftrightarrow \forall i/x \in A_Q(i), \forall j/y \in A_Q(j), I_i^- > I_j^+ \\ &\Leftrightarrow \min_{i/x \in A_Q(i)} I_i^- > \max_{i/y \in A_Q(i)} I_i^+ \\ &\Leftrightarrow \bar{\kappa}_Q(x)^- > \bar{\kappa}_Q(y)^+. \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 2.4, p. 116

Déterminons les intervalles $\{I_{\bar{\kappa}_Q}(i), \forall i \in \{1, \dots, m_Q\}\}$ définis chacun comme l'intersection des intervalles de pseudo-rangs associés aux objets de l'antichaîne maximale $A_Q(i)$, indiquée suivant l'ordre préalablement défini (cf. proposition 2.2, p. 114). Pour toute antichaîne maximale $i \in \{1, \dots, m_Q\}$ de Q :

$$\begin{aligned} I_{\bar{\kappa}_Q}(i) &= \bigcap_{x \in A_Q(i)} \bar{\kappa}_Q(x) \\ &= \left[\max_{x \in A_Q(i)} \left(\min_{j/x \in A_Q(j)} j \right), \min_{x \in A_Q(i)} \left(\max_{j/x \in A_Q(j)} j \right) \right]. \end{aligned}$$

Or il y a nécessairement un objet $x^- \in X$ qui appartient à $A_Q(i)$, mais pas à $A_Q(i-1)$ (si $i > 1$). Dans le cas contraire, $A_Q(i) \subseteq A_Q(i-1)$, ce qui est absurde pour des antichaînes

maximales. D'où :

$$\max_{x \in A_Q(i)} \left(\min_{j/x \in A_Q(j)} j \right) = \min_{j/x^- \in A_Q(j)} j = i$$

De même : $\min_{x \in A_Q(i)} \left(\max_{j/x \in A_Q(j)} j \right) = i$; d'où :

$$I_{\bar{\kappa}_Q}(i) = \{i\}.$$

Ainsi, les intervalles $\{I_{\bar{\kappa}_Q}(i), i \in \{1, \dots, m_Q\}\}$ associés aux $\{\bar{\kappa}_Q(x), x \in X\}$ sont réduits à des singletons, égaux à leur indice. Puisqu'ils vérifient la condition nécessaire et suffisante de la proposition 2.2, p. 115, ils sont caractéristiques de Q .

D'autre part, sous la contrainte de bornes définies sur \mathbb{N}^* , cet ensemble est aussi le plus *compact* qui soit : les intervalles sont réduits au maximum (à un singleton), et les plus proches les uns des autres (bijection sur $\{1, \dots, m_Q\}$). Le critère de compacité $\max_{x \in X} \bar{\kappa}_Q^+(x) - \min_{x \in X} \bar{\kappa}_Q^-(x)$ est clairement minimisé.

Preuve de la proposition 2.5, p. 117

Les intervalles de pseudo-rangs compacts sont définis ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_Q(x) &= \left[\bar{\kappa}_Q^-(x), \bar{\kappa}_Q^+(x) \right] \\ &= \left[\min_{i/x \in A_Q(i)} i, \max_{i/x \in A_Q(i)} i \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, on rappelle le résultat obtenu sur les intervalles de rangs (cf. section 1.4, p. 111) :

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_Q(x) &= \left[\bar{\nu}_Q^-(x), \bar{\nu}_Q^+(x) \right] \\ &= \left[1 + |X_Q^s(x)|, n - |X_Q^p(x)| \right]. \end{aligned}$$

Or les nombres de prédécesseurs et de successeurs d'un objet x sont fonctions des indices des antichaînes maximales auxquels ils appartiennent :

$$\begin{aligned} |X_Q^s(x)| &= \left| \bigcup_{j < \min_{i/x \in A_Q(i)} i} A_Q(j) \right| \\ |X_Q^p(x)| &= \left| \bigcup_{j > \max_{i/x \in A_Q(i)} i} A_Q(j) \right|. \end{aligned}$$

Ainsi, $|X_Q^s(x)|$ est une fonction strictement croissante de $\bar{\kappa}_Q^-(x)$, alors que $|X_Q^p(x)|$ est une fonction strictement décroissante de $\bar{\kappa}_Q^+(x)$.

Inversement :

- $\bar{\kappa}_Q^-(x)$ est une fonction strictement croissante de $|X_Q^s(x)|$, et donc de $\bar{\nu}_Q^-(x) = 1 + |X_Q^s(x)|$;
- $\bar{\kappa}_Q^+(x)$ est une fonction strictement décroissante de $|X_Q^p(x)| - n$, ou encore, fonction strictement croissante de $\bar{\nu}_Q^+(x) = n - |X_Q^p(x)|$.

Ces deux fonctions prenant leurs valeurs sur $\{1, \dots, m_Q\}$, elles sont toutes deux égales aux rangs de leur paramètre respectif, ce qui valide la proposition.

Chapitre 5

Mise en oeuvre sur des profils sensoriels

Nous proposons dans ce chapitre l'application de notre méthode à l'analyse des profils sensoriels décrit en introduction du mémoire (cf. section 1, p. 10), concernant les plaques translucides. A un compte-rendu exhaustif de l'ensemble des résultats obtenus, nous préférons effectuer une comparaison avec des outils plus classiques. Dans un premier temps, nous prendrons donc pour référence les résultats d'une analyse de données sensorielles exploitée chez *PSA Peugeot Citroën*, et nous décrirons et justifierons les différences et similarités observées.

Puis nous présenterons des expériences conduites sur des profils sensoriels acquis au cours de cette même expérience d'évaluation de plaques translucides, dans le but de souligner différents atouts de notre technique d'analyse : d'abord, la stabilité des relations floues observées sur un grand nombre de répétitions ; ensuite, la possibilité d'exploiter une information d'imprécision directement recueillie auprès des juges.

Nous proposons ici une confrontation de nos résultats avec ceux obtenus sur le jeu de profils sensoriels monadiques, portant sur la perception tactile et visuelle de plaques translucides.

1 Performances des juges

Dans la majorité des méthodes usuelles d'analyse de profils sensoriels, le comportement des juges est évalué suivant les trois aptitudes de discrimination, de répétabilité et de consensualité, en fonction des évaluations fournies. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, nous disposons de représentations synthétiques pour ces différentes caractéristiques.

1.1 Discrimination des produits

Dans la méthode de référence, la capacité des juges à discriminer les produits en fonction d'un descripteur donné est évaluée par une analyse de la variance à un facteur (effet produit) sur les trois répétitions obtenues. Le test est estimé positif lorsque le degré de signification (*p-value* en anglais) est inférieur à un seuil, fixé ici à 0.1%. L'hypothèse d'égalité des moyennes des différents produits est alors rejetée, ce qui signifie qu'au moins un couple de produits a été discriminé par le juge. On note que cette information reste assez pauvre.

L'indicateur de dominance stricte proposé par notre méthode offre une évaluation plus fine de l'aptitude du juge à discriminer les produits. Il s'agit en effet du cardinal flou de la relation de dominance stricte représentant les rapports ordinaux des produits. Le niveau de discrimination mesuré est plus fin, puisque l'indicateur croît graduellement en fonction du nombre de couples de produits ordonnés par le juge, ainsi que des degrés de certitude de ces rapports.

Dans la méthode de référence, seuls trois couples juge-descripteurs sont estimés non-discriminants (juge 11, descripteurs *brillant* et *nacré*, juge 10 descripteur *homogène*).

Pour le descripteur *brillant*, les indicateurs de dominance stricte représentés sur la figure 5.1, p. 158 montrent des niveaux de discriminations plus hiérarchisés. En particulier, le juge 3 est aussi peu discriminant que le juge 11. On observe en effet sur la figure 5.2, p. 159 qu'il n'a pas marqué de discrimination nette entre sept des huit produits. Ce comportement n'est pas repéré par la méthode de référence, car le juge a clairement démarqué le produit 6 de tous les autres, ce qui suffit à rejeter le test global d'égalité des moyennes.

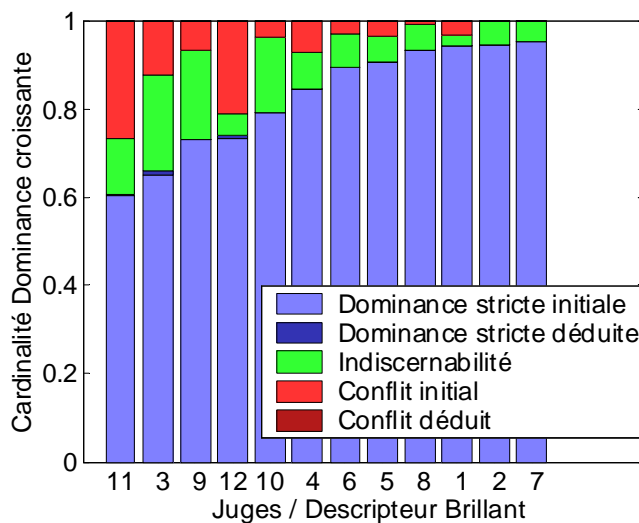


FIG. 5.1 – Indicateurs comportementaux des juges pour le descripteur *brillant*

Sur la figure 5.3, p. 159, on a représenté la relation floue issue du juge le plus discriminant (juge 7), qui s'apparente à un ordre total net : la discrimination est presque parfaite.

L'avantage d'un indicateur basé sur une méthode purement descriptive est donc évident.

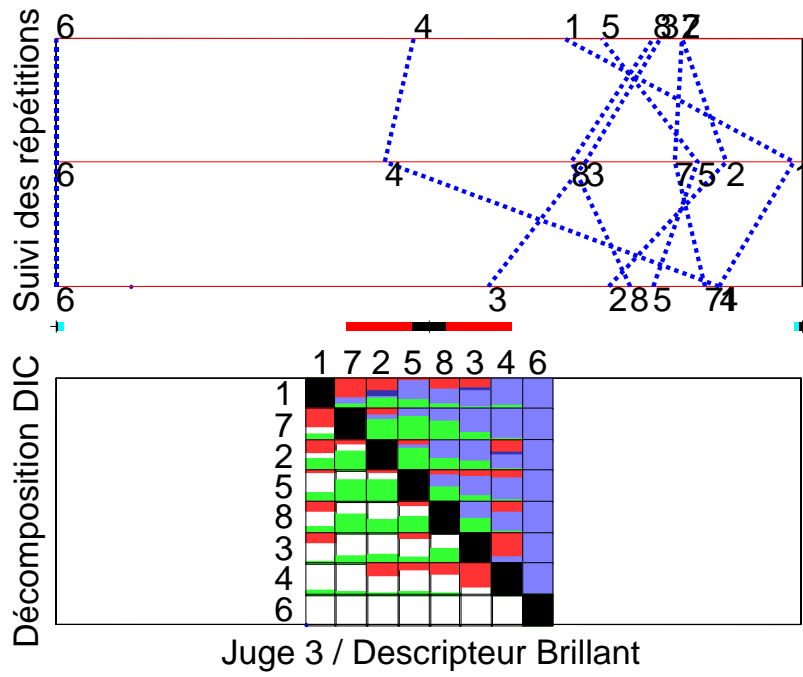


FIG. 5.2 – Descripteur Brillant, Juge 3

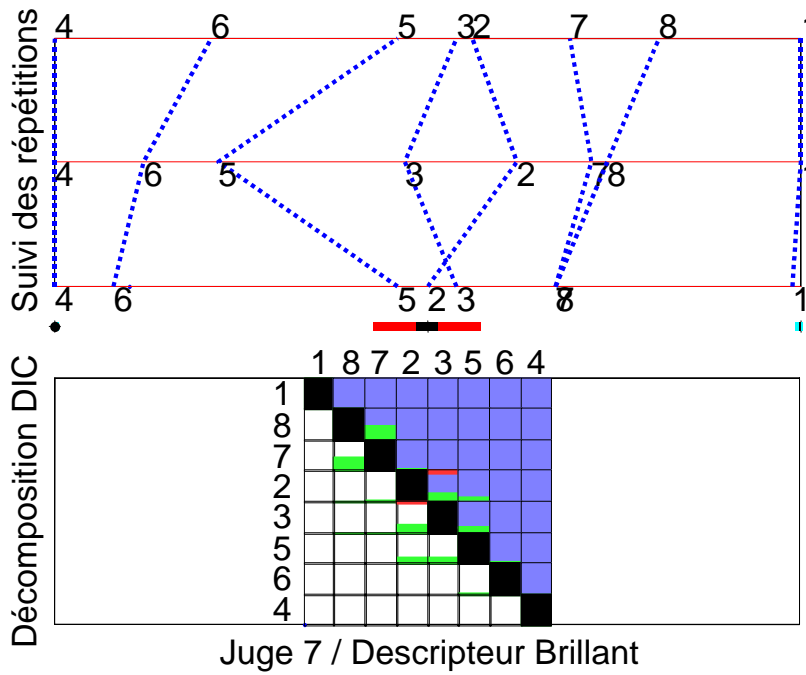


FIG. 5.3 – Descripteur Brillant, Juge 7

Dans une méthode inférentielle, il semble peu aisé d'obtenir une information aussi riche. En effet, le nombre de répétitions étant faible, deux moyennes ne sont discriminées que si leurs écarts sont très importants. Par exemple, un test de comparaison de moyennes (test de Tukey, avec un seuil de signification à 5%) conduit sur les données du juge 7 pour le descripteur *brillant*, ne permet pas de repérer l'ordre total exprimé (figure 5.4, p. 160) : le produit central marqué en bleu n'est distingué que des trois produits rouges situés aux extrémités.

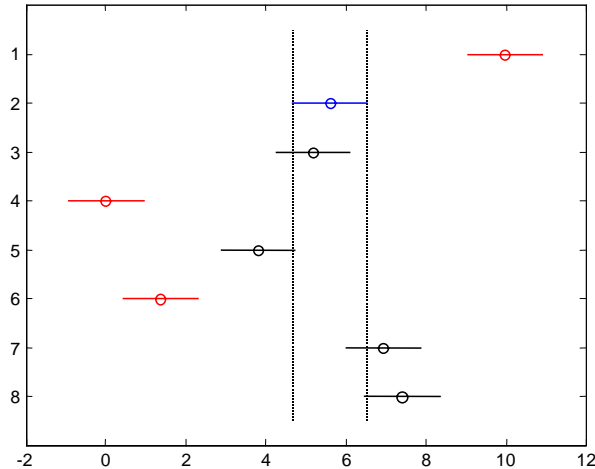


FIG. 5.4 – Test de comparaison de moyennes, Descripteur Brillant, Juge 7. A chaque produit correspond un intervalle, dont l'abscisse du centre est égal à la moyenne de ses mesures sur les répétitions. Une paire de produit n'est pas significativement ordonnée, lorsque leurs intervalles associés se chevauchent.

