TD1 Corrigé : Équations aux dimensions et Ordres de grandeur

1. Estimer le nombre de grains de sable contenus dans une plage de 10 km de longueur.

Estimons d'abord le volume de la plage : $V_{\text{plage}} = L \times \ell \times h$, où $L \sim 10\,km$ (donnée). Faisons l'hypothèse que $\ell \sim 100\,m$ et $h \sim 10\,m$, qui sont des valeurs moyennes (la plage considérée peut être plus ou moins profonde, plus ou moins large. le nimbre de grains variera en fonction de l'hypothèse faite sur les dimensions de la plage). Alors $V_{\text{plage}} \sim 10^7\,m^3$.
Estimons maintenant le volume d'un grain de sable. Le diamètre d'un grain est d'environ $D_{\text{grain}} \sim 0,1mm$ (sable fin. Le diamètre d'un grain de sable varie entre 0,1 et 1 mm environ, et les formes des grains sont aussi très variables. On peut faire l'approximation d'une sphère ou d'un cube, au choix.) . Son volume vaut alors $V_{\text{grain}} = \frac{4}{3}\pi\frac{D^2_{\text{grain}}}{8}$, soit $V_{\text{grain}} \sim 5.10^{-13}\,m^3$.
On en déduit le nombre de grains de sable : $N_{\text{grains}} = V_{\text{rm}}/V_{\text{grain}}$, soit $N_{\text{grains}} \sim 2.10^{19}$.

2. Estimer le nombre de nucléons contenus dans un grain de sable.

On estimera ce nombre par le rapport suivant : $N_{\text{nucl}} = m_{\text{grain}}/m_{\text{nucleon}}$.
Calculons d'abord la masse d'un grain de sable : $m_{\text{grain}} = V_{\text{grain}} \times \rho_{\text{sable}}$. Faisons l'hypothèse, relativement raisonnable $\rho_{\text{sable}} \sim 2.10^3\,kg.m^{-3}$ (En fait, $\rho_{\text{sable}} = 1,6\,t.m^{-3}$ pour du sable sec, $\rho_{\text{sable}} = 2\,t.m^{-3}$ pour du sable saturé d'eau. Masses volumiques des roches : $\rho_{\text{pierreponce}} \simeq 0,9\,t.m^{-3}$ à $\rho_{\text{diamant}} \simeq 3,5\,t.m^{-3}$).
Ainsi $m_{\text{grain}} \sim 1.10^{-9}\,kg$.
Comme $m_{\text{nucleon}} \simeq 1,67.10^{-27}\,kg$, on trouve $N_{\text{nucl}} \sim 6.10^{17}$.
Remarque : en se "trompant" d'un facteur 2 sur la masse volumique du sable, on se trompe d'autant sur le résultat final. Pour un calcul précis c'est une erreur non-négligeable, mais ici c'est l'ordre de grandeur qui nous intéresse et il reste le même. De plus, les hypothèses faites sur la forme et la taille des grains de sable induisent des approximations aussi voire plus importantes.

3. Estimer la charge positive totale contenue dans un grain de sable.

Cette charge totale s'écrit : $Q_{\text{pos}} = q_p \times N_{\text{protons}}$.
Or, $N_{\text{protons}} = N_{\text{nucl}}/2$ (les noyaux d'oxygène comme ceux de silisium, contiennent autant de neutrons que de protons). Donc $N_{\text{protons}} \sim 3.10^{16}$.
Comme $q_p = 1,6.10^{-19}\,C$, on obtient $Q_{\text{pos}} \sim 5.10^{-2}\,C$.

4. Écrire l'équation aux dimensions de la constante molaire des gaz parfaits R d'après la loi des gaz parfaits : $PV = nRT$.

l'équation d'état peut se réécrire sous la forme :

$$R = \frac{PV}{nT}$$

d'où l'expression de la dimension de R :

$$\begin{aligned} [R] &= [P][V][n]^{-1}[T]^{-1} \\ &= (M.L.T^{-2}.L^{-2})(L^3)(N)^{-1}(\Theta)^{-1} \\ &= M.L^2.T^{-2}.N^{-1}.\Theta^{-1} \end{aligned}$$

d'après les définitions des espaces de base du SI, et sachant qu'une pression est en fait une force par unité de surface.
Complément : l'unité SI de R s'écrit :

$$1u_{SI}(R) = 1kg.m^2.s^{-2}.mol^{-1}.K^{-1}$$

Valeur tabulée : $R \simeq 8.314 J.mol^{-1}.K^{-1}$ avec $1J = 1kg.m^2.s^{-2}$, unité SI d'énergie.

