

PS80 : Examen final

Durée : 2 heures — Documents et calculatrices autorisés.

Résolvez 4 exercices au choix parmi les 6 proposés. Les exercices sont indépendants.

1 Déplacement d'un véhicule (5pts)

Cet exercice porte sur l'étude d'un mouvement rectiligne accéléré puis décéléré.

L'accélération

Une voiture de masse $m = 2000 \text{ kg}$ est arrêtée sur une route de campagne, horizontale et rectiligne. Elle démarre et atteint une vitesse $V_1 = 72 \text{ km/h}$ au bout d'une distance $d_1 = 400 \text{ m}$. Le mouvement est observé depuis un référentiel supposé galiléen. L'accélération a_1 est constante.

On pose un axe horizontal (Ox) sur lequel est projeté le centre d'inertie G du véhicule, le point O correspondant au point de départ du véhicule. On appelle $x(t)$ l'abscisse du point G sur l'axe (Ox).

1. Faites le bilan des forces appliquées à l'automobile et représentez-les sur un schéma (on notera \vec{F}_1 la force motrice de l'automobile).
2. Déduisez-en l'expression de la vitesse $v_x(t)$.
3. Déterminez l'équation horaire $x(t)$ en fonction de a_1 et t .
4. Déterminez l'énergie cinétique E_c du véhicule lorsqu'il atteint la distance d_1 .
5. Exprimez le travail $W(\vec{F}_1)$ de la force motrice du point de départ à l'abscisse d_1 .
6. Déduisez-en l'intensité de la force \vec{F}_1 .

Le freinage

À cette vitesse, l'automobiliste cess d'accélérer, feine et s'arrête sur une distance $d_2 = 20 \text{ m}$.

7. Calculez l'intensité de la force de freinage constante \vec{F}_2 nécessaire à l'arrêt du véhicule.
8. Quel est le temps de freinage ?

Remarque : pour ceux qui se poseraient la question, non, le temps de réaction du conducteur n'est pas comptabilisé dans les questions 7. et 8.

2 Champ de gravitation (5pts)

Cet exercice porte sur le mouvement d'une fusée au décollage, puis d'un véhicule spatial sur orbite, dans le champ de gravitation de la Terre.

Les vols d'un engin spatial s'effectuent suivant différentes phases : lancement, déplacement sur une orbite circulaire, retour sur Terre. Voici des caractéristiques d'un des vols de la navette spatiale qu'on se propose d'étudier :

- masse totale au décollage : $m_0 = 2,041 \cdot 10^6 \text{ kg}$;
- masse, vitesse, et altitude moyenne sur orbite : $m = 69,68 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $v = 7711 \text{ km/s}$,
 $h = 296 \text{ km}$.

Décollage

On considère que l'éjection des gaz par les moteurs a le même effet qu'une force extérieure de valeur $F_p = 32,4 \cdot 10^6 \text{ N}$, appelée poussée. On suppose la valeur du champ de pesanteur terrestre constant durant la phase de départ : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Faites le bilan des forces s'exerçant sur la navette à l'instant du décollage et représentez ces forces sur un schéma (au moment du décollage, on néglige les forces de frottement et la variation de masse).
2. Calculez la valeur de l'accélération au décollage.
3. Calculez la distance parcourue pendant les 2 s qui suivent le décollage en négligeant la variation d'accélération pendant cette durée.
4. À quoi est due la variation de l'accélération au cours de la montée ?

Navette sur orbite

Quelques minutes après le décollage, la navette est en orbite (mouvement circulaire uniforme) autour de la Terre à l'altitude h . Elle se déplace dans le champ de gravitation de la Terre : $\vec{g}_h = \vec{F}_h/m$, où \vec{F}_h est la force de gravitation exercée par la Terre sur la navette.

1. On assimile la navette à un point matériel. Sur un schéma, représentez la navette sur son orbite circulaire, la force de gravitation qu'elle subit et le champ de gravitation en différents points de cette orbite.
2. Donnez l'expression vectorielle de la force de gravitation \vec{F}_h . Déduisez-en l'expression du champ de gravitation en fonction de h , la masse de la Terre M_T , le rayon de la Terre R , la constante de gravitation G (et un vecteur unitaire centripète).
3. Montrez alors que l'intensité du champ de gravitation à l'altitude h vaut :

$$g_h = \frac{R^2}{(R+h)^2} g_0$$

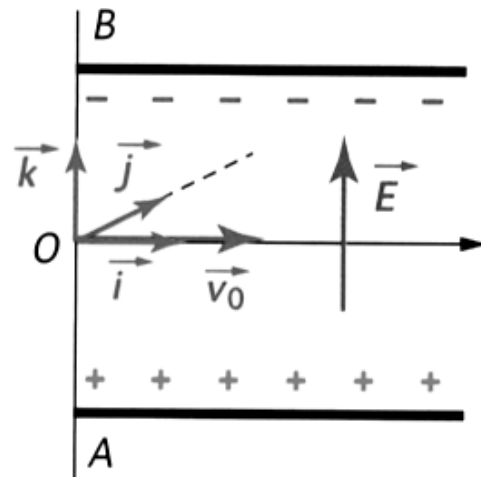
où g_0 est la valeur du champ de gravitation à l'altitude nulle.