1.2 Répétabilité

Dans la méthode de référence, la répétabilité des juges est évaluée par la variance empirique des mesures sur les répétitions, sur chacun des descripteurs. Dans notre cas, il s'agit de l'indicateur de conflit, qui sanctionne les inversions de mesures non justifiées par leur imprécision. Les deux techniques ne mesurent donc pas le même phénomène. Selon la première, la répétabilité est parfaite lorsque les évaluations sont strictement identiques sur les trois répétitions. Selon la seconde, seul l'ordre doit être maintenu.

Nous nous concentrons sur le descripteur *brillant* : les juges 4, 5, 9, 10, 11 et 12 ont un écart-type supérieur à la valeur médiane obtenue sur l'ensemble des couples juges-descripteurs, et sont donc jugés comme peu répétables par la méthode de référence.

Les indicateurs de conflit de notre méthode sont représentés sur la figure 5.1, p. 158. Ici encore, la hiérarchie est plus fine : les juges 11 et 12 sont les moins répétables, suivis par le juge 3, puis par les juges 4 et 9.

Nous insisterons sur deux discordances. Tout d'abord le juge 3, dont les relations floues sont représentées en figure 5.2, p. 159, semble effectivement peu répétable, au regard des inversions réalisées (notamment par les produits 1 et 4). Le faible écart-type se justifie

simplement par une mauvaise exploitation de l'échelle : sept des huit produits se partagent la seconde moitié de l'échelle. D'autre part, le juge 5 apparaît répétable dans notre méthode, malgré un écart-type élevé (figure 5.5, p. 161).

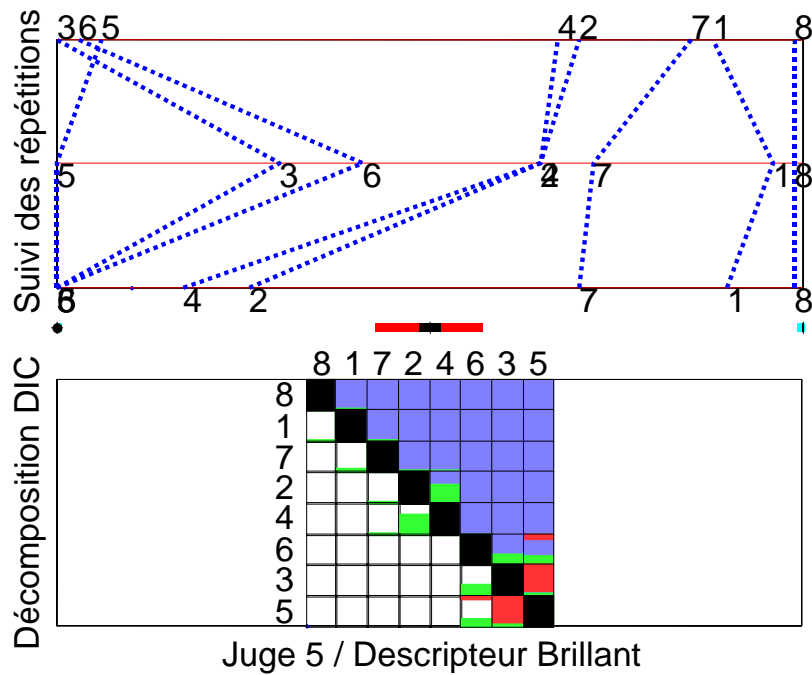


FIG. 5.5 – Descripteur Brillant, Juge 5

Selon notre critère d'appréciation ordinal, le comportement de ce juge est en effet exemplaire, puisque la condition de cohérence des ordres entre produits sur les répétitions est respectée. Le seul accroc concerne l'inversion des produits 3 et 5 : sur la répétition du haut, la mesure attribuée au produit 3 est proche de zéro, alors que celle du produit 5 est significativement plus élevée, et cet état s'inverse complètement sur la répétition du centre. Les évaluations de ce juge sont donc globalement cohérentes du point de vue ordinal, ce qui est bien mis en évidence par notre méthode.

1.3 Consensus

Les outils d'évaluation des qualités individuelles de consensus de la méthode de référence sont les suivants (pour chaque descripteur) :

- test de Kendall : l'ordre induit par les moyennes des notes sur les répétitions de chacun des juges est comparé à celui induit par les moyennes des notes sur les juges et répétitions, grâce au tau de Kendall ; cette mesure de corrélation est complétée par le degré de signification du test de Kendall ;
- comparaison des graphes des notes des juges, avec ceux des notes moyennées du panel ;
- une analyse en composante principale produits-juges, décrite à travers le cercle des corrélations du premier plan et les pourcentages d'inerties de ses axes.

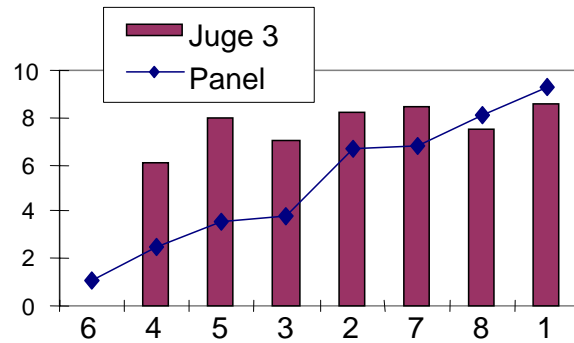


FIG. 5.6 – Graphe comparatif des notes du juge 3 et de celles moyennées sur le panel, Descripteur Brillant

Ainsi, pour le descripteur *brillant*, le degré de signification du test de Kendall comparant les notes moyennes d'un juge avec les moyennes des notes sur le panel, est supérieur à 1% chez plus de la moitié des juges (juges 3, 5, 6, 9, 10, 11 et 12) : cela indique un très mauvais consensus. Sur la figure 5.6, p. 162, le graphe des notes du juge 3 montre en quoi il s'écarte du consensus : il a marqué très peu de discrimination. Parmi les autres juges non consensuels, plusieurs ont inversé des produits par rapport aux moyennes du panel. Enfin, la représentation du premier plan de l'analyse en composantes principales produits-juges est assez éclatée (figure 5.7, p. 163) : l'axe 1 représente 75% de l'inertie totale, contre 100% dans le cas idéal d'un descripteur totalement consensuel.

Notre méthode ordinaire floue délivre deux types de résultats :

- le désaccord entre juges : il s'agit du conflit généré lors de l'agrégation des juges ; il traduit l'inversion de certains rapports ordinaux parmi les juges ;
- la représentation du consensus, par un positionnement multidimensionnel euclidien ou sphérique de mesures de dissimilarités calculées à partir des corrélations floues inter-juges.

On note que la relation de dominance stricte consensuelle prend en compte les écarts ordinaux entre juges. Dans la méthode de référence, les similarités des relations exprimées par les juges sont bien considérées de façon ordinaire, à travers les mesures de tau de Kendall. Cependant, quels que soient les écarts observés, le résultat consensuel exploité est un ordre total défini à partir des moyennes des mesures exprimées par les juges : d'un point de vue ordinal, ce résultat est peu satisfaisant lorsque les juges sont en désaccord, puisqu'il n'en conserve aucune trace.

La décomposition en sous-relations de dominance du consensus du descripteur *brillant* est représentée sur la figure 5.8, p. 163. Si le désaccord n'atteint pas le niveau des descripteurs *homogène* et *nacré*, il n'en est pas moins élevé : comme dans la méthode de référence, le consensus apparaît donc très mauvais.

Ce résultat est confirmé par la représentation des corrélations floues inter-juges. La figure 5.9, p. 164 présente la version sphérique du positionnement multidimensionnel. On vérifie une dispersion importante des calottes sphériques, que l'on peut mettre en rapport avec l'analyse en composantes principales produits-juges de la figure 5.7, p. 163 : on s'aper-

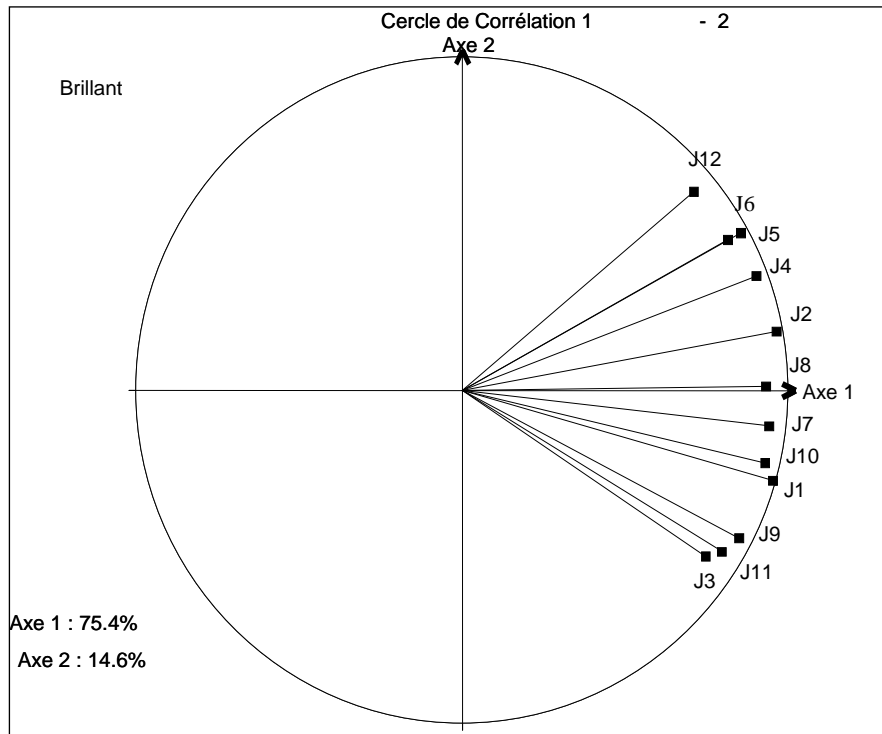


FIG. 5.7 – Cercle de corrélation du premier plan 1-2 de l'ACP produits-juges, Descripteur *brillant*

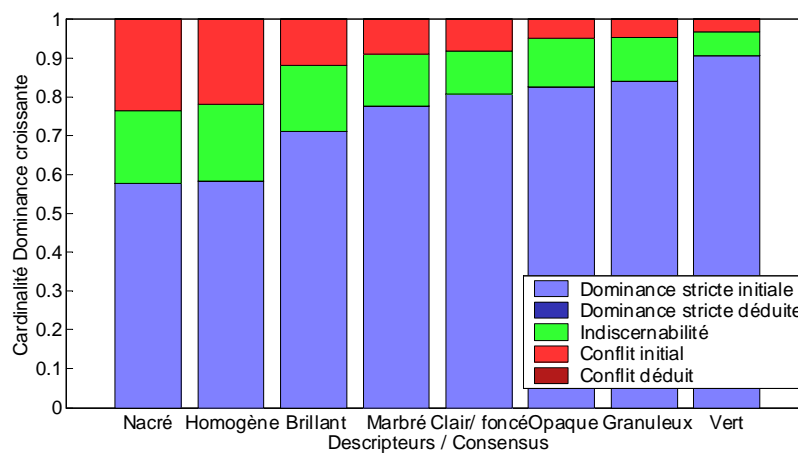


FIG. 5.8 – Indicateurs de performances mesurés sur les relations consensuelles

çoit que les centres des cercles de corrélations projetés sont positionnés au même endroit que les points correspondants du premier plan de représentation des corrélations inter-juges de l'ACP. La version euclidienne est proposée sur la figure 5.10, p. 165.

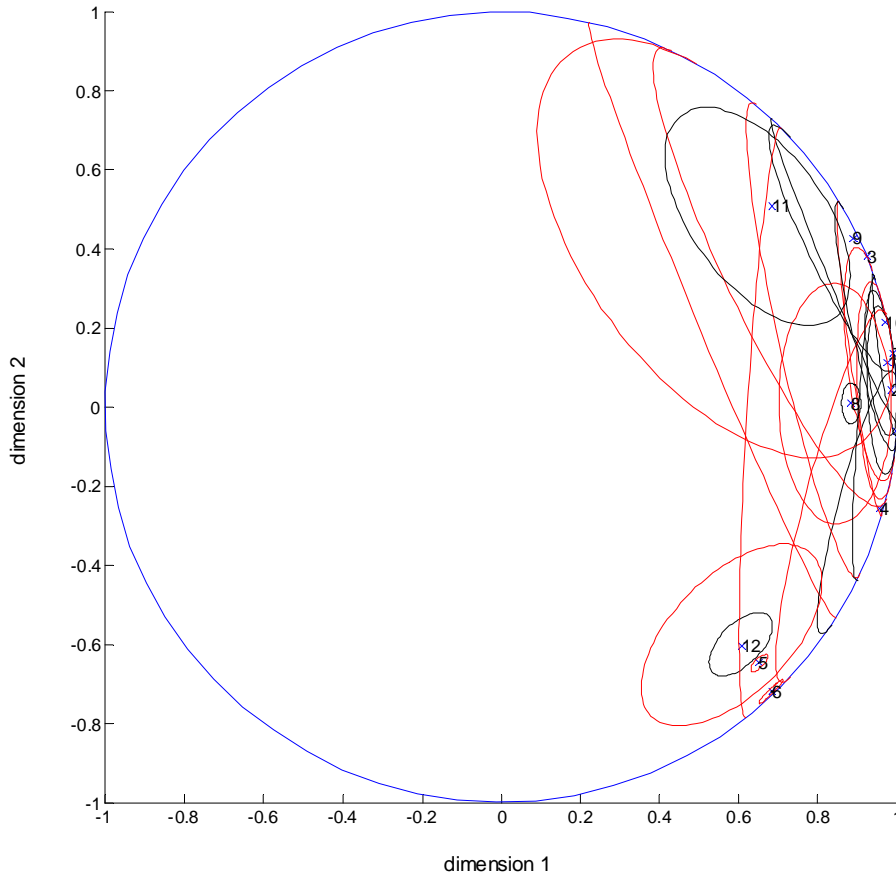


FIG. 5.9 – Plan 1-2 du positionnement multidimensionnel sphérique des corrélations inter-juges du descripteur brillant

Ces représentations correspondent à deux niveaux d'alpha-coupe des corrélations floues : *faible* (arbitrairement fixé à 0.15) et *intermédiaire* (0.6). Le niveau faible renvoie aux intervalles de corrélations entre les coupes de niveau *élevé* (soit ici $1 - 0.15 = 0.85$) des relations de dominance stricte de chaque juge : il s'agit de dominances fiables. Par là même, ces relations risquent d'être très partielles, et les cercles de corrélation correspondants assez larges. Le niveau moyen des corrélations floues correspond en revanche aux dominances strictes de fiabilité intermédiaire (niveau supérieur à 0.4) : les relations sont donc plus complètes, et les cercles de corrélations plus étroits.