5. On considère deux "grains de sable chargés positivement", c'est-à-dire des objets ponctuels de même charge positive $q \sim 0.1C$ et même masse m égale à celle d'un grain de sable (cf. question 1.), situées à une distance $d \sim 1m$.
5.a. Estimer les forces électrostatique et gravitationnelle entre ces deux objets. Les comparer et commenter.

La force électrostatique entre les deux charges s'écrit : $F_{\rm el} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ (où $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$ est la constante de Coulomb). Avec les valeurs données, on a donc : $F_{\rm el} \sim 2.10^8\,N$.
La force gravitationnelle entre les deux masses s'écrit : $F_{\rm gr} = G\,\frac{m^2}{d^2}$. Avec les valeurs données, on a donc : $F_{\rm gr} \sim 7.10^{-28}\,N$.
Le rapport entre les deux vaut $F_{\rm gr}/F_{\rm el} \sim 4.10^{-36}$. L'interaction gravitationnelle est beaucoup moins intense que l'interaction électromagnétique.

5.b. Écrire l'équation aux dimensions de la constante de Coulomb k.

La force électrostatique entre les deux charges indiquées s'écrit : $F_{\rm el} = \frac{kq^2}{d^2}$, ce qu'on peut réécrire :

$$k = \frac{F_{\rm el} d^2}{q^2}$$

Or, $[F_{\rm el}] = M.L.T^{-2}$, et $[q] = I.T$ (l'intensité du courant électrique représente "un mouvement de charges", c'est-à-dire par ex. la quantité de charges perdues (ou gagnées) par une électrode).
Donc,

$$[k] = M.L^3.T^{-4}.I^{-2}$$

6. Frottements dûs à des liquides visqueux.
6.a. La formule de Stokes $f = 6\pi a\eta v$ donne la force résistante qui s'exerce sur une sphère de rayon a, de vitesse v, dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η. Déterminer l'équation aux dimensions du coefficient η.

Le coefficient de viscosité s'écrit :

$$\eta = \frac{f}{6\pi a v}$$

Or, $[f] = M.L.T^{-2}$, $[a] = L$ et $[v] = L.T^{-1}$. D'où la dimension de η :

$$[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$$

6.b. Pour l'eau à 20°C, $\eta = 0,010 C.G.S.$; calculer η en unités SI.

L'unité C.G.S. de η s'écrit donc :

$$\begin{aligned} 1u_{C.G.S.}(\eta) &= 1g.cm^{-1}.s^{-1} \\ &= 10^{-3}kg.10^2m^{-1}.1s^{-1} \\ &= 10^{-1}u_{SI}(\eta) \end{aligned}$$

D'où, pour l'eau à 20°C, $\eta = 10^{-3} SI$.

6.c. La vitesse limite v d'une sphère de rayon a et de masse volumique ρ' tombant dans un milieu visqueux de coefficient de viscosité η et de masse volumique ρ est donnée par la formule :

$$v = \frac{1}{9}\frac{a^2 g(\rho' - \rho)}{\eta}$$

où g est l'accélération de pesanteur. Vérifiez l'homogénéité de cette formule.

Le membre de gauche a pour dimension :

$$[v] = L.T^1$$

Le membre de droite a pour dimension :

$$\begin{aligned}[a]^2[(\rho' - \rho)][\eta^{-1}][g] &= L^2(M.L^{-3})(M.L^{-1}.T^{-1})^{-1}(L.T^{-2}) \\ &= L.T^{-1}\end{aligned}$$

La formule est donc homogène.

6.d. Donner l'o.d.g. de la vitesse limite d'une bille de verre de rayon $r \simeq 5mm$ tombant dans l'eau (à 20$°C$).

