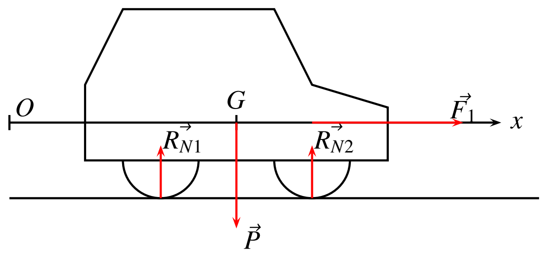
PS80 : Examen final — Corrigé

Il fallait résoudre 4 exercices au choix parmi les 6 proposés. Le total du barême indiqué est donc de 30 points, et l'examen est noté sur 20.

1 Déplacement d'un véhicule (5pts)

L'accélération

1. Ci-contre, le schéma de la voiture et des forces extérieures qui s'y appliquent :
   - $\vec{F_1}$ est la force motrice ;
   - $\vec{R_{N1}} + \vec{R_{N2}} = \vec{R_N}$ est la réaction normale de la route, compensant le poids $\vec{P}$;
   - la réaction tangentielle de la route (frottement) est négligée quand la voiture roule.



2. Détermination de la vitesse instantanée $v_x(t)$ de la voiture :
   — Système : voiture
   — Bilan des forces : $\vec{P} + \vec{R_N} = \vec{0}$, $\vec{F_1}$
   — PFD : $\Sigma \vec{F_{ext}} = m\,\vec{a}$

La seule force restante, $\vec{F_1}$, est orientée selon l'axe (Ox), et la voiture n'a pas de vitesse initiale selon l'axe vertical. Donc on projette sur l'axe (Ox) :

$$F_1 = m\,a_x = m\,a_1$$

$$\text{ssi}\, a_1 = \frac{F_1}{m}$$

$$\text{ssi}\, v_x(t) = \frac{F_1}{m}\,t + v_{0,x}$$

$$\text{or}\, v_{0,x} = 0 \quad \text{donc} \quad v_x(t) = \frac{F_1}{m}\,t$$

3. On écrit l'équation horaire en intégrant l'expression de $v_x(t)$:

$$x(t) = \frac{F_1}{2m}\,t^2 + x_0$$

$$\text{or}\, x_0 = 0 \quad \text{donc} \quad x(t) = \frac{F_1}{2m}\,t^2$$

4. L'énergie cinétique du véhicule à l'abscisse d_1 vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,V_1^2$$

où $V_1 = 72\,km.h^{-1} = 20\,m.s^{-1}$. Application numérique : $E_c = 4,0.10^5\,J$.

5. Le travail de la force motrice, du point de départ ($x = 0$) à l'abscisse d_1, vaut :

$$W\left(\vec{F_1}\right) = F_1\, d_1$$

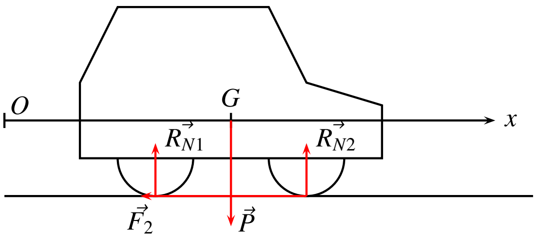
6. Le travail de la force motrice est aussi égal à la variation de l'énergie cinétique :

$$E_c\,(x = d_1) - E_c\,(x = 0) = W\left(\vec{F_1}\right)$$
$$\text{ssi } E_c = F_1\, d_1$$
$$\text{ssi } F_1 = \frac{E_c}{d_1}$$

Application numérique : $F_1 = 1,0.10^3\,N$.

Le freinage

7. Ci-contre, le schéma de la voiture et des forces extérieures qui s'y appliquent :



> $\vec{F_2}$ est la force de freinage (réaction tangentielle de la route) ;
> $\vec{R_{N1}} + \vec{R_{N2}} + \vec{P} = \vec{0}$.

Avec le même raisonnement que dans la question 6, on peut écrire :

$$E_c\,(x = d_1 + d_2) - E_c\,(x = d_1) = W\left(\vec{F_2}\right)$$
$$\text{ssi } - E_c = -F_2\, d_2$$
$$\text{ssi } F_2 = \frac{E_c}{d_2}$$

Application numérique : $F_2 = 2,0.10^4\,N$.

Remarque : on peut aussi appliquer le PFD ici, et résoudre les questions 7 et 8 en même temps.