Sur la représentation euclidienne, on s'aperçoit que les cercles noirs correspondant au niveau 0.15 s'intersectent assez largement. A l'inverse, les cercles rouges plus petits occupent des positions plus isolées. Cela montre que les juges ont marqué des classements de façon incertaine (c'est-à-dire imprécise ou conflictuelle), et qu'ils sont en désaccord sur les dominances strictes faiblement marquées. La méthode ordinale floue permet ainsi d'étudier le consensus en fonction d'un niveau d'imprécision donné.

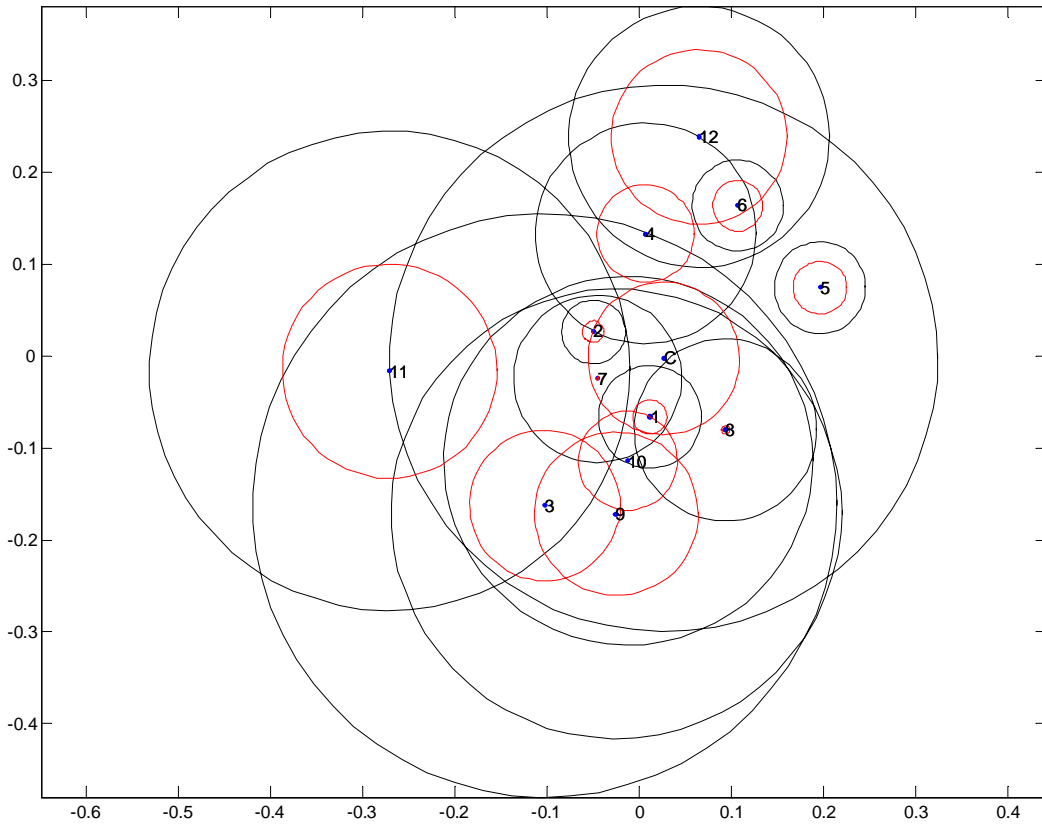


FIG. 5.10 – MDS euclidienne des corrélations inter-juges du descripteur *brillant*

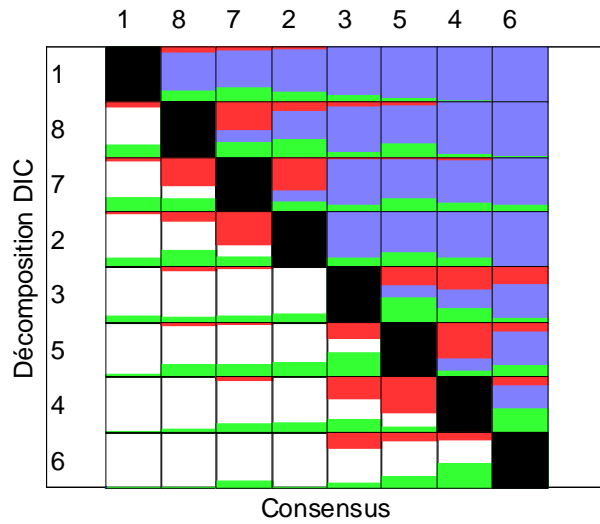


FIG. 5.11 – Descripteur Brillant, Consensus

La relation consensuelle obtenue (figure 5.11, p. 165) est intéressante à plusieurs égards : ses discriminations peu fiables sont aussi proches que possible de celles exprimées par les juges (position centrale du cercle rouge du consensus). D'autre part, les discriminations presque certaines sont en accord avec celles de l'ensemble des juges. Les juges les plus éloignés du consensus sont les juges 3, 5, 6, 9, 11 et 12.

Contrairement à ce qu'indique la méthode de référence, on considère que le juge 10 est assez représentatif du consensus. En effet, en confrontant ses réponses (figure 5.12, p. 166) à la réponse moyenne du panel (figure 5.11, p. 165), on s'aperçoit que le juge 10 s'est montré globalement plus discriminant que le consensus, mais sans contradiction (pas d'inversion d'ordre). Par rapport à la représentation du consensus, cet excès de discrimination se traduit par des cercles plus petits, et par un décalage de son centre : les corrélations avec d'autres juges sur-discriminants sont nécessairement différentes de celles entre ces mêmes juges et le consensus. Il s'agit par conséquent d'un consensus « au sens large ». Dans les faits, aucun juge n'a fourni une réponse proche de la relation obtenue par agrégation des réponses du panel.

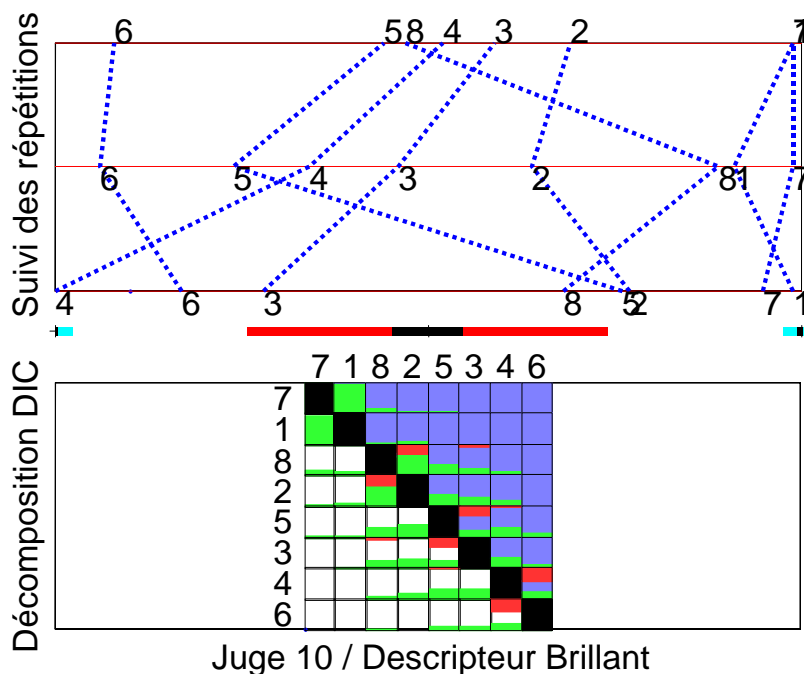


FIG. 5.12 – Descripteur Brillant, Juge 10

Sur la figure 5.8, p. 163, on observe que les deux descripteurs *nacré* et *homogène* se caractérisent par une part importante de conflit. Comme dans l'étude de référence, on conclut qu'ils sont peu consensuels. Il semble que les juges ne sont pas tout-à-fait parvenus à s'accorder sur le sens de ces descripteurs.

Comme exemple de bon consensus, nous nous intéressons au descripteur *vert*, dont le niveau de désaccord mesuré sur le consensus est le plus bas (cf. figure 5.8, p. 163). La figure 5.13, p. 167 fournit la représentation sphérique du consensus : à l'exception des juges 11 et 12, le consensus semble très bon. La représentation euclidienne de la figure 5.14, p. 168 offre un aperçu plus détaillé des proximités entre juges. Les juges 11 et 12 sont en effet les moins

consensuels, mais seulement en ce qui concerne leurs rapports de dominance de niveau de fiabilité intermédiaire (ce niveau correspondant aux cercles les plus petits). Ensuite, les juges 1, 5 et dans une moindre mesure le juge 2, sont également moins consensuels. Les six juges restants sont associés à des cercles quasi-concentriques : leurs réponses sont très similaires.

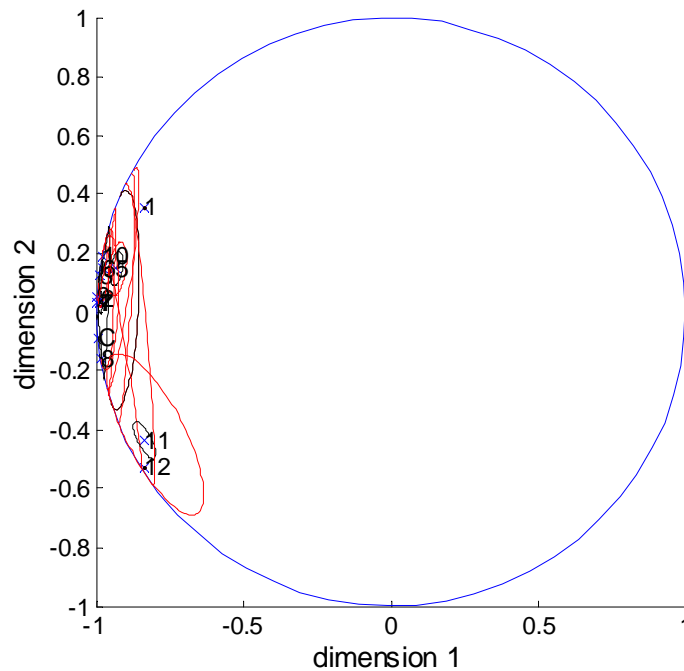


FIG. 5.13 – Plan 1-2 de la MDS sphérique des corrélations inter-juges du descripteur *vert*

Dans la méthode de référence, le cercle de corrélation de l'ACP produits-juges atteste de la qualité globale du consensus : l'inertie du premier axe atteint plus de 90% (cf. figure 5.15, p. 168). De façon plus précise, les degrés de signification du test de Kendall montrent que seul le juge 11 est peu consensuel sur ce descripteur *vert*, avec un degré égal à 0.013% ($>0.01\%$). Pourtant, le juge 12 mérite tout autant cette critique. Comparons le consensus (figure 5.16, p. 169) et la relation agrégée du juge 11 (figure 5.17, p. 169) : selon ce dernier, le produit 8 est dominé par les produits 3, 5, et 6, alors que selon la relation consensuelle, c'est l'inverse. D'autre part, la relation du juge 12 représentée sur la figure 5.18, p. 170 montre un phénomène similaire : l'ordre est presque total, et le produit 8 est classé avant-dernier, soit en position de dominé par rapport aux produits 3, 5 et 6.

Cette différenciation des juges 11 et 12 dans la méthode de référence tient à un léger détail. En effet, le comportement du juge 12 est estimé distinct de celui du juge 11, parce que les ordres totaux induits par leurs mesures moyennées diffèrent par une unique inversion : chez le juge 12, la mesure moyenne du produit 4 est supérieure à celle du produit 2, comme pour le consensus, mais contrairement au juge 11. Ce décalage suffit à reconnaître les ordres totaux du juge 12 et du consensus comme non significativement distincts.

Il convient de souligner que l'indépendance entre les notes moyennes d'un juge et celles du panel n'est pas vérifiée, les secondes étant calculées en fonction des premières. Le test de Kendall est par conséquent faussé, et les degrés de signification surestimés. Pour cette rai-

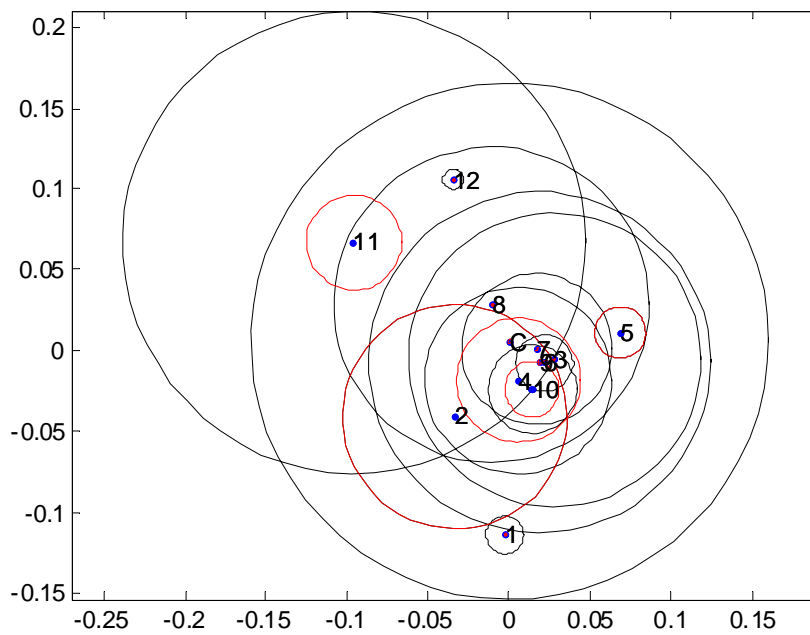


FIG. 5.14 – MDS euclidienne des corrélations inter-juges du descripteur *vert*

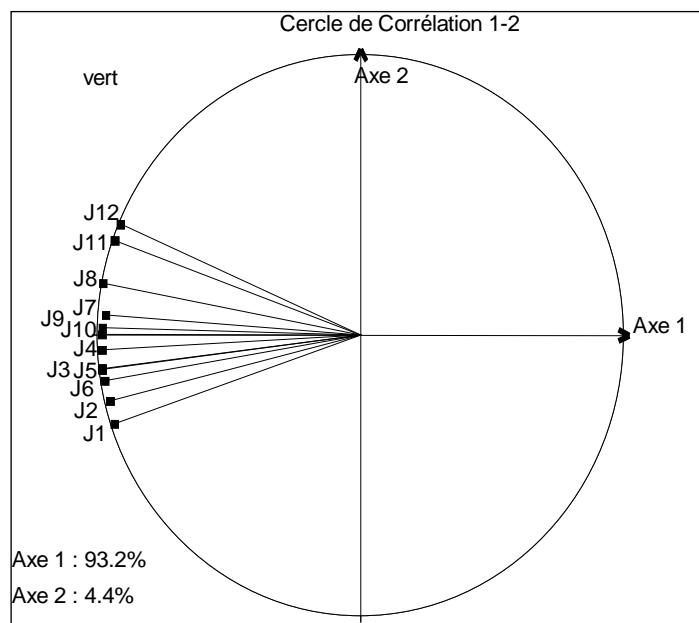


FIG. 5.15 – Cercle de corrélation du premier plan 1-2 de l'ACP produits-juges, Descripteur *vert*