Pour répondre à cette question, il faut faire une hypothèse sur la masse volumique du matériau de la bille : $\rho' \sim 2g.cm^{-3}$, ce qui est du même ordre de grandeur que la masse volumique du sable, certainement plus lourd que l'eau et plus léger que le diamant ou l'acier (en fait, pour du verre à 20$°C$, $\rho' = 2,53\, g.cm^{-3}$).
Donc, $v_{lim} \sim 25\, m.s^{-1}$.

7.a. Estimer la masse de la Terre.

La masse de la Terre exerce une attraction gravitationnelle connue sous le nom de pesanteur sur tout corps situé à sa surface. On a donc :

$$F_{\text{grav}} = P$$

$$\text{ssi } G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = mg$$

Avec M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, et m la masse d'un objet situé à la surface de la Terre. Ainsi :

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

Avec $R_T \simeq 6,4.10^3\, km$, $g = 9,81\, m.s^{-2} \sim 10m.s^{-2}$ et $G = 6,67.10^{-11}\, (SI)$, on obtient : $M_T \sim 6.10^{24} kg$.

7.b. Estimer la masse d'eau disponible sur Terre.

On peut considérer que la majorité de l'eau sur Terre est contenue dans les océans, lesquels recouvrent environ 70% de la surface du globe. Ainsi, la masse d'eau disponible s'écrit :

$$M_{\text{eau}} \simeq V_{\text{oceans}}\rho_{\text{eau}} = 4\pi R_T^2 h \rho_{\text{eau}}$$

Où $h \sim 5\, km$ est la profondeur moyenne des océans (une hypothèse raisonnable sachant que le point le plus profond, la fosse des Mariannes, a une profondeur de 11 km environ).

On a alors : $M_{\text{eau}} \sim 2.10^{21}\,kg$, soit moins d'un millième de la masse de la Terre.

8. Variante (moins abstraite) de la question 5.a. : estimer l'o.d.g. des forces électrostatique et gravitationnelle exercées par le proton sur l'électron (et réciproquement) dans un atome d'hydrogène. Les comparer et commenter.

La force électrostatique entre le proton et l'électron s'écrit :

$$F_{\text{el}} = k\frac{q_e^2}{r_H^2}$$

où r_H, appelé Rayon de Bohr de l'atome d'ydrogène, est la ditance moyenne séparant le proton et l'électron dans cet atome : $r_H \simeq 25\,pm$. Alors, $F_{\text{el}} \sim 10^{-5}\,N$.
La force gravitationnelle s'écrit :

$$F_{\text{gr}} = G\frac{m_e m_p}{r_H^2}$$

Ainsi, $F_{\text{gr}} \sim 4.10^{-42}\,N$.
Le rapport de ces deux forces vaut donc : $F_{\text{gr}}/F_{\text{el}} \sim 4.10^{-37}$. Même conclusion qu'à la question 5.a.

9. Estimer la fraction chargée dans la matière ordinaire.

Pour répondre à cette question, il faut penser à l'expérience suivante : après avoir électrisé une règle en plastique, on arive à soulever de petits morceaux de papiers, à l'aide uniquement de la force électristatique exercée par cette règle sur les morceaux de papier. Il faut pour cela approcher la règle à une distance $d \simeq 1\,cm$ des confettis, et ceux-ci ne doivent pas peser plus de $m \simeq 1\,g$.
Sous ces conditions, la force életrostatique entre la règle et un bout de papier compense le poids de celui-ci, c'est-à-dire :

$$k\,\frac{q^2}{d^2} = mg$$

où q est la charge mise en jeu à la fois dans le papier et dans le plastique (puisque les charges de la règle électrisée créent un déplacement de charges dans le papier, attirant la même quantité de charges de signe opposé). On peut alors écrire cette charge :

$$q = d\sqrt{mgk}$$

Ce qui donne : $q \simeq 10^{-6}\,C$.
Par ailleurs, 1 g de matière contient N_A nucléons, protons et neutons sensiblement à égalité, donc la charge maximale possible d'1 g de matière vaut environ $Q_{\max} \simeq 0,5\mathcal{F}$ (en utilisant la définition du Faraday : $1\mathcal{F} = N_A q_e$), soit $Q_{\max} \simeq 5.10^4\,C$.
La fraction chargée de la matière ordinaire est donc le rapport entre les charges mobilisées dans le confetti de l'expérience sur la charge maximale mentionnée ci-dessus :

$$\eta = \frac{q}{Q_{\max}}$$

c'est-à-dire, $\eta \simeq 2.10^{-11}$. On peut en déduire que la matière usuelle est neutre à une extraordinaire précision près.