8. Pour calculer le temps de freinage il faut établir l'expression de la vitesse durant la phase de freinage. Comme la seule force restante est $\vec{F_2}$, horizontale, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F_2} = m\vec{a_x}$$
$$\text{ssi } - F_2 = m\, a_x$$
$$\text{ssi } a_x = -\frac{F_2}{m}$$
$$\text{ssi } v_x = -\frac{F_2}{m}t + V_1$$

en prenant la nouvelle origine des temps au moment où la voiture est à l'abscisse d_1 avec la vitesse V_1. Alors, le temps de freinage est le temps t_2 auquel la vitesse s'annulle :

$$0 = -\frac{F_2}{m}t_2 + V_1$$
$$\text{ssi } t_2 = \frac{V_1\, m}{F_2}$$

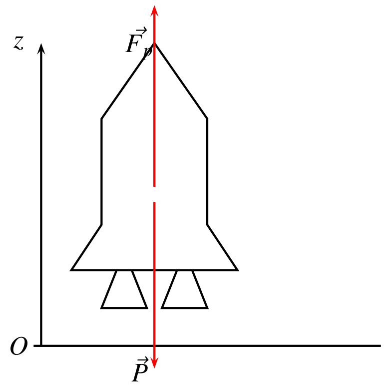
Application numérique : $t_2 = 2,0\,s$.

2 Champ de gravitation (5pts)

Décollage

Remarque : ce n'était pas précisé, mais la navette est portée par une fusée au décollage, son mouvement est donc vertical au début de la phase de montée.

1. Ci-contre, le schéma de la navette au décollage, et les forces qui s'y appliquent :



- le poids $\vec{P}$;
- la force de poussée $\vec{F_p}$ de norme supérieure à celle du poids (pour que la fusée puisse décoller).

2. Pour établir l'expression de l'accélération initiale de la navette, on applique le principe fondamental de la dynamique :
   - Système : navette + fusée ;
   - Bilan des Forces : $\vec{P}$, $\vec{F_p}$;
   - PFD : $\Sigma \vec{F_{ext}} = m_0 \vec{a_0}$.

$$\text{ssi } \vec{P} + \vec{F_p} = m_0 \vec{a_0}$$

Après projection sur l'axe (Oz) :

$$-m_0 g + F_p = m_0 a_0$$

$$\text{ssi } a_0 = \frac{F_p}{m_0} - g$$

Application numérique : $a_0 = 6,07 \, m.s^{-2}$.

3. On déduit de l'équation horaire $z(t)$ la distance parcourue pendant les premières 2 s de la montée :

$$v_z(t) = a_0 t \quad (v_{0,z} = 0)$$

$$\text{ssi } z(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (z_0 = 0)$$

$$\text{Alors : } z(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_p}{m_0} - g\right) t^2$$

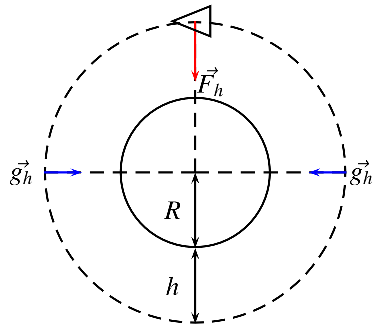
Application numérique : à $t = 2\,s$, $z = 12\,m$.

4. La variation de l'accélération au cours de la montée est due :
   - à la variation de la masse du véhicule (consommation du combustible) ;
   - à la résistance de l'air (de moins en moins négligeable à mesure que le véhicule accélère).

Ces deux effets sont bien négligeables sur les 12 premiers mètres de l'ascension.

Navette sur orbite

1. Ci-contre, le schéma de la navette sur orbite. La seule force qui s'y applique est la force de gravitation $\vec{F_h}$. Le champ de gravitation à l'altitude h est $\vec{g_h}$.



2. La force de gravitation exercée sur la navette par la Terre s'écrit :

$$\vec{F_h} = \frac{G\,M_T\,m}{(R+h)^2}\vec{u_N}$$

où le vecteur u_N est un vecteur unitaire centripète. Le champ de gravitation à l'altitude h s'écrit :

$$\vec{g_h} = \frac{\vec{F_h}}{m} = \frac{G\,M_T}{(R+h)^2}\vec{u_N}$$

3. Le champ de gravitation au sol ($h = 0$) s'écrit :

$$\vec{g_0} = \frac{G\,M_T}{R^2}\vec{u_N} \quad \text{donc} \quad g_h = \frac{R^2}{(R+h)^2}g_0$$

4. L'accélération de la navette en mouvement circulaire uniforme est égale à son acélération normale :

$$\vec{a} = \vec{a_N} = \frac{v^2}{R+h}\vec{u_N}$$

5. Pour démontrer cette relation on applique le principe fondamental de la dynamique à la navette sur orbite :

- Système : navette ;
- Bilan des forces : $\vec{F_h}$;
- PFD : $\Sigma\,F_{ext} = m\,\vec{a}$.