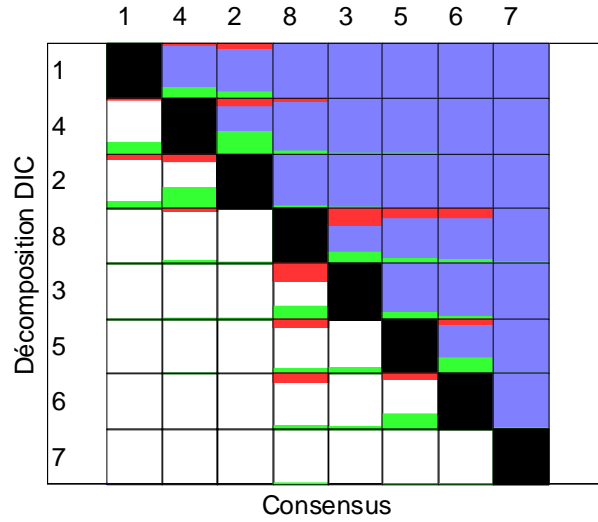


FIG. 5.16 – Descripteur Vert, Consensus

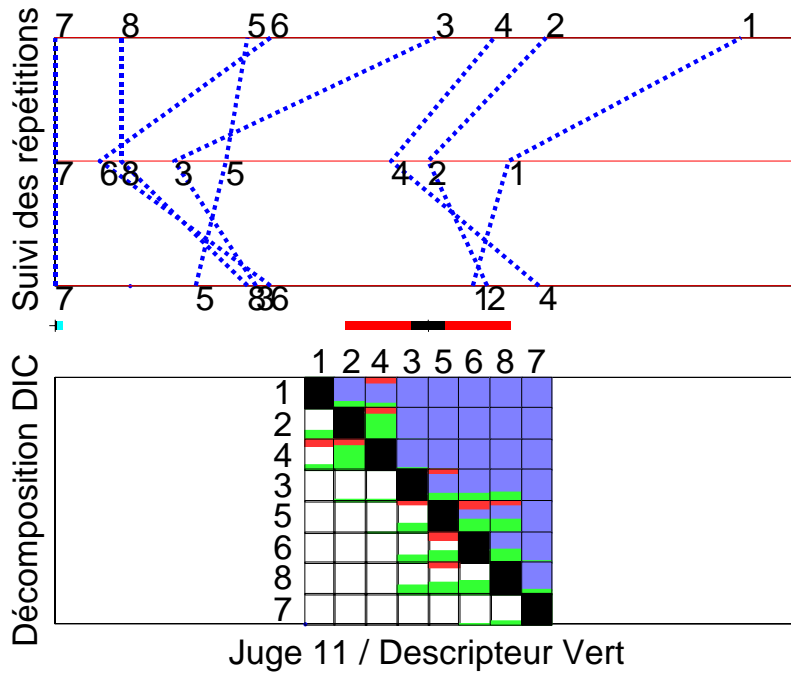


FIG. 5.17 – Descripteur Vert, Juge 11

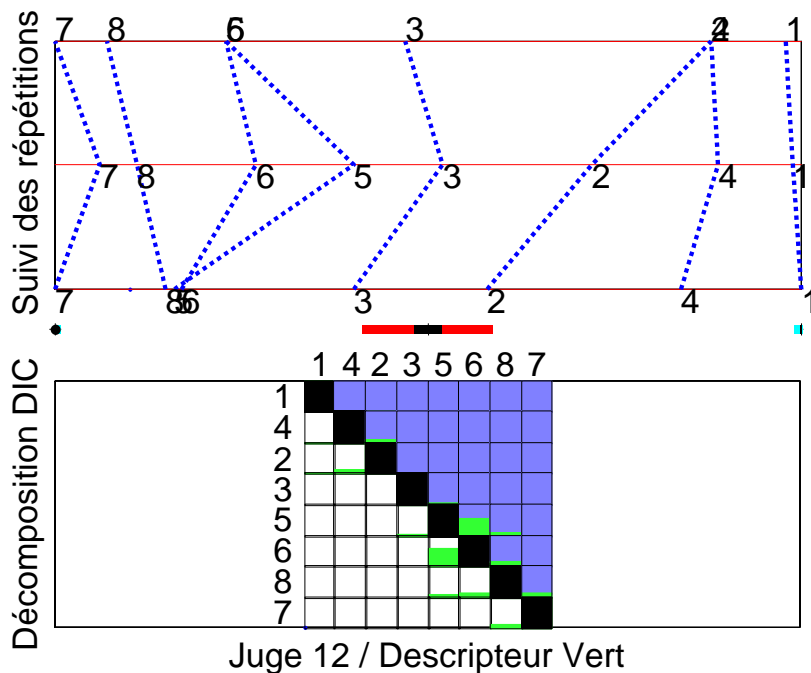


FIG. 5.18 – Descripteur Vert, Juge 12

son, le juge 12, avec un degré de signification de 0.006, devrait vraisemblablement rejoindre le juge 11 dans la catégorie des juges non-consensuels.

Notons finalement que selon notre méthode, il n'y a pas de réel désaccord entre les juges 11 et 12 quant à la dominance du produit 4 sur le produit 2. En effet, la relation du juge 11 (cf. figure 5.17, p. 169) est principalement empreinte d'indiscernabilité, ce qui traduit une réponse peu tranchée. Elle contient également une trace de conflit due à une légère inversion (répétition du bas). L'ordre total issu des moyennes est donc totalement relativisé par la prise en compte des conflits et de l'imprécision des notes.

Sur l'ensemble des descripteurs, les deux méthodes coïncident par ailleurs sur la plupart des résultats : les juges nettement non consensus sont pareillement repérés, de même que les descripteurs mal cernés par l'ensemble du panel. Notre méthode offre toutefois une synthèse plus fine des écarts entre juges.

2 Représentation des produits

Les méthodes usuelles d'analyse de profils sensoriels proposent en général une synthèse de chaque descripteur, en particulier sous la forme de tests de comparaisons multiples, comme le test de Duncan. Aux conclusions de ces tests, nous allons confronter nos propres relations agrégées sur le panel de juges. Puis nous comparerons les représentations multi-descripteurs.

2.1 Mono-descripteur

Pour chaque descripteur, les divergences entre les deux méthodes sont assez faibles. On peut en effet comparer directement le résultat d'un test de Duncan avec une alpha-coupe de la relation de dominance stricte consensuelle (par exemple, au niveau 0.6, assimilable à un niveau moyen de certitude). Il suffit pour cela d'énumérer le nombre de couples de produits discordants. Par rapport à une représentation de type test de Duncan (ou test de Tuckey), les différences apportées par notre méthode au niveau des groupes de produits jugés non discriminés, se limitent à de très légères réductions ou extensions.

Nous donnerons deux exemples représentatifs de ces divergences, à travers le cas des descripteurs *opaque* et *clair/foncé*.

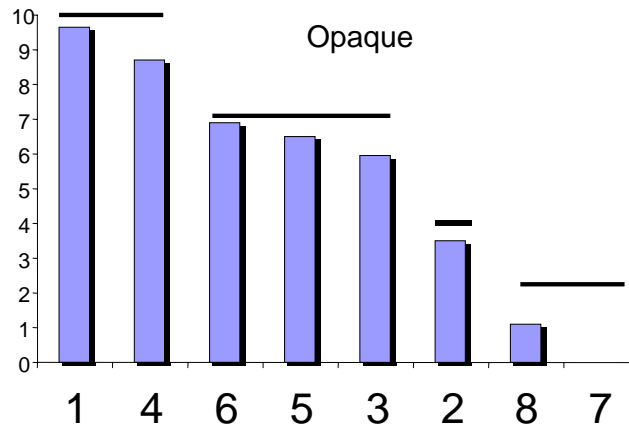


FIG. 5.19 – Descripteur Opaque, Test de Duncan

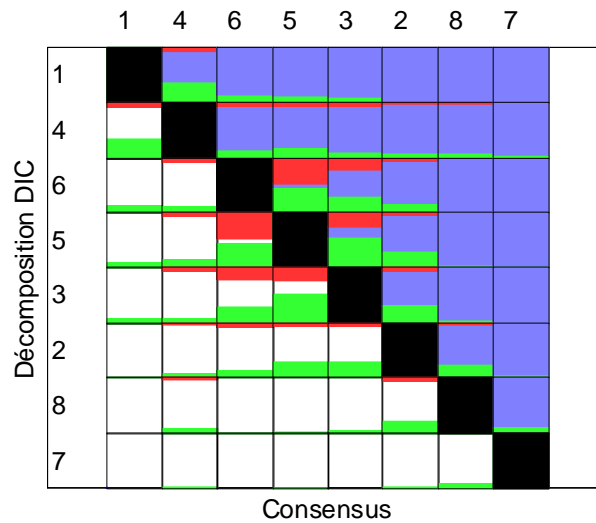


FIG. 5.20 – Descripteur Opaque, Consensus

Sur le test de Duncan de la figure 5.19, p. 171, et la relation consensuelle de la figure 5.20, p. 171, on constate une grande similarité entre les deux interprétations du descrip-

teur *opaque*. Notamment, l'alpha-coupe de niveau intermédiaire de la relation consensuelle donne une discrimination identique, à l'exception du couple de produits 8 et 7 : le test de Duncan les assimile l'un à l'autre, alors que la relation consensuelle présente une claire dominance de 8 sur 7.

Cette légère divergence est intéressante : l'écart entre les deux moyennes est trop faible au regard de l'écart-type pour attester d'une discrimination, mais les juges ont quasiment unanimement placé le produit 7 derrière le produit 8. Notre méthode d'agrégation permet de mettre en évidence ce type de résultat grâce à son mode d'agrégation : la pertinence d'un ordre est recherchée dans sa cohérence sur les répétitions, et non pas sur les seules notes moyennées.

En dehors de cette différence, la plupart des couples de produits mal discriminés (faible dominance stricte), témoignent à la fois d'indiscernabilité et de désaccord. En étudiant précisément les réponses de chaque juge, on s'aperçoit que leur grande majorité ne les a pas nettement ordonnés, ce qui explique l'indiscernabilité moyenne constatée. Quant aux juges restants, ils se divisent en deux clans suivant l'ordre qu'ils ont clairement marqué, ce qui justifie la part de désaccord. On a représenté sur les figures 5.21, p. 172 et 5.22, p. 173, les cas des juges 6 et 11, qui sont en complet désaccord au sujet de l'ordre du couple de produits 5 et 6.

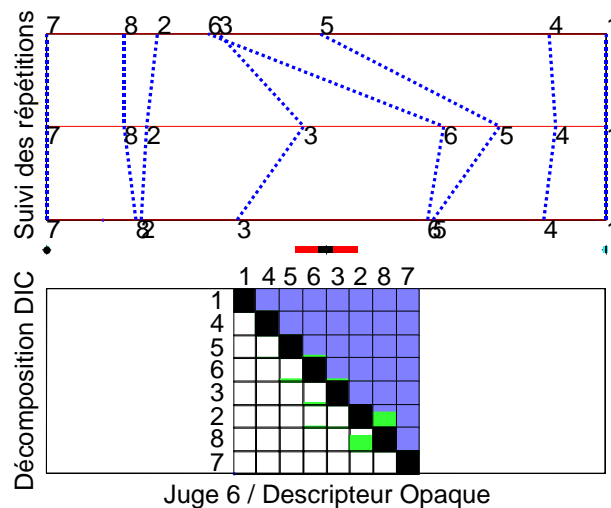


FIG. 5.21 – Descripteur Opaque, Juge 6

Ce désaccord pose question : comment des juges peuvent-ils marquer sans ambiguïté, c'est-à-dire sans se contredire sur les répétitions, des ordres inverses ? Nous proposons les deux hypothèses suivantes :

- l'absence d'ambiguïté est uniquement due au faible nombre de répétitions ; c'est-à-dire que la dominance a été involontairement exprimée par le juge, ou trop catégoriquement interprétée par la méthode d'agrégation ;
- les juges ont mal compris le descripteur, ou ont tendance à forcer leur discrimination, en se laissant influencer par d'autres caractéristiques physiques des produits.

Comme pour le descripteur *opaque*, on relève très peu de différence entre les deux

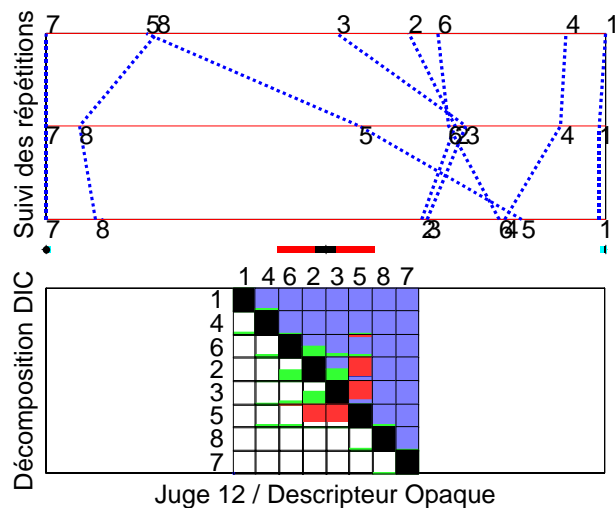


FIG. 5.22 – Descripteur Opaque, Juge 12

résultats de discrimination du descripteur *clair/foncé*. Entre le test de Duncan de la figure 5.23, p. 173, et la relation consensuelle de la figure 5.24, p. 174, le seul écart significatif réside dans la comparaison des produits 8 et 3 : la relation consensuelle témoigne d'un désaccord conséquent, alors que le test de Duncan montre la dominance du produit 8 sur le produit 3.

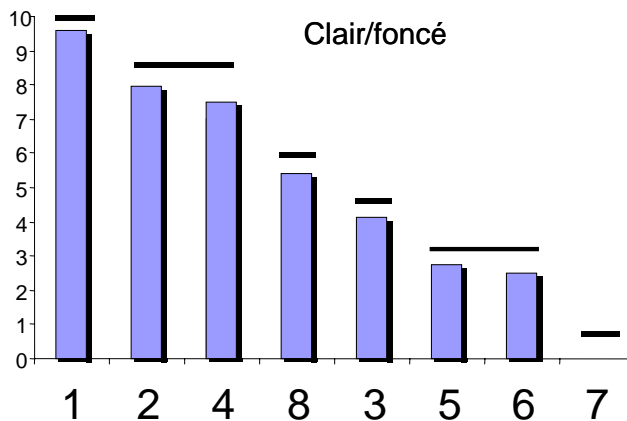


FIG. 5.23 – Descripteur *clair/foncé*, Test de Duncan

Cette situation se justifie de la manière suivante :

- six juges ont nettement marqué la dominance de 8 sur 3 ;
- quatre juges ont nettement marqué le contraire ;
- deux juges les ont estimés équivalents.