4. Exprimez le vecteur accélération de la navette en mouvement circulaire.
5. Montrez que la vitesse de la navette vérifie : $v^2 = g_h(R+h)$.
6. Calculez g_h puis v et comparez cette valeur de la vitesse à celle donnée dans l'énoncé.

3 Électron dans un champ électrique uniforme (5pts)

Cet exercice porte sur la déflexion de la trajectoire d'un électron dans un champ électrique constant et uniforme.

Un électron pénètre, en un point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ entre deux plaques A et B d'un condensateur plan où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{k}$ (configuration d'un tube cathodique, dans un oscilloscope analogique par exemple). On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel terrestre considéré galiléen. *Données* : on rappelle que la force due à un champ électrostatique s'écrit : $\vec{f} = q \vec{E}$, où q est la charge du système étudié.



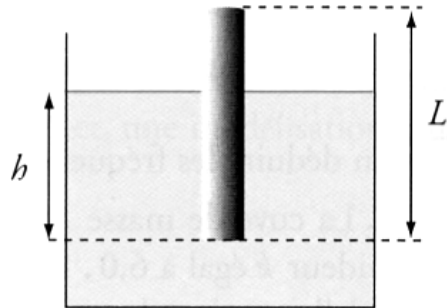
1. Parmi les forces qui s'appliquent sur l'électron, y en a-t-il une que vous pouvez négliger ?
2. Établissez les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la position M de l'électron en prenant comme origine des dates $t_0 = 0$ s, à l'instant où l'électron passe au point O .
3. Déduisez-en l'équation de la trajectoire de l'électron entre les deux plaques du condensateur. Quelle est sa nature ? Tracez l'allure de la trajectoire.

4 Oscillateur d'Archimède (5pts)

Cet exercice porte sur l'étude d'un système mécanique oscillant, et sur la force de poussée d'Archimède.

Un solide plongé dans un liquide est soumis à un ensemble de forces de poussée équivalentes à une force unique appelée force de poussée d'Archimède. Sa direction est verticale, elle est orientée vers le haut, sa norme est égale à celle du poids du liquide déplacé et son point d'application, appelé centre de poussée, coïncide avec le centre de gravité du volume de liquide déplacé.

Un cylindre homogène, de section S , hauteur L et masse volumique μ "flotte" sur l'eau. Un système de guidage adapté permet de maintenir le déplacement du cylindre vertical.



1. Exprimez littéralement la valeur F de la force de poussée \vec{F} en fonction de S , μ_{eau} la masse volumique de l'eau, h la hauteur immergée du cylindre et g la valeur du champ de pesanteur.
2. Pour qu'une hauteur $h = L/2$ du solide soit immergée à l'équilibre, quelle relation doit-il exister entre μ et μ_{eau} ?
3. Le système étant à l'équilibre dans les conditions de la question 2., on l'enfonce et, à un instant pris comme origine des dates, on le lâche sans vitesse initiale. Choisissez un repère (O, \vec{j}) convenable pour l'étude du mouvement, puis établissez l'équation différentielle du mouvement du cylindre en négligeant tout frottement.
4. Vérifiez que la fonction suivante est une solution de l'équation différentielle établie :

$$y = y_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T_0} \right) t + \varphi \right]$$

où y_0 et φ sont des constantes d'intégration. Exprimez la période propre T_0 en fonction de L et g et calculez sa valeur. Quelle est la nature du mouvement ?

5. Question bonus : En tenant compte de la présence d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, établissez l'équation différentielle du mouvement. Précisez, sans calculs supplémentaires, la nature du mouvement dans ce cas.

5 Précision des horloges

Cet exercice vise à étudier la précision de la mesure du temps, dans deux systèmes basés sur l'émission/absorption d'ondes électromagnétiques.

Horloges GPS

Le *Global Positioning System* (GPS) est actuellement la technologie la plus précise permettant de repérer sur le globe terrestre un mobile (véhicule) équipé d'un récepteur. Ce repérage se fait grâce à des satellites en orbite autour de la Terre qui émettent une onde électromagnétique reçue par le récepteur mobile.

Chaque milliseconde, les satellites situés à une altitude moyenne $h = 20180 \text{ km}$ émettent des signaux codés sous la forme d'ondes radio sur deux fréquences ($1,6 \text{ GHz}$), qui sont reçues au sol par le récepteur mobile terrestre. La position des satellites, la nature de l'atmosphère et le fait que les signaux ne soient émis que toutes les millisecondes font que la précision de repérage du récepteur est de l'ordre de 20 m .