$$\text{ssi}\,\vec{F_h} = m\,\vec{a}$$

$$\text{ssi}\,m\,g_h = m\,\frac{v^2}{R+h}\,(\text{projection sur }\vec{u_N})$$

$$\text{ssi}\,v^2 = g_h\,(R+h)$$

6. Applications numériques : g_h et v.
D'après la question 3 : $g_h = R^2 g_0/\left(R+h\right)^2$. A.N. : $g_h = 8,96\,m.s^{-2}$.
D'après la question 5 : $v = \sqrt{g_h\,(R+h)}$. A.N. : $v = 7,74.10^3\,m.s^{-1}$.

La vitesse orbitale donnée dans l'énoncé est fausse, tout au moins l'unité correcte est le $m.s^{-1}$, et pas le $km.s^{-1}$. En tenant compte de cela, la valeur calculée et la valeur donnée sont compatibles. La faible différence peut être due à des effets relativistes (relativité générale) non pris en compte dans le présent calcul.

3 Électron dans un champ électrique uniforme (5pts)

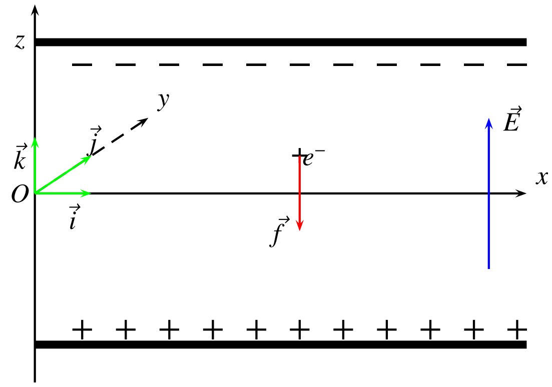
1. On peut négliger le poids de l'électron devant la force électrostatique : le système est conçu de sorte que le champ électrique seul dévie les électrons, donc le champ électrostatique appliqué est assez fort pour qu'on puisse négliger le poids pour simplifier l'étude.

2. Pour déterminer les équations horaires, on applique le principe fondamental de la dynamique :

- Système : électron dans le champ $\vec{E}$
- Bilan des forces : voir ci-dessous
- PFD : $\Sigma \vec{F_{ext}} = m\,\vec{a}$

Voici ci-contre, le schéma de l'électron dans le dispositif, et le bilan des forces qui s'y appliquent :

- le poids $\vec{P}$ n'est pas représenté car on va le négliger au cours de l'étude ;
- la force électrostatique $\vec{f} = q\vec{E}$, avec $q < 0$ pour un électron.



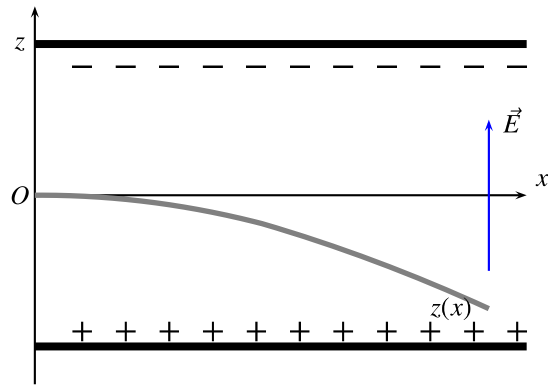
Par projection sur les trois axes on trouve :

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = 0 \\ ma_z = qE \end{cases} \quad \text{d'où :} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = 0 \\ v_z = \frac{qE}{m}t \end{cases} \text{car } \vec{v_0} = v_0\,\vec{i}.$$

On obtient les équations horaires : $\begin{cases} x(t) = v_0\,t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$

3. On déduit l'équation de la trajectoire des équations horaires, en effet :

$$x = v_0 t$$
$$\text{ssi} \quad t = \frac{x}{v_0}$$
$$\text{Donc} \quad z = \frac{qE}{2m}t^2$$
$$\text{ssi } z(x) = \frac{1}{2}\frac{qE}{mv_0^2}x^2$$



La trajectoire est parabolique (cf. schéma).

4 Oscillateur d'Archimède (5pts)

1. La norme de la force de poussée d'Archimède est égale au poids du volume d'eau déplacé :

$$F = \mu_{eau} S h g$$

2. À l'équilibre, la poussée d'Archimède et le poids du solide se compensent :

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\text{ssi} \quad \mu_{eau} S h g = \mu S L g$$

$$\text{ssi} \quad h = \frac{\mu}{\mu_{eau}} L$$

Donc, pour qu'une hauteur $h = L/2$ soit immergée à l'équilibre, il faut avoir la relation suivante : $\mu = \mu_{eau}/2$.