Cette diversité des réponses est mise en évidence par la notion de conflit, qui s'interprète ici comme un désaccord, alors qu'elle est ignorée par la moyenne réalisée dans le test de Duncan. Contrairement à cette moyenne, notre procédé d'agrégation permet donc de révéler les singularités des réponses des juges, aussi bien que leurs similarités.

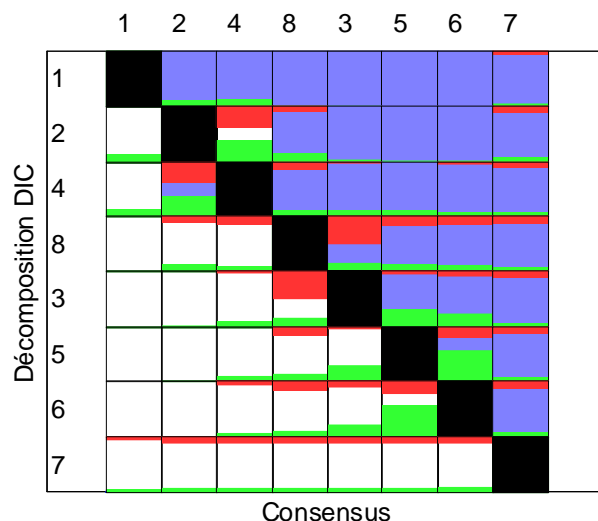


FIG. 5.24 – Descripteur *clair/foncé*, Consensus

Dans cet exemple, les réponses individuelles des juges sont très marquées (ordre nettement maintenu au cours des trois répétitions), et on peut difficilement privilégier l'hypothèse de réponses fortuites. Par ailleurs les cinq groupes de produits discriminés (soit 1, (2,4), (8,3), (5,6) et 6), le sont de façon presque unanime. Il semble donc que les juges ont bien assimilé le descripteur, mais qu'ils ont tendance à introduire des discriminations arbitraires. Ce phénomène se reproduit pour le groupe de produits (2,4).

Ces deux exemples de descripteurs sont assez représentatifs. Parmi les huit descripteurs, il y en a deux pour lesquels on observe un nombre de divergences légèrement supérieur, mais dans l'ensemble les résultats restent sensiblement identiques.

Néanmoins, la moyenne est un opérateur de fusion parfois trop réducteur, et nous avons montré à travers l'exemple du descripteur *clair/foncé* que la notion de désaccord permettait de relativiser la signification d'un écart entre deux moyennes. D'autre part, notre méthode permet de souligner le maintien d'un classement sur un ensemble d'évaluations, indépendamment des variations quantitatives, comme le montre l'exemple du descripteur *opaque*.

2.2 Multi-descripteurs

Il s'agit de comparer la représentation multi-descripteurs classique, à celle présentée dans le chapitre précédent. La méthode classique consiste à réaliser une analyse en composantes principales normée sur les mesures moyennées sur les juges et répétitions. Trois axes principaux ont été retenus, pour une inertie cumulée de 94% (soit 50% pour le premier axe, 28% pour le deuxième, et 16% pour le troisième). Les représentations des produits sont données sur les figures 5.25, p. 175 et 5.26, p. 175, celles des descripteurs sur les figures 5.27, p. 176 et 5.28, p. 176.

Ces représentations sont à comparer avec celles issues de notre méthodes, sur les figures

5.30, p. 179 et 5.31, p. 179 pour les produits, et les figures 5.32, p. 180 et 5.33, p. 180 pour les descripteurs.

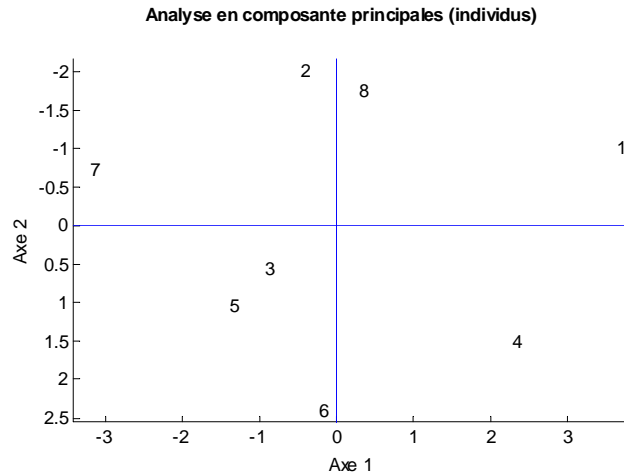


FIG. 5.25 – Plan 1-2 de la représentation des produits par l'ACP des notes moyennées

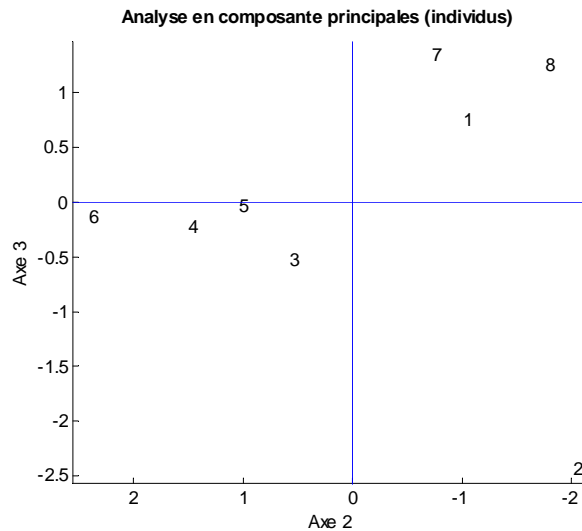


FIG. 5.26 – Plan 2-3 de la représentation des produits par l'ACP des notes moyennées

Les représentations des deux méthodes se distinguent par les différences de traitement de l'information. Ainsi, nos représentations se caractérisent par l'expression imprécise de rapports ordinaux entre produits : les formes projetées des produits sont rendues par des rectangles, et celles des descripteurs le sont par des ellipses tronquées. Les relations floues de dominance stricte ont été réduites à leur alpha-coupe d'un niveau assez élevé (0.7) : nous avons donc retenu des discriminations plutôt « certaines », ce qui a tendance à élargir les formes imprécises.

Inversement, les représentations de l'analyse en composantes principales classique, rendent compte de l'information quantitative moyennée, mais sans aucune gestion de l'imprécision : produits et descripteurs sont donc chacun présentés par un point.

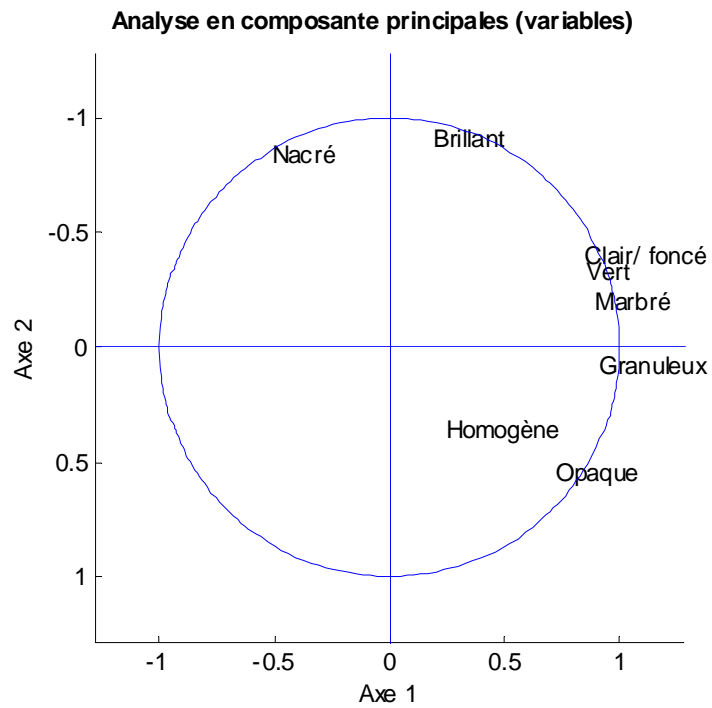


FIG. 5.27 – Plan 1-2 de la représentation des descripteurs par l'ACP des notes moyennées

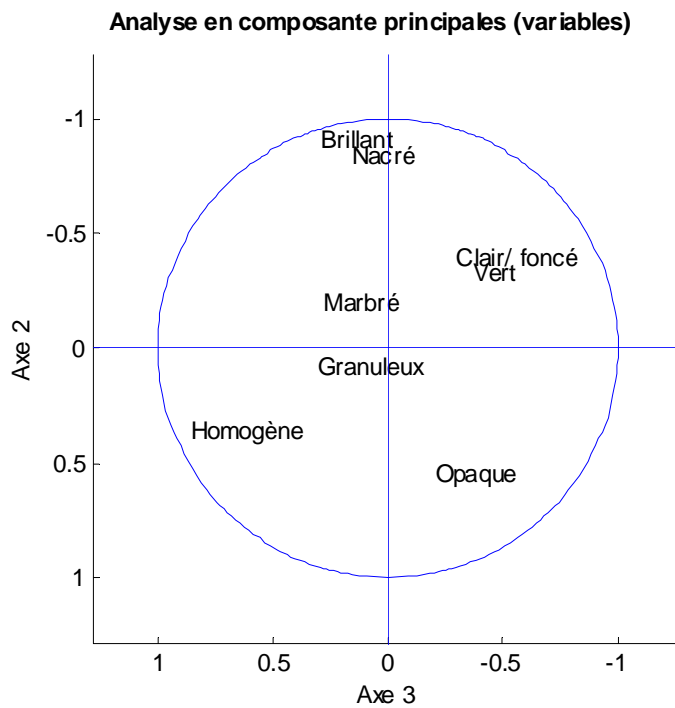


FIG. 5.28 – Plan 1-2 de la représentation des descripteurs par l'ACP des notes moyennées

D'autre part, l'ACP de la méthode de référence est normée, alors que nous n'avons pas modifié l'amplitude des intervalles de pseudo-rangs : cette amplitude, pour chaque descripteur, est fonction croissante du nombre de pseudo-rangs qu'il exploite. Elle correspond donc globalement à la quantité d'information des descripteurs. Par conséquent, avec un niveau de coupe assez élevé, les descripteurs peu consensuels ou peu discriminants risquent de ne pas être fidèlement rendus. Pour cette raison, les descripteurs *homogène* et *brillant* ne seront pas prioritaires : sur la figure 5.29, p. 178, ils exploitent respectivement deux et trois pseudo-rangs, contre six pour le descripteur *clair/foncé*.

En dépit de ces différences fondamentales, on s'aperçoit que les représentations proposées par les deux méthodes sont très semblables :

- Le premier plan de représentation des produits (figures 5.30, p. 179 et 5.25, p. 175) n'offre pas de divergence notable : les positions relatives des produits sont équivalentes dans les deux méthodes. La méthode ordinaire précise cependant la non-discrimination (sur ce plan) des couples de produits (2,8) et (3,5). Ici, ce résultat ne fait que confirmer une interprétation raisonnable du plan de l'ACP classique présenté en figure 5.25, p. 175 : les points 2 et 8, comme les points 3 et 5, sont très proches l'un de l'autre.
- Le second plan de représentation des produits (figures 5.31, p. 179 et 5.26, p. 175) n'est pas aussi rigoureusement identique sur les deux méthodes, en particulier pour les produits 6 et 7. On souligne également le cas du produit 2 qui, situé à une extrémité inférieure de l'axe 3 sur l'ACP classique, n'est pas aussi démarqué dans notre technique. Cette différence s'explique essentiellement par le peu d'inertie du descripteur *homogène* dans notre méthode non normée : caractérisé par l'isolement du produit 2 (cf. figure 5.29, p. 178), ce descripteur justifie à lui seul l'axe 3 de l'ACP classique normée.
- Le premier plan de représentation des descripteurs obtenu par la méthode ordinaire floue (figure 5.32, p. 180) s'apparente fortement à celui de l'ACP classique (figure 5.27, p. 176). Seul le descripteur *homogène*, mal exprimé sur ce plan, montre un léger décalage suivant la méthode. Dans la technique ordinaire floue, le premier axe s'explique principalement par les descripteurs *vert*, *clair/foncé*, *marbré* et *granuleux*, dont les ellipses correspondantes sont très voisines de la projection du descripteur sous-jacent. Sur la figure 5.29, p. 178, on peut vérifier la proximité de ces descripteurs, ainsi que leur caractère fortement discriminant. Le deuxième axe s'explique principalement par les descripteurs *brillant* et *nacré*, dont l'intersection des projections traduit une bonne corrélation.
- Le second plan souligne la même similarité entre les deux méthodes. Mais l'axe 3 est moins bien expliqué par la méthode ordinaire floue, principalement parce que le descripteur *homogène* est très mal défini : la large surface de l'ellipse correspondante traduit son très faible pouvoir discriminant. Deux pseudo-rangs suffisent en effet à exprimer l'ensemble des écarts ordinaux.