- 1 Exprimez (puis calculez) la durée t de propagation du signal entre le satellite GPS sur orbite et le récepteur mobile au sol.
2. Pour une mesure, l'erreur sur la distance verticale est $\Delta y = 20 \text{ m}$. Exprimer (puis calculer) l'erreur Δt sur la durée de propagation du signal.
3. Déduisez-en l'erreur relative sur la mesure de t et discutez brièvement l'importance de la précision de la mesure du temps dans ce cas.
4. Pour une série de N mesures, les lois de la statistique montrent que l'erreur est divisée d'un facteur \sqrt{N} . Calculez N pour que l'erreur passe de 20 m à $\Delta y = 20 \text{ cm}$. Le signal GPS étant émis toutes les millisecondes, calculez le temps nécessaire pour effectuer ces N mesures. Discutez brièvement l'intérêt d'une telle précision pour un récepteur mobile.

Horloge atomique

Depuis 1967, l'horloge atomique au césium sert à la définition de l'unité de temps : la seconde.

Une horloge atomique au césium est une horloge dans laquelle la mesure du temps est basée sur la fréquence d'un oscillateur à quartz. Cette fréquence est contrôlée par le rayonnement émis par des atomes de césium 133, à l'état fondamental lors de leur transition entre deux niveaux hyperfins d'énergie notés E_1 et E_2 .

Lorsque la fréquence de l'onde EM générée par l'oscillateur à quartz est adéquate, les atomes de césium dans le niveau E_1 absorbent un quantum d'énergie et passent au niveau E_2 . En comptant la proportion d'atomes de césium ayant subi la transition, on détermine si la fréquence générée par le quartz est adéquate ou si elle s'éloigne de la bonne valeur. Un système de contrôle permet de corriger la fréquence de l'horloge.

Alors que les horloges à quartz ont une précision de l'ordre de 10^{-10} , les horloges atomiques commerciales actuelles ont une précision de l'ordre de 10^{-14} et l'horloge atomique Pharaon a une précision de l'ordre de 10^{-16} .

Dans ces conditions, on définit la seconde comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de césium 133.

1. Quelle est la fréquence de l'onde EM correspondant à la transition de l'atome de césium entre les niveaux E_1 et E_2 ?
2. À quel domaine du spectre EM appartient cette onde ?

3. Sur un diagramme, représentez les niveaux d'énergie E_1 et E_2 de l'atome de césium, indiquez la transition énergétique correspondant à l'absorption d'un photon. Que vaut la différence d'énergie entre les deux niveaux ?
4. Quelle est, pour une durée d'un jour, l'incertitude sur la mesure du temps par une horloge à quartz ? Une horloge atomique commerciale ?

Données : constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$, célérité de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

6 Résistance de fuite d'un condensateur réel

Cet exercice porte sur le comportement du condensateur (en régime transitoire).

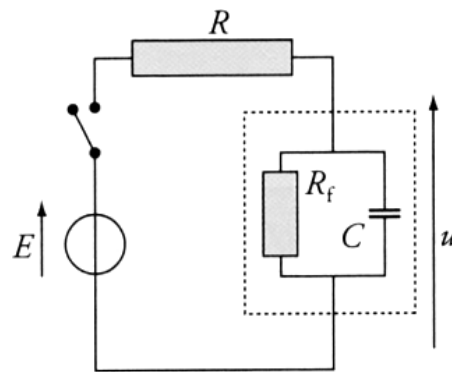
Donnée : on rappelle l'équation caractéristique d'un condensateur de capacité C : $i = C \frac{du_C}{dt}$.

Un condensateur réel, chargé, puis laissé en circuit ouvert, se décharge lentement, en quelques (plus s'il est de bonne qualité). Pour en rendre compte, on le modélise par un condensateur idéal de capacité C en parallèle sur sa "résistance de fuite" R_f ; cela permet de rendre compte du courant très faible qui passe d'une armature à l'autre à travers l'isolant.

On étudie le circuit présenté sur le schéma ci-contre.

1. On ferme l'interrupteur. Déterminez la valeur finale de la tension u , sans chercher à écrire d'équation différentielle. Donnez-en une valeur approchée si $R_f \gg R$.

2. On ouvre l'interrupteur à la date $t = 0$. Écrivez l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. Donnez la solution de cette équation.



Circuit avec condensateur réel.

3. La tension E est égale à 15 V et la capacité C est de $1,0 \mu\text{F}$. 100 secondes après l'ouverture de l'interrupteur, la tension aux bornes de C vaut 10 V. Déterminez R_f ainsi que la durée au bout de laquelle la tension sera tombée à 1,0 V.