10. Estimer la masse du bâtiment A (BF) de l'UTC.

Dans cet exercice, on ne tiendra compte que du béton armé constituant la structure, considérant que la masse des câblages et meubles est négligeable. Les façades vitrées sont incluses dans le calcul qui suit, en effet la masse volumique du verre est très proche de celle du béton. Écrivons la masse du bâtiment de la manière suivante :

$$M_{\mathrm{BFA}} \sim M_{\mathrm{beton}} \sim V_{\mathrm{BFA}}\rho f$$

où f est la fraction en volume occupée par le béton et ρ sa masse volumique ($\rho \simeq 2,5\,t.m^{-3}$ pour du béton armé. cette valeur est proche de celles utilisées pour les autres matériau de cette feuille de TD, donc probablement proche de votre "hypothèse raisonnable").
Pour calculer le facteur f, assimilons le bâtiment à un ensemble d'unités de type "salle de classe" : celles-ci sont moins spacieuses que les amphis, mais plus que les parkings ou encore les cages d'ascenseur et cages d'escaliers. Elles seront notre "brique élémentaire". Une salle de classe de dimensions $10\,m \times 10\,m \times 3\,m$ est entourée de murs d'environ $20\,cm$ d'épaisseur, entre un plafond et un plancher d'environ $40\,cm$ d'épaisseur. La fraction de béton vaut alors environ : $f \sim 0,13$.
Le bâtiment est long de $L \sim 100\,m$ (une dizaine de salles de TD), large de $\ell \sim 30\,m$ (2 salles et un couloir aux multiples usages), et haut de $h \sim 30\,m$ (6 étages de salles de classes, des amphis, 2 étages de parkings), soit un volume total de $V_{\mathrm{BFA}} \sim L \times \ell \times h \sim 10^5\,m^3$.
On obtient alors : $M_{\mathrm{BFA}} \sim 2,5.10^4 t$.
Remarque : La véritable structure du bâtiment est un peu différente de celle décrite ici, non pas faite de "cubes empilés" mais d'un nombre de piliers soutenant les plafonds/planchers, avec des parois non-porteuses entre salles dans chaque étage, ce qui est plus léger. Ceci dit, les amphis ont une structure plus complexe, et nous n'avons pas non plus tenu compte de la masse des fondations (certainement importante).

11. La force de portance exercée par l'air sur une aile d'avion s'écrit :

$$F_Z = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_Z$$

où S est appelée "surface de référence" (plus faible que la surface de l'aile), ρ est la masse volumique de l'air et v est la vitesse de l'avion. Écrire l'équation aux dimensions du facteur C_Z.

Cette équation peut se reéécrire sous la forme :

$$C_Z = \frac{2F_Z}{\rho S v^2}$$

Or, $[F_Z] = M.L.T^{-2}$, $[\rho] = M.L^{-3}$, $[v] = L.T^{-1}$ et $[S] = L^2$. On a alors : $[C_Z] = 1$.
*Complément :*Il s'agit d'un coefficient sans dimensions, dont la valeur dépend essentiellement de la forme du profil de l'ail (sa coupe verticale, faisant apparaître la courbure du dessus et du dessous de l'aile) et de l'incidence (angle entre l'aile et sa trajectoire dans l'air). La surface de référence S est touours inférieure à la surface de l'aile, car les forces de portance ne se répartissent pas de manière uniforme sur l'aile, c'est-à-dire que l'extrémité libre de l'aile et la zone proche du fuselage "portent" moins que le milieu de l'aile. Cette surface de référence tient compte de cette répartition inégale.

Références : la plupart de ces exercices sont issus des UV de première année "Méthodes et outils pour la physique" et "Physique exérimentale" de l'Université Montpellier 2.