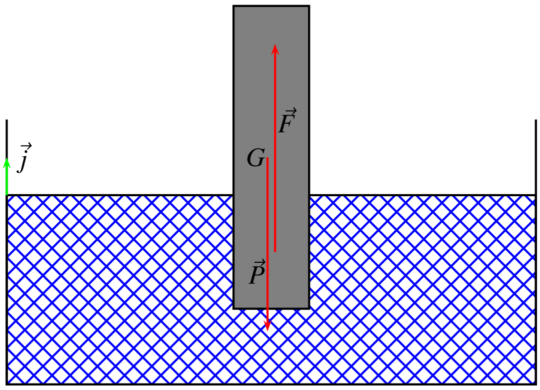
3. Ci-contre, le schéma du système à un instant quelconque :

— la position du centre de gravité du solide est $y(t)$

— la hauteur immergée vaut $h - y$

— la force de poussée vaut donc : $F = \mu_{eau} S (h - y) g$

Par souci de simplification, l'origine des ordonnées ($y = 0$) est prise à la position à l'équilibre du centre de gravité du solide.



On applique alors le principe fondamental de la dynamique :

— Système : solide partiellement immergé

— Bilan des forces : $\vec{F}$, $\vec{P}$

— PFD : $\Sigma \vec{F_{et}} = m \vec{a}$

$$\text{ssi } \vec{P} + \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\text{sur } \left(O\vec{j}\right) : -\mu S L g + \mu_{eau} S (h - y) g = \mu S L \ddot{y}$$

Or on a démontré précédemment que : $-\mu S L g + -\mu_{eau} S h g = 0$ (à l'équilibre) et aussi $\mu = \mu_{eau}/2$. Donc :

$$-\mu_{eau} S y g = \mu S L \ddot{y}$$

$$\text{ssi } \ddot{y} + \frac{2g}{L} y = 0$$

4. Vérifions que la solution proposée convient :

$$y = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \Rightarrow \dot{y} = y_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \times \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \ddot{y} = -y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \times \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

Alors l'équation est vérifiée si et seulement si :

$$-y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \times \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{2g}{L} y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = 0$$

$$\text{ssi} \quad \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{2g}{L} \quad \text{ssi} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} \,(1)$$

La solution proposée est donc valide, à la condition (1). Il s'agit d'un mouvement oscillant, de période propre T_0.

Il était difficile de réaliser l'application numérique sans la valeur de $L = 10\,cm$.
On trouve alors : $T_0 = 0,45\,s$.

5. Si on tient compte d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, l'équation vectorielle (PFD) devient :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

$$\text{sur } \left(O\vec{j}\right) : -\mu_{eau}Syg - \lambda\dot{y} = \mu SL\ddot{y}$$

$$\text{ssi } \ddot{y} + \frac{\lambda}{\mu SL}\dot{y} + \frac{2g}{L}y = 0$$

En présence d'une force de frottement fluide, le mouvement est freiné, i.e. le système (solide immergé) perd de l'énergie : l'amplitude des oscillations décroît avec le temps (on parle d'oscillations amorties).

5 Précision des horloges

Horloges GPS

Remarque : l'énoncé (pris tel quel d'un manuel) confond incertitude et erreur. Vous aurez corrigé naturellement.

1. La durée de propagation du signal, du satellite au récepteur mobile, s'écrit : $t = h/c$.
Application numérique : $t = 6,73.10^{-2}\,s$.

2. L'incertitude sur la durée de propagation du signal s'écrit : $\Delta t = \Delta y/c$.
Application numérique : $\Delta t = 6,67.10^{-8}\,s$.

3. L'incertitude relative sur la mesure de t vaut donc :

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta y}{h}$$

Application numérique : $\Delta t/t = 10^{-6}$. Il est donc important d'équiper le GPS d'un système très précis de mesure du temps.

4. En supposant que l'incertitude sur la mesure du temps est constante, l'incertitude sur la mesure de position varie avec le nombre N de mesures :

$$\Delta y_N = \frac{\Delta y_1}{\sqrt{N}}$$

$$\text{ssi } N = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta y_N}\right)^2$$

Application numérique : pour diminuer l'incertitude de $\Delta y_1 = 20\,m$ à $\Delta y_N = 20\,cm$, il faut donc $N = 10^4$ mesures successives.