On souligne également l'atout que constitue la représentation de l'imprécision des produits. Par exemple, les larges rectangles propres aux produits 5 et 3 s'opposent aux projections des produits 6 et 7, sur les deux plans de l'analyse en composantes principales imprécise. Cette différenciation se retrouve au niveau des intervalles de pseudo-rangs, sur la figure 5.29, p. 178. En effet, sur la totalité des descripteurs, les produits 3 et 5 occupent les plus grands nombres de pseudo-rangs (respectivement 12 et 11), alors que les produits

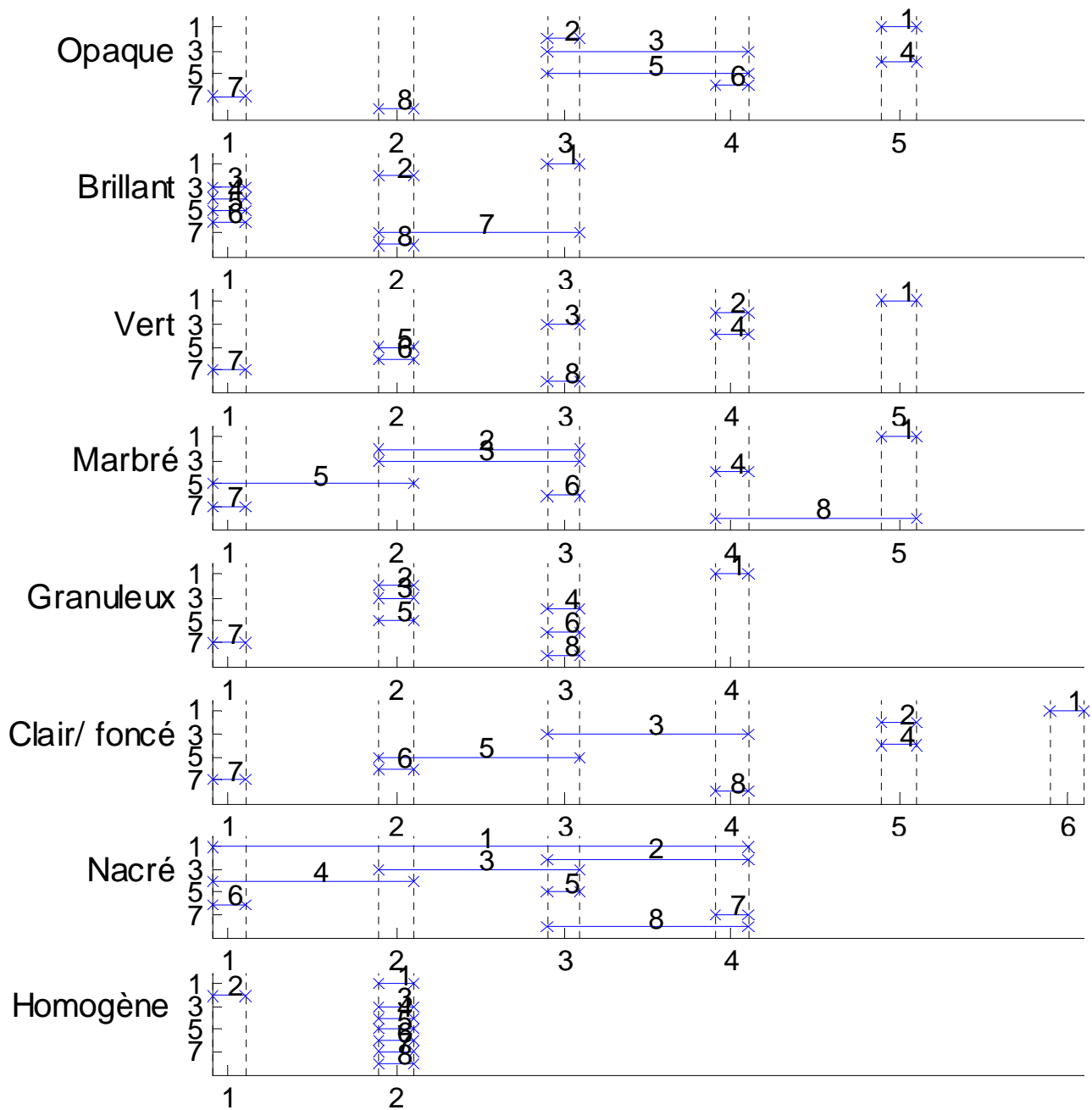


FIG. 5.29 – Intervalles de pseudo-rangs caractéristiques de l'alpha-coupe de niveau 0.7 de la relation de dominance stricte consensuelle de chaque descripteur, avec un espacement $K = 4$

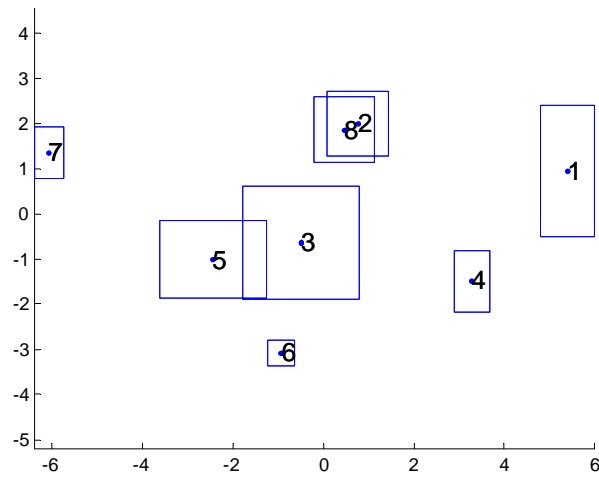


FIG. 5.30 – Plan (1,2) de l'ACP sur les produits de l'analyse multi-descripteurs

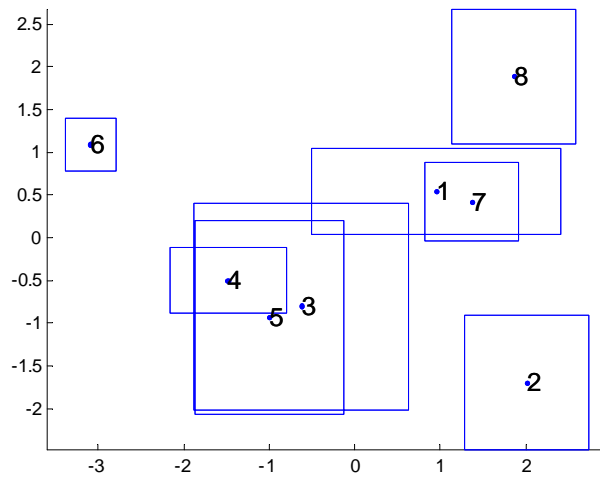


FIG. 5.31 – Plan (2,3) de l'ACP sur les produits de l'analyse multi-descripteurs

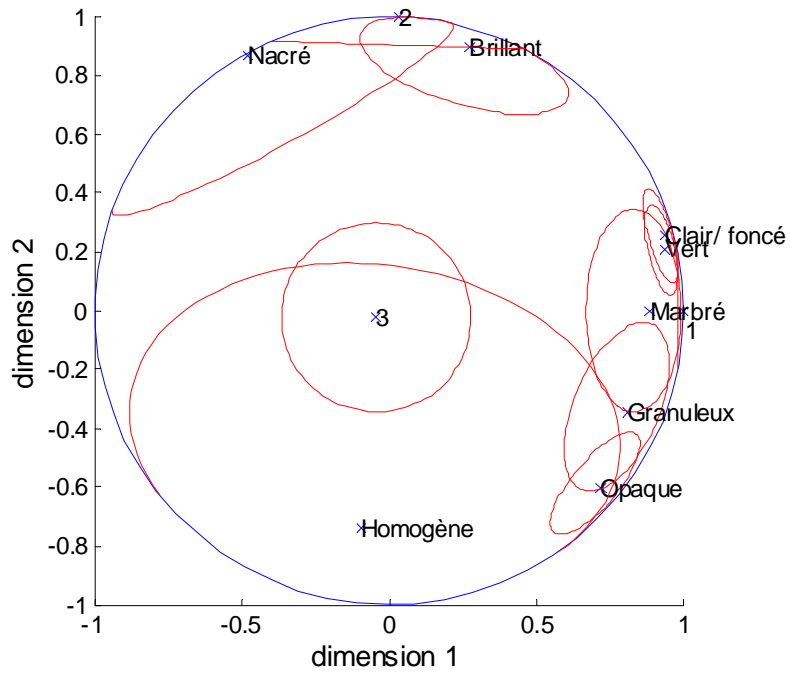


FIG. 5.32 – Plan (1,2) de la représentation sphérique de la corrélation inter-descripteurs

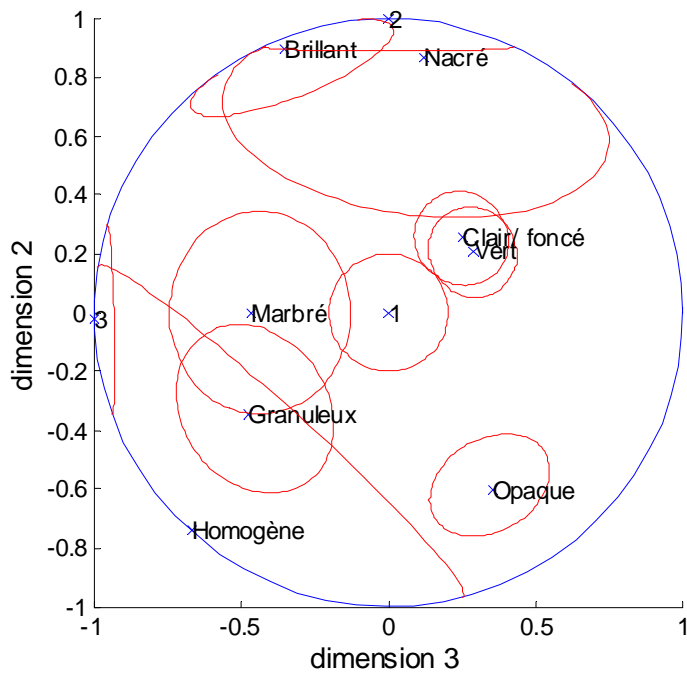


FIG. 5.33 – Plan (2,3) de la représentation sphérique de la corrélation inter-descripteurs

6 et 7 en occupent le minimum (respectivement 6 et 7). Le produit 1 est également singulier, à cause de la largeur de son rectangle de projection sur l'axe 2 : selon le descripteur *nacré*, principalement corrélé à cet axe, son intervalle de pseudo-rangs s'étend en effet sur 4 pseudo-rangs, alors qu'il est correctement discriminé selon les autres descripteurs.

Pour conclure, les deux approches multidimensionnelles aboutissent, sur ce jeu de données, à des résultats très proches. L'information quantitative rejetée dans l'approche ordinaire floue n'apparaît donc pas essentielle, du moins pour ces profils. D'autre part, la représentation de l'imprécision ordinaire est utile à la détection des groupes de produits : ici le couple (5,3), qu'aucun descripteur ne semble pouvoir discriminer nettement. Au niveau de la représentation des descripteurs, elle traduit le caractère plus ou moins discriminant de chacun.

3 Bilan sur la mise en oeuvre sur des profils sensoriels

Sur l'ensemble des réponses apportées par notre méthode ordinaire floue, que ce soit au niveau de la description des juges, des produits ou des descripteurs, nous n'avons donc pas constaté de divergence fondamentale par rapport à la méthode de référence. En revanche, notre méthode se distingue par une multitude de petites différences :

- au niveau du pouvoir discriminant des juges, on note principalement que nos indicateurs sont plus fins, au sens où ils permettent un meilleur nivellement des juges par rapport à cette performance ;
- l'indicateur de répétabilité de notre méthode mesure la stabilité de l'information ordinaire floue sur les répétitions ; par conséquent, elle ne sanctionne que les écarts de mesures qui induisent de franches inversions sur les répétitions, ce qui la rend souvent plus tolérante qu'une variance : cela justifie plusieurs différences constatées ;
- pour le consensus, les deux outils à notre disposition ont l'avantage de gérer l'imprécision des relations ordinaires. C'est particulièrement important lorsqu'ils sont comparés à des outils basés sur les corrélations de rangs classiques. D'autre part, la représentation des corrélations floues inter-juges met en évidence les différences de discrimination entre les juges, ce qui joue un rôle intéressant dans l'interprétation du consensus ;
- les représentations des produits par descripteur sont assez peu éloignées de celles issues de tests de Duncan ; plus précisément, les différences sont assez fréquentes, mais de faible importance. Au niveau de l'agrégation sur les répétitions, nous avons chaque fois pu vérifier la légitimité de ces différences en analysant les évaluations du juge concerné ;
- enfin, au delà de la description de l'imprécision, les représentations multidimensionnelles que nous obtenons sont remarquablement similaires à celles de la méthode de référence. Soulignons à ce propos qu'une part de cette ressemblance est sans doute imputable à la singularité du jeu de données. En effet, la similarité entre les représentations tend à montrer que l'information quantitative ne joue ici qu'un rôle très secondaire, puisqu'elle n'est pas gérée par notre méthode ordinaire floue (à l'exception de la part qui lui permet d'évaluer le degré de certitude des rapports de dominance).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons défendu l'idée selon laquelle le problème de l'analyse de profils sensoriels peut être résolu de façon satisfaisante par le biais des relations ordinales floues. Extraites en amont de la chaîne de traitement, nous avons montré comment ces briques élémentaires d'information pouvaient ensuite être agencées de façon à décrire les produits, les descripteurs et les juges. Définies dans le cadre de la théorie des sous-ensembles flous, ces briques élémentaires intègrent l'imprécision des évaluations des juges, et la propagent jusqu'au bout de la chaîne de traitement, dans l'ensemble des représentations proposées.

Dans le dernier chapitre, nous nous sommes appuyé sur un jeu de données type pour proposer une comparaison entre notre méthode d'analyse ordinaire floue et une méthode classique. Au delà des grands traits saillants pareillement mis en évidence par les deux méthodes, notre technique s'est démarquée par un certain nombre de résultats, dont l'étude détaillée a montré la pertinence. L'approche ordinaire floue s'est donc montrée capable de révéler des phénomènes susceptibles d'intéresser l'analyste.

Plusieurs aspects de la méthode appellent des améliorations. Tout d'abord, il est évident que la notion de pseudo-rangs doit être généralisée au flou, de façon à homogénéiser les représentations multidimensionnelles sur les différents niveaux d'alpha-coupe. La représentation multidéscripteurs des produits est également susceptible d'être retravaillée, afin d'obtenir un meilleur contrôle sur la détermination des descripteurs sous-jacents. Soulignons que l'algorithme proposé d'approximation d'un ordre partiel flou par un ordre d'intervalles flou est d'une grande complexité : un critère différent, ou optimisé de manière approchée, permettrait de généraliser son application à des ensembles de produits de plus grande taille.

Ensuite, la caractérisation des nombres flous que nous décrivons, basée sur un principe de maximisation de la dominance, est une proposition semble-t-il satisfaisante, mais qui peut probablement être améliorée. L'ensemble de la chaîne de traitement statistique est en effet indépendante de la technique d'extraction des relations ordinales floues sur chacune des répétitions. Pour cette raison, il serait d'ailleurs très intéressant de poursuivre les investigations à propos de la capacité des juges à évaluer leurs imprécisions.

Au terme de cette thèse, les perspectives envisagées concernent donc d'abord l'amélioration des composantes multidéscripteurs de notre chaîne d'analyse. Elles se dirigent ensuite vers l'étude de la variabilité des relations ordinales floues pour un même couple juge-descripteur, afin de vérifier que les briques élémentaires d'information retenues sont relativement invariantes : des résultats encourageants ont été présentés en annexe, mais ils

ne suffisent pas à conclure sur le sujet. Enfin, le protocole d'évaluation utilisé n'est sans doute pas le plus adapté à un traitement ordinal flou. Mis à part le recueil des intervalles d'imprécision auprès des juges, il serait en effet envisageable de composer les relations ordinales floues de façon plus directe, en interrogeant les juges sur leurs différences de perception par couple de produits, ces différences étant exprimées sous forme d'un ordre complété d'un degré de certitude. Il devrait être possible de limiter le nombre de paires de produits à comparer, en exploitant des résultats obtenus en entraînement sur les proximités entre produits, ou en proposant une procédure d'évaluation adaptative, capable de suggérer de nouvelles comparaisons utiles compte tenu de celles déjà effectuées.

Bibliographie

- [1] M.A. BENDER, M. GASTALDO et M. MORVAN : Parallel interval order recognition and construction of interval representations. *Theoretical Computer Science*, 143:73–91, 1995.
- [2] I. BORG et P. GROENEN : *Modern multidimensional scaling*. Springer, New York, 1988.
- [3] H. BOURLARD et Y. KAMP : Auto-association by multilayer perceptrons and singular value decomposition. *Biological Cybernetics*, 59:291–294, 1988.
- [4] R. BUBLEY et D. DYER : Faster random generation of linear extensions. In *Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 175–186, San Francisco, CA, 1998.
- [5] A. BUFARDI : On the fuzzification of the classical definition of preference structure. *Fuzzy Sets and Systems*, 104(2):323–332, 1999.
- [6] A. BUFARDI : An alternative definition for fuzzy interval orders. *Fuzzy Sets and Systems*, 133:249–259, 2003.
- [7] P. CAZES, A. CHOUAKRIA, E. DIDAY et Y. SCHEKTMAN : Extension de l'analyse en composantes principales à des données de type intervalle. *Revue de Statistique Appliquée*, XLV(3):5–24, 1997.
- [8] T. COURONNE : A study of assessors' performance using graphical methods. *Food Quality and Preference*, 8(5-6):359–365, 1997.
- [9] T.F. COX et M.A.A. COX : Multidimensional scaling on a sphere. *Communications in Statistics*, 20(9):2943–2954, 1991.
- [10] T.F. COX et M.A.A. COX : *Multidimensional scaling*. Chapman and Hall, London, 1994.
- [11] V.J. DAVIDSON et W. SUN : A linguistic method for sensory assessment. *Journal of Sensory Studies*, 13(1):315–330, 1998.
- [12] B. DE BAETS et B. Van de WALLE : Weak and strong fuzzy interval orders. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:213–225, 1996.
- [13] T. DENÈUX et M. MASSON : Multidimensional scaling of interval-valued dissimilarity data. *Pattern Recognition Letters*, 21:83–92, 2000.
- [14] T. DENÈUX et M. MASSON : Principal component analysis of fuzzy data using autoassociative neural networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(3):336–349, 2004.

- [15] T. DENŒUX, M.-H. MASSON et P.-A. HÉBERT : Nonparametric rank-based statistics and significance tests for fuzzy data. Accepté par *Fuzzy Set and Systems* le 21 janvier 2005, 2005.
- [16] SSHA (Société Scientifique d'Hygiène ALIMENTAIRE) : *Evaluation sensorielle, manuel méthodologique*. Collection Sciences & Techniques Agroalimentaires. Lavoisier Tec & Doc, Paris, 1990.
- [17] D. DUBOIS et H. PRADE : *Possibility Theory. An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [18] D. DUBOIS et H. PRADE : *Fundamentals of fuzzy set*, volume 7 de *The Handbooks of Fuzzy Sets Series*, pages 59 et 251–254. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [19] D.B. DUNCAN : Multiple range and multiple F test. *Biometrics*, 11:1–42, 1955.
- [20] P. FAYE, L. KIRSCHÉ et O. LESCOP : Using anova and duncan multiple comparison test to optimise tests in odour quality control of car cabin materials. *In ASMDA 2001, 10th Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis*, pages 416–423, Compiègne, France, 2001.
- [21] G.T. FECHNER : *Element of Psychophysik*. Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1860.
- [22] D. FILEV et R.R. YAGER : On the issue of obtaining owa operators weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 94(2):157–169, 1998.
- [23] P.C. FISHBURN : *Interval orders and interval graphs*. Wiley, New York, 1985.
- [24] R.A. FISHER : *The design of experiments*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1935.
- [25] J. FODOR et M. ROUBENS : *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. Theory and Decision Library, Series D, System Theory, Knowledge Engineering and Problem Solving. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [26] J.C. GOWER : Generalized procustes analysis. *Psychometrika*, 40(1):33–51, 1975.
- [27] V. HA et P. HADDAWY : Similarity of personal preferences : theoretical foundations and empirical analysis. *Artificial Intelligence*, 146(2):149–173, 2003.
- [28] M. HAMDI, G. LACHIVER et F. MICHAUD : A new predictive thermal sensation index of human response. *Energy and building*, 29(2):167–178, 1999.
- [29] P.A. HÉBERT, M. MASSON et T. DENŒUX : Fuzzy rank correlation between fuzzy numbers. *In In Proceedings of the 10th IFSA World congress*, pages 224–227, Istanbul, Turquie, 2003.
- [30] D. HIRST et T. NÆS : A graphical technique for assessing differences among a set of rankings. *Journal of Chemometrics*, 8:81–93, 1994.
- [31] I. IOANNOU, N. PERROT, J. HOSSENLOPP, G. MAURIS et G. TRYSTRAM : The fuzzy set theory : a helpful tool for the estimation of sensory properties of crusting sausage appearance by a single expert. *Food Quality and Preference*, 13(7-8):589–594, 1999.
- [32] M.G. KENDALL : *Rank correlation methods*. Hafner Publishing Company, New York, 1948.
- [33] C. LAVIT : *Analyse conjointe de tableaux quantitatifs*. Masson, Paris, 1988.
- [34] H. L'Hermier des PLANTES : *Structuration des tableaux à trois indices de la statistique*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier, 1976.
- [35] S.-T. LIU et C. KAO : Fuzzy measures for correlation coefficient of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 128(2):267–275, 2002.

- [36] M. MASSON et T. DENŒUX : Multidimensional scaling of fuzzy dissimilarity data. *Fuzzy Sets and Systems*, 128(3):339–352, 2002.
- [37] G. MAURIS et L. FOULLOY : A fuzzy symbolic approach to formalize sensory measurements : an application to a comfort sensor. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 51(4):712–715, 2002.
- [38] T. NÆS : Detecting individual differences among assessors and differences among replicates in sensory profiling. *Food Quality and Preference*, 9(3):107–110, 1998.
- [39] M. O'HAGAN : Aggregating template rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. In *Proceedings of the 22nd Annual IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 681–689, Pacific Grove, CA, 1988.
- [40] S.A. ORLOVSKY : Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:155–167, 1978.
- [41] J. PAGÈS : Le traitement statistique des données sensorielles. *La revue de Modulad*, 18:1–20, 1997. périodique du club Modulad, INRIA.
- [42] P. PERNY et B. ROY : The use of fuzzy outranking relations in preference modelling. *Fuzzy Sets and Systems*, 49:33–53, 1992.
- [43] E.M. QANNARI, P. COURCOUX, M. LEJEUNE et O. MAYSTRE : Comparaison de trois stratégies de détermination d'un compromis en évaluation sensorielle. *Revue de Statistique Appliquée*, XLV(1):61–74, 1997.
- [44] E.M. QANNARI, H.J.H MACFIE et P. COURCOUX : Performance indices and isotropic scaling factors in sensory profiling. *Food Quality and Preference*, 10(1):17–21, 1998.
- [45] M. ROUBENS et Ph. VINCKE : *Preference modelling*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [46] B. ROY et D. BOUYSSOU : *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*. Economica, Paris, 1993.
- [47] J.C. SANTAMARINA et J.L. CHAMEAU : Membership functions ii : trends in fuzziness and implications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1:303–317, 1987.
- [48] G. SAPORTA : *Probabilités analyse des données et statistiques*. Technip, Paris, 1990.
- [49] S.S. STEVENS : On the psychophysical law. *Psychological Review*, 64:153–181, 1957.
- [50] J. TAN, X. GAO et D.E. GERRARD : Application of fuzzy sets and neural networks in sensory analysis. *Journal of Sensory Studies*, 14(2):119–138, 1999.
- [51] M.W. TROSSET : Visualizing correlations. Rapport technique, Department of Mathematics, College of William & Mary, Williamsburg, USA, 2002. <http://www.math.wm.edu/~trosset>.
- [52] I. URDAPILLETA : *Traité d'évaluation sensorielle, aspects cognitifs et métrologiques des perceptions*. Dunod, Paris, 2001.
- [53] B. Van de WALLE, B. DE BAETS et E. KERRE : A plea for the use of lukasiewicz triplets in the definition of fuzzy preference structures. (i). general argumentation. *Fuzzy Sets and Systems*, 97(3):349–359, 1998.
- [54] R.R. YAGER : On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.
- [55] L.A. ZADEH : Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.

- [56] L.A. ZADEH : Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Science*, 3:177–200, 1971.
- [57] X. ZENG et L. KOEHL : Représentation de l'évaluation subjective du toucher des étoffes par les techniques floues. *In Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications (LFA99)*, Valenciennes, France, 1999. Cépaduès.
- [58] X. ZENG, L. KOEHL, M. SAHNOUN, M.-A. BUENO et M. RENNER : Analyse des données sensorielles du toucher des étoffes par les techniques floues. *In Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications (LFA02)*, Montpellier, France, 2002. Cépaduès.

Annexe A

Robustesse des relations ordinales floues

Cette étude vise à éprouver la robustesse de l'information retenue par la méthode ordinaire floue. Pour chaque descripteur, les perceptions de chacun des juges sont établies à partir d'un très faible nombre de répétitions (trois), ce qui ne favorise pas un traitement statistique inférentiel : c'est en partie ce constat qui nous a incités au développement d'une technique descriptive. Cependant, si les relations ordinales floues sont d'emblée intéressantes en tant que témoins des rapports ordinaux marqués sur trois séances d'évaluation, il serait souhaitable qu'elles recouvrent une réalité moins conjoncturelle.

C'est en effet dans ce but que l'on évalue les perceptions du juge sur trois répétitions plutôt que sur une seule : on s'affranchit alors autant de l'incapacité du juge à quantifier exactement ses sensations sur une séance d'évaluation, que d'une éventuelle instabilité de ses réponses au cours du temps, ces deux causes de variation paraissant indissociables. L'accroissement du nombre de répétitions permet l'accès à une information plus persistante, car moins dépendante des erreurs d'évaluation du juge d'une part, et de la variabilité de ses perceptions d'autre part.

Il semble par conséquent intéressant de mesurer cette robustesse. Dans cette expérience sur les plaques translucides, outre les trois répétitions précédemment traitées, nous disposons d'un ensemble de dix-sept répétitions de notes ponctuelles, obtenues auprès du même panel de juges, pour cinq des huit descripteurs : *opaque*, *brillant*, *granuleux*, *clair/foncé*, et *nacré*.

En agrégeant ces dix-sept répétitions pour chaque juge, il doit être possible d'obtenir une réponse moyenne caractéristique de sa perception du descripteur, que nous appellerons *relation de référence*. Pour cela, nous proposons d'adapter la technique d'agrégation, en préférant un opérateur moyenne (*owa* de degré de disjonction 0.5) à celui utilisé jusque là (*owa* de degré de disjonction 0.2).

Dans un premier temps, nous comparerons les relations floues issues d'un échantillon de combinaisons de trois répétitions aléatoirement choisies parmi les dix-sept, au produit de l'agrégation moyenne des dix-sept répétitions. Puis nous exploiterons ces relations de référence pour évaluer la pertinence des données intervalles. On a en effet demandé aux

juges d'encadrer eux-mêmes leur mesure (valeur centrale) par un intervalle d'imprécision : on s'interroge alors sur la capacité d'une unique répétition à renseigner sur la perception moyenne du juge.

1 Evaluation des écarts aux relations de référence

Nous proposons ici une méthode de mesure de la dissimilarité entre deux relations d'ordre partiel \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 , qui ne s'appuie pas sur la notion de corrélation floue. En effet, nous préférons une mesure nette qui tienne compte de la différence de discrimination au niveau de chaque paire de produits.

Une solution évidente consisterait à baser le calcul sur la somme :

$$\sum_{(x,y) \in X \times X} \left| \tilde{P}_1(x,y) - \tilde{P}_2(x,y) \right|.$$

Pourtant ce calcul est difficilement interprétable, car il ne renseigne pas sur la répartition de l'erreur sur l'ensemble des paires d'objets. Une solution plus satisfaisante consiste à tolérer une marge d'erreur δ sur les degrés de dominance stricte de chaque paire d'objets $\{x,y\}$, puis dénombrer les paires qui franchissent ce seuil. Pour chacune, ce dépassement sanctionne ce qu'on appellera une *erreur* de discrimination. Nous définissons donc une mesure de dissimilarité égale au nombre de paires d'objets sur lesquels une telle erreur est observée ; on la désignera comme un *nombre d'erreurs* bien qu'elle ne soit pas définie sur \mathbb{N}^* :

$$Diss_\delta(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) = \# \left\{ \{x,y\} \in X \times X / \left| \tilde{P}_1(x,y) - \tilde{P}_2(x,y) \right| + \left| \tilde{P}_1(y,x) - \tilde{P}_2(y,x) \right| > \delta \right\}.$$

Cette formule prend en compte l'asymétrie des ordres partiels. Pour toute paire d'objets $\{x,y\}$, deux cas sont possibles : $\tilde{P}_1(x,y) = 0$ et $\tilde{P}_2(x,y) = 0$, ou $\tilde{P}_1(x,y) = 0$ et $\tilde{P}_2(y,x) = 0$. Suivant le cas, la condition d'inclusion d'une paire $\{x,y\}$ parmi les paires discordantes peut se décomposer ainsi :

- cas $\tilde{P}_1(x,y) = 0$ et $\tilde{P}_2(x,y) = 0$: $\left| \tilde{P}_1(y,x) - \tilde{P}_2(y,x) \right| > \delta$;
- cas $\tilde{P}_1(x,y) = 0$ et $\tilde{P}_2(y,x) = 0$: $\left(\tilde{P}_1(y,x) + \tilde{P}_2(x,y) \right) > \delta$.

On justifie ce calcul autrement. Soit $Err(a,b)$ une fonction testant l'inégalité entre deux valeurs a,b :

$$Err : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

$$(a,b) \rightarrow 1 \text{ si } a \neq b, 0 \text{ sinon,}$$

alors :

$$Diss_\delta(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) = \# \left\{ \{x,y\} \in X \times X / \text{tels que :} \right.$$

$$\left. \int_0^1 \left[Err \left((\tilde{P}_1)_\alpha(x,y), (\tilde{P}_2)_\alpha(x,y) \right) + Err \left((\tilde{P}_1)_\alpha(y,x), (\tilde{P}_2)_\alpha(y,x) \right) \right] d\alpha > \delta \right\}.$$

Nous avons fixé δ avec une valeur raisonnable ($\delta = 0.35$). Ainsi, pour une valeur $\tilde{P}_1(x, y) = 1$, il n'y aura pas d'erreur sur la discrimination de la paire $\{x, y\}$ si $\tilde{P}_2(x, y) \geq [0.65; 1]$. Pour un ordre moins net $\tilde{P}_1(x, y) = 0.5$, l'erreur se produira si $\tilde{P}_2(x, y)$ se trouve en dehors de l'intervalle $[0.15; 0.85]$.

2 Robustesse de combinaisons de mesures ponctuelles

Pour chaque juge et descripteur, nous avons aléatoirement sélectionné cent combinaisons distinctes de trois répétitions parmi les dix-sept disponibles. Le produit d'agrégation de chacune des combinaisons est ensuite comparé au produit d'agrégation des dix-sept répétitions du même couple juge-descripteur, grâce à la mesure de dissimilarité précédemment décrite.

Les boîtes à moustaches représentatives des dissimilarités calculées sur chaque couple descripteur-juge sont représentées sur la figure A.1, p. 191.

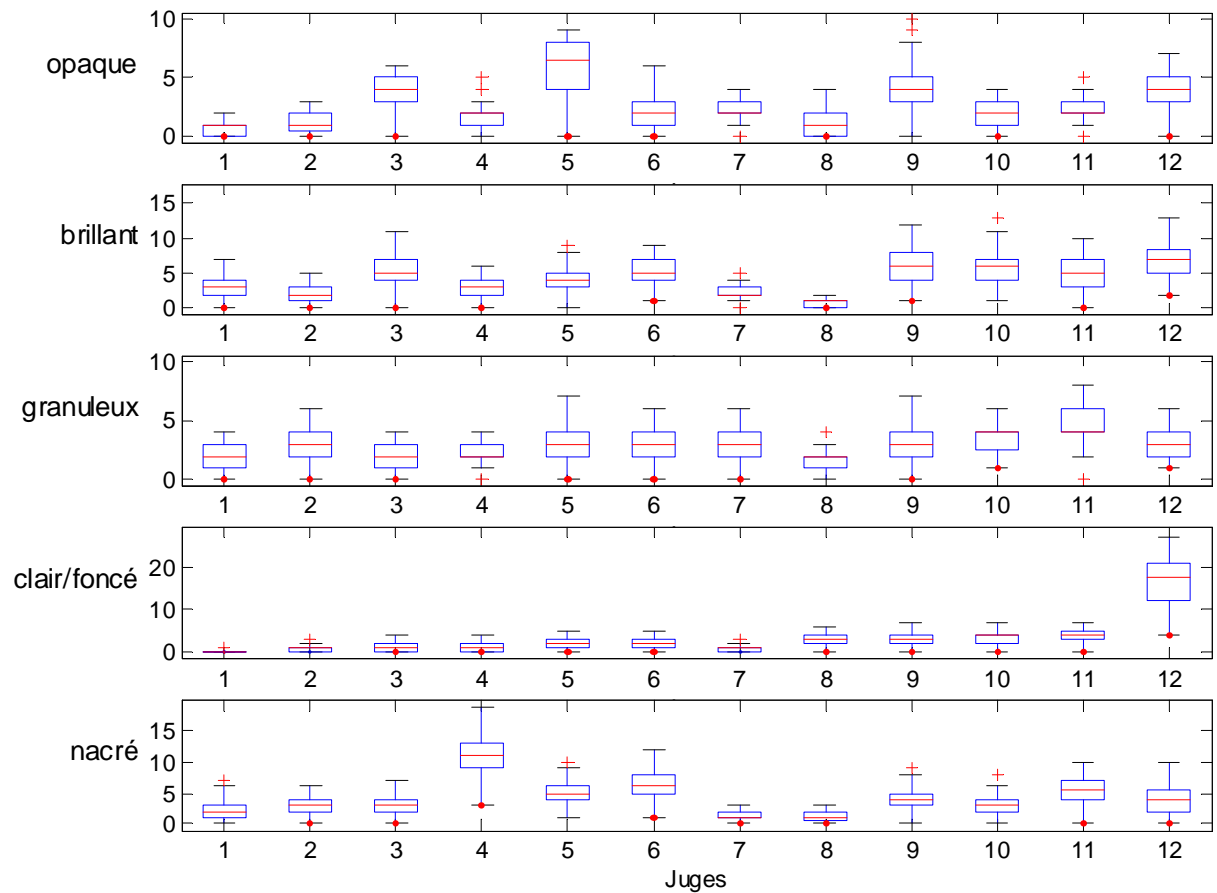


FIG. A.1 – Dissimilarités entre les agrégations de combinaisons de 3 répétitions et les relations de référence

Les erreurs moyennes sont données dans le tableau suivant :

<i>Juges</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	MOYENNE
Opaque	0.6	1.2	3.8	1.7	5.9	2.1	2.2	1.2	4.3	2.1	2.2	3.7	2.6
Brillant	3.0	2.0	5.4	2.8	4.3	5.1	2.5	0.6	6.0	5.7	5.0	6.8	4.1
Granuleux	2.0	3.0	1.9	2.2	2.8	3.2	2.7	1.8	3.0	3.5	4.5	3.1	2.8
Clair/foncé	0.2	0.9	1.0	1.0	2.0	2.0	0.9	3.0	2.9	3.4	3.9	16.6	3.2
Nacré	2.0	3.0	3.3	10.8	5.0	6.3	1.5	1.1	3.9	2.9	5.4	4.1	4.1
MOYENNE	1.6	2.1	3.1	3.7	4.0	3.8	2.0	1.5	4.0	3.5	4.2	6.9	3.4

Le premier constat concerne les différences entre les juges et descripteurs. Ainsi, quatre juges semblent fournir des relations particulièrement stables, avec en moyenne une à deux erreurs de discrimination sur les vingt-huit couples de produits possibles. Ce sont les juges 1, 2, 3, 7 et 8, qui ont précédemment été évalués comme les plus répétables (cf. figure 4.23, p. 145). Ces juges sont également très discriminants : c'est important, car dans l'hypothèse contraire, la stabilité n'eût pas été très significative. Enfin, les descripteurs les moins stables sont aussi ceux que nous avons jugés les moins discriminants ou répétables (cf. les descripteurs *nacré* et *brillant* sur la figure 4.24, p. 145). Quant aux autres couples juge-descripteurs, les résultats semblent moins intéressants avec trois erreurs en moyenne, mais une plus forte variabilité.

Ces résultats sont positifs pour les bons juges, sans doute moins pour les autres. On peut mettre en cause la pertinence de la relation de référence, agrégée sur dix-sept répétitions : avec un opérateur moyenne la technique du maximum de dominance n'apparaît pas très performante, en privilégiant des nombres flous assez faibles. D'autre part, un tel opérateur avec un grand nombre de répétitions devrait intuitivement déboucher sur un *conflit* quasi-nul, la notion « d'aberration moyenne » ne paraissant pas pertinente. Enfin, on peut également considérer que ces profils sensoriels sont issus d'une évaluation monadique qui reste un exercice assez difficile.

On peut enfin souligner que ces variations n'affectent qu'assez peu l'agrégation des réponses des juges : l'opérateur moyenne de ce processus d'agrégation tend en effet à atténuer les singularités exprimées par chaque juge.

3 Robustesse des répétitions uniques de mesures intervalles

Pour chacun des couples juge-descripteurs, on cherche à évaluer la dissimilarité entre la relation de référence obtenue sur les dix-sept évaluations de notes ponctuelles, avec la relation directement issue de l'une des sept répétitions de données intervalles à notre disposition.

Les évaluations ont été conduites par *PSA Peugeot Citroën* de la façon suivante :

- Une première note était demandée, *note centrale*, caractéristique du produit selon le descripteur donné, cette note devant être équivalente à celle obtenue dans les évaluations classiques ;
- puis les juges étaient interrogés sur l'imprécision qu'ils estimaient accompagner la note précédemment donnée, à travers la question suivante : « Quelle note minimale

semble encore pouvoir caractériser le produit ? » ; puis « Quelle note maximale (...) ? », de façon à obtenir un *intervalle* contenant la note centrale.

Ainsi, l'étape d'évaluation de l'imprécision de notre traitement statistique devenait inutile : chaque ensemble constitué d'une note centrale et d'un intervalle d'imprécision a été directement transformé en un nombre flou triangulaire, en définissant son sommet comme la note centrale, et sa base comme l'intervalle d'imprécision. Le reste du traitement demeure identique.

Pour chaque couple juge-descripteur, nous avons reporté sur la figure A.2, p. 193, les boîtes à moustaches représentatives des erreurs de discrimination (par rapport à la relation de référence) mesurées sur les sept répétitions d'intervalles à notre disposition.

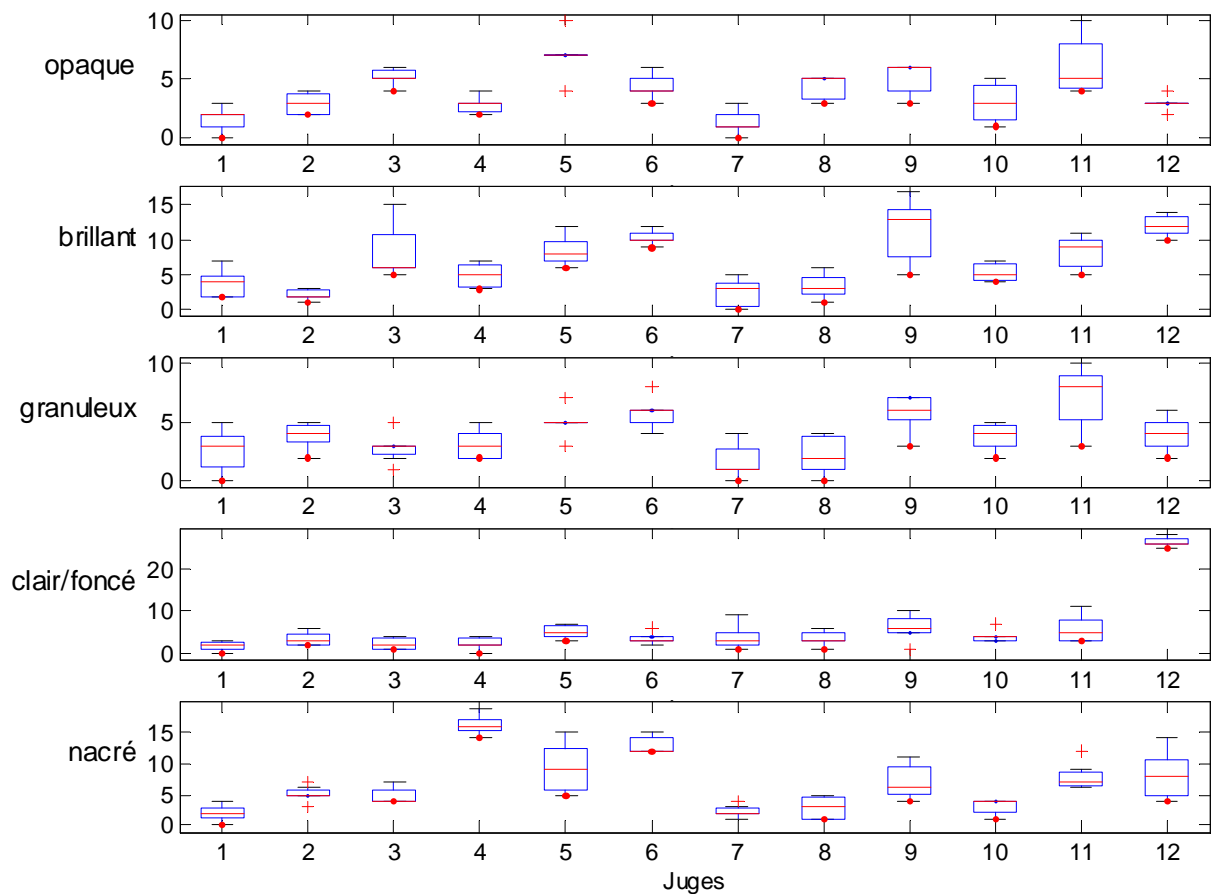


FIG. A.2 – Dissimilarités entre les relations issues des données intervalles (1 répétition) et les relations de référence

Le tableau suivant désigne l'ensemble des moyennes obtenues :

<i>Juges</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	MOYENNE
Opaque	1.6	2.9	5.1	2.9	7.0	4.4	1.4	4.3	5.0	3.0	6.0	3.0	3.9
Brillant	3.7	2.1	8.4	4.9	8.4	10.4	2.4	3.3	11.4	5.4	8.3	12.0	6.7
Granuleux	2.6	3.9	2.9	3.1	5.0	5.7	1.7	2.1	5.9	3.7	7.1	4.0	4.0
Clair/foncé	1.7	3.4	2.4	2.4	5.1	3.6	3.9	3.7	6.3	4.1	5.9	26.4	5.7
Nacré	2.0	5.1	4.9	16.3	9.4	13.0	2.3	2.9	7.1	3.1	7.7	8.1	6.8
MOYENNE	2.3	3.5	4.7	5.9	7.0	7.4	2.3	3.3	7.1	3.9	7.0	10.7	5.4

On note ici de très fortes inégalités : ainsi les quatre juges précédemment repérés comme stables sont là encore les meilleurs ; on peut leur ajouter le juge 10 également très stable. Les autres juges semblent nettement moins performants.

Par rapport aux dissimilarités des agrégations sur trois répétitions de notes ponctuelles, on note que les bons juges accusent en moyenne moins de deux erreurs supplémentaires. En particulier, le juge 7 obtient des résultats aussi bons. Chez les autres juges, les erreurs peuvent à l'inverse augmenter bien plus sensiblement.

Ces évaluations d'intervalles constituaient une nouveauté radicale pour le panel de juges, et il serait imprudent de conclure sur la pertinence de telles données sur cette courte expérience. Néanmoins, les résultats de certains juges sont prometteurs, ce qui laisse penser que l'acquisition de l'imprécision n'est pas totalement illusoire. Quant au nombre de répétitions nécessaire à une bonne estimation des perceptions « moyennes », il apparaît qu'une seule puisse suffire, du moins chez les juges les plus stables.

Le traitement des répétitions ne peut cependant pas être évacué, ne serait-ce que pour déterminer les juges les plus performants. Il est toutefois intéressant de constater que les juges performants le sont pour l'ensemble des descripteurs, et que l'on peut les repérer en mesurant leur conflit sur trois répétitions : c'est-à-dire que la mesure de stabilité sur une plus grande quantité de répétitions n'est pas nécessaire. Il est donc imaginable d'identifier les juges stables sur un court entraînement, avec un nombre minimal de descripteurs, pour finalement mesurer leurs perceptions lors d'évaluations mono-répétition. Bien sûr, on ne pourra confirmer la validité de telles hypothèses, qu'en menant des études prospectives beaucoup plus approfondies.