Le signal GPS étant émis toutes les millisecondes, le temps nécessaire pour effectuer ces 10^4 mesures est d'environ $10\,s$. Or sur cette durée le récepteur (a priori une voiture, un avion ou un navire) s'est déplacé de plus de 20 cm. L'intérêt d'une telle précision pour un récepteur mobile (véhicule) est discutable.

Horloge atomique

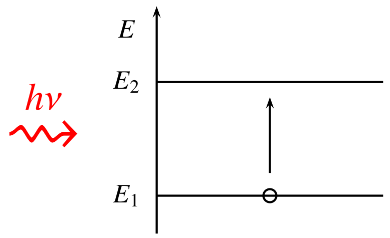
1. L'onde EM permettant une transition du niveau E_1 au niveau E_2 de l'atome de césium a une fréquence $\nu \simeq 9,193\,GHz$ (d'après la phrase : "on définit la seconde comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation").

2. Avec une telle fréquence, il s'agit d'un onde radio. Sa longueur d'onde dans le vide est de $\lambda_0 = c/\nu$, i.e. $\lambda_0 \simeq 3,3\,cm$: c'est une onde radio centimétrique.

3. La différence entre les niveaux E_1 et E_2 (représentés sur le schéma ci-contre) vaut :

$$E_2 - E_1 = h\,\nu$$

Application numérique :
$E_2 - E_1 = 6,07.10^{-24}\,J = 37,9\,\mu eV$.



4. D'après le document, une horloge à quartz a une précision de 10^{-10}. L'incertitude induite sur la mesure de la durée d'un jour (86400 s) vaut donc : $\Delta t_q = 8,64.10^{-6}\,s$.
Une horloge atomique commerciale a une précision de 10^{-14}. L'incertitude induite sur la mesure de la durée d'un jour (86400 s) vaut donc : $\Delta t_a = 8,64.10^{-10}\,s$.

6 Résistance de fuite d'un condensateur réel

1. Quand l'interrupteur est fermé, la loi des mailles dans la boucle générateur–résistance–condensateur réel s'écrit :

$$E = R\,I + u$$

Or quand le condensateur est complètement chargé ("état final" mentionné dans l'énoncé), le courant qui le traverse est nul. On a donc :

$$E = R\,I + R_f\,I \quad \text{et} \quad u = R_f\,I$$

$$\text{ssi}\, u = E - R\,I$$

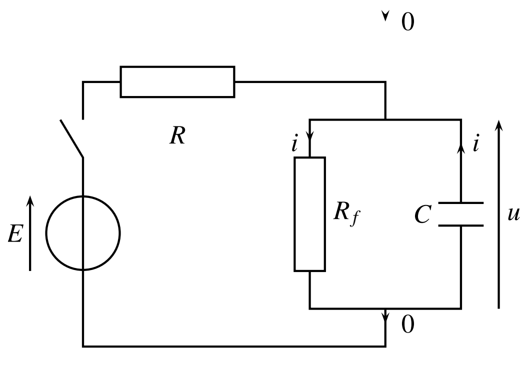
Si $R_f >> R$, on obtient $E = R_f\,I$ et donc la valeur finale de u vaut : $u = E$.

2. On ouvre l'interrupteur à $t = 0$ (on a donc $u(0) = E$), puis le condensateur se décharge dans la résistance de fuite (cf. schéma ci-contre) :

$$u = R_f\,i$$

Or, $i = C\frac{du}{dt}$ en convention récepteur. Le condensateur est ici en convention générateur, donc on a $i = -C\frac{du}{dt}$. Donc :

$$u + R_f C\frac{du}{dt} = 0$$



La solution de cette équation s'écrit :

$$u(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad \tau = R_f\,C$$

3. Pour déterminer la résistance de fuite, on utilise les deux mesures de tension lors de la décharge, en effet :

$$\frac{u\,(t_2)}{u\,(t_2)} = e^{\frac{t_2-t_1}{\tau}}$$

$$\text{ssi} \quad \tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{u(t_2)}{u(t_1)}\right)}$$

$$\text{ssi} \quad R_f = \frac{t_2 - t_1}{C\,\ln\left(\frac{u(t_2)}{u(t_1)}\right)}$$

Application numérique : avec $u\,(t_1 = 0s) = 15\,V$, $u\,(t_2 = 100s) = 10\,V$, on obtient $R_f = 2,47.10^8\,\Omega$.

La durée t_2 au bout de laquelle la tension tombe à $u = 1\,V$ est donée par :

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{ssi} \quad t = \tau\ln\left(\frac{E}{u}\right)$$

Application numérique : $t_2 = 669\,s = 11\,min\,9\,